DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{3}$$

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- bruke ulike strategier for å utforske og **bestemme grenseverdier til funksjoner**, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier

Oppgave 2

Løs likningen

$$\lg x+\lg(x+3)=1$$

Siden vi ikke kan ta logaritmen til et negativt tall, må $x>0$. Vi bruker logaritme-regelen $\lg a+\lg b=\lg(a\cdot b)$ og får:

$$\lg x+1g(x+3)=1$$
$$\Downarrow$$
$$\lg(x(x+3))=1$$
$$\Updownarrow$$
$$x(x+3)=10$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2+3x-10=0$$
$$\Updownarrow$$
$$x=-5 \ \vee \ x=2$$

Vi vet at kun positive løsninger er lovlige og får $L=\{2\}$

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og **bruke ulike strategier for å løse** eksponentialligninger og l**ogaritmeligninger**

Oppgave 3

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=3x^2+a\cdot x+2\ , \quad a\in\mathbb{R}$$

a) Bestem a slik at den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[2,4]$ blir 10.

b) Bestem a slik at den momentane vekstfarten i $(2, f(2))$ blir 10.

a) Den gjennomsnittlige veksten i intervallet $[2,\, 4]$er gitt ved

$$\frac{f(4)-f(2)}{4-2}=\frac{(3\cdot 4^2+a\cdot 4+2)-(3\cdot 2^2+a\cdot 2+2)}{2}=\frac{2a+36}{2}=a+18$$

Den gjennomsnittlige veksten skal være 10, så $a+18=10$. Da må $a=-8$.

b) Den momentane vekstfarten for $x=2$ er gitt ved

$$f'(2)=6\cdot 2+a=12+a$$

Den momentane vekstfarten skal være 10, så $12+a=10$. Da må $a=-2$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **forstå begrepene gjennomsnittlig og momentan vekstfart,** grenseverdi og derivasjon, og bruke disse for å løse praktiske problemer

Oppgave 4

Av tegnene A og B skal vi lage en kode som består av åtte tegn. To eksempler på slike koder er AABBAAAB og ABBAABBA.

a) Hvor mange ulike koder kan vi lage?

b) Hva er sannsynligheten for at det er minst seks A-er i en tilfeldig kode?

a) Vi har ordnet utvalg med tilbakelegging. Det er to mulige utfall i hvert uttrekk.

Vi kan lage $2^8 = 256$ ulike koder.

b) Oppgaven kan løses på ulike måter.

Metode 1:
Vi må regne ut sannsynligheten for enten 6, 7 eller 8 A-er. Dette er binomisk sannsynlighet.

$$\binom{8}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\binom{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+\binom{8}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=(28+8+1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{37}{256}$$

Sannsynligheten for minst seks A-er er $\frac{37}{256}$.

Metode 2:
Alle ulike koder er like sannsynlige, så vi har uniform sannsynlighet. Vi kan da bruke gunstige på mulige. De gunstige utfallene er de med 0, 1 eller 2 B-er.
Vi har ett utfall med bare A-er. Det gir ett utfall uten B-er. Dersom vi har én B, kan den plasseres på én av de 8 plassene. Vi har derfor 8 utfall med én B. Dersom vi skal ha to B-er, må vi velge 2 av 8 plasser. Dette kan vi gjøre på $\binom{8}{2}=28$ måter.
Samlet gir dette $1+8+28=37$ gunstige utfall av de 256 mulige utfallene.

Sannsynligheten for minst seks A-er er $\frac{37}{256}$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- utforske og **forstå kombinatoriske forsøk med ordnede** og uordnede **utvalg**
- analysere et problem der sannsynlighet og kombinatorikk inngår, og bruke ulike strategier i problemløsingen

Oppgave 5

```python
def f(x):
    return x/(1+x**2)

h = 0.0001
x = 0
while (f(x+h)-f(x))/h > 0:
    x = x + 0.01
print("x=", x)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor.

a) Hva ønsker eleven å finne ut?

b) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva blir resultatet?

a) Eleven ønsker å finne ut hvor den deriverte til f første gang går fra å være positiv til å være mindre eller lik 0, når x er større eller lik 0.

b) Når programmet kjøres, vil først x være 0. Så sjekker programmet om den deriverte er positiv. Dersom det er sant, så vil x øke med 0.01. Dette fortsetter programmet med så lenge den deriverte er positiv.

For å finne ut hva som blir resultatet, deriverer jeg f:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Vi ser at den deriverte går fra å være positiv til å være negativ når $x=1$. Programmet skriver ut $x=1$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **forstå begrepene vekstfart**, grenseverdi, **derivasjon** og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer

Eleven må kunne lese og forstå algoritmen i oppgaven. Det vil si at eleven må kunne veksle mellom ulike typer representasjoner. Oppgaven tester også elevens grunnleggende digitale ferdigheter.

I oppgave b) vil elever som viser forståelse for hva som skjer når programmet kjøres, men ikke regner ut når den deriverte er 0, kunne få uttelling. For å få full uttelling må eleven finne ut når $f'(x)=0$ for $x>0$.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1

1. januar hvert år setter Halvor inn 10 000 kroner på en konto med en fast årlig rentefot på 1,8 %.

Første innskudd var 1. januar 2020.

a) Hvor stort vil beløpet på kontoen være 31. desember 2022?

Vi lar $B(x)$ være beløpet på kontoen x år etter 1. januar 2020.

b) Er B en kontinuerlig funksjon? Begrunn svaret.

Halvor ønsker å kunne regne ut hvor mange år det tar før beløpet han har på konto når en viss størrelse K.

c) Lag et program som Halvor kan bruke.
Input skal være rentefot, innskudd og K.
Output skal være antall år det går før beløpet er større eller lik K.

Du kan for eksempel starte slik:

```
rentefot = 1.8
innskudd = 10000
K = 250000
print("Det tar", år, "år")
```

a) Vi har vekstfaktor $k = 1{,}018$ og setter inn nytt beløp i starten av 2021 og starten av 2022. Denne oppgaven løses ved hjelp av programmering eller regneark. Velger å bruke regneark og får at beløpet på slutten av 2022 er 31 093 kroner.

	A	B	C
1	Årlig innskudd:	kr 10 000,00	
2	Rentefot:	1,80 %	
3	Vekstfaktor:	1,018	
4			
5	**Årstall**	**Starten av året**	**Slutten av året**
6	2020	kr 10 000,00	kr 10 180,00
7	2021	kr 20 180,00	kr 20 543,24
8	2022	kr 30 543,24	kr 31 093,02

	A	B	C
1	Årlig innskudd:	10000	
2	Rentefot:	0,018	
3	Vekstfaktor:	=1+B2	
4			
5	**Årstall**	**Starten av året**	**Slutten av året**
6	2020	=B1	=B6*$B$3
7	2021	=$B$1+C6	=B7*$B$3
8	2022	=$B$1+C7	=B8*$B$3

b) I overgangen fra et år til et nytt år vil det hver gang bli et hopp på 10 000 i funksjonsverdien så den er ikke kontinuerlig der. Vi ser for eksempel at

$$\lim_{x \to 1^-} B(x) = 10\,180$$

mens

$$\lim_{x \to 1^+} B(x) = 20\,180$$

c) Jeg lager programmet og kjører det

```python
rentefot = 1.8
innskudd = 10000
K = 250000

vekstfaktor = 1 + rentefot/100       # Regner ut vekstfaktoren
sum = innskudd                       # Holder greie på beløpet på kontoen
år = 0                               # Teller antall år

while sum < K:
    sum = sum * vekstfaktor+innskudd # Legg til renter og sett inn nytt innskudd for hvert år
    år = år + 1                      # Øk antall år med 1 for hver gang while-løkken kjøres.

print(f"Det tar {år} år for beløpet på kontoen er minst {K} kroner")
print(f"Etter {år} år er beløpet vokst til {sum: .2f} kroner")
```

```
Det tar 20 år for beløpet på kontoen er minst 250000 kroner
Etter 20 år er beløpet vokst til  252480.67 kroner
```

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- gjøre rede for og **argumentere for om en funksjon er kontinuerlig eller diskontinuerlig i et punkt i et definisjonsområde**, og gi **eksempler på anvendelser av funksjoner som ikke er kontinuerlige**
- utforske og gjøre rede for egenskapene ved **potenser** og logaritmer, og gi **eksempler på reelle anvendelser av disse egenskapene**

Eleven må forstå problemstillingen i oppgaven og utvikle en framgangsmåter for å løse problemet. Dette innebærer å bryte ned et problem i delproblemer som kan løses systematisk. Videre innebærer det å bruke digitale verktøy på en hensiktsmessig måte.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven klarer å beregne beløpene Halvor har i banken, men klarer ikke gjøre rede for diskontinuitetene til funksjonen.	Eleven beregner beløpet på kontoen ved utgangen av 2022 på en ryddig måte, og oppdager diskontinuitetene. Eleven beskriver en algoritme for beregningen i c), men har mangler eller unøyaktigheter i koden.	Eleven løser oppgaven riktig og argumenterer riktig for diskontinuitetene. Koden i oppgave c) er korrekt, godt organisert og oversiktlig.

Oppgave 2

I et spill skal du kaste to terninger. Du vinner dersom minst en av de to terningene viser fem eller seks øyne.

Bruk simuleringer til å bestemme sannsynligheten for å vinne i dette spillet.

Kommandoen **randint(1,6)** som ligger i biblioteket random simulerer et terningkast.

Jeg lager en løkke som gjentas N ganger. For hver gang løkken gjentas, simuleres to terningkast og det gjøres en sjekk om minst ett av dem gir 5 eller større. I så fall har vi et gunstig utfall. For hvert gunstig utfall, økes en teller med 1. Når løkken er ferdig, ser vi på relativfrekvensen $\frac{gunstige}{N}$. Når N er stor, er denne et mål for sannsynligheten. Ved å kjøre programmet flere ganger, ser jeg at jeg får samme resultat når $N = 1\,000\,000$. Dette viser at vi har en tilstrekkelig stor N.

```python
from random import randint
N = 1000000
teller = 0
for i in range(N):
    a = randint(1, 6)
    b = randint(1, 6)
    if a >= 5 or b >= 5:
        teller = teller + 1

p = teller/N
print(f"Sannsynligheten for at du får minst 5 på en terningene er {p:.3f}")
```

```
Sannsynligheten for at du får minst 5 på en terningene er 0.556
```

Sannsynligheten for å vinne i dette spillet er 0,556

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **bruke digitale verktøy til å simulere og utforske utfall i stokastiske forsøk**, og forstå begrepet stokastiske variabler

Eleven må forstå problemstillingen i oppgaven og designe en simulering. Eleven må dessuten ha forståelse for begrepet sannsynlighet og knytte det til relativ frekvens og store talls lov.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven forklarer at man skal gjøre mange terningkast og se på relativfrekvens, men klarer ikke å lage en kode som virker.	Eleven lager et program som har en gjennomtenkt struktur og som virker.	Eleven lager et program som gir ønsket resultat. Programmet er oversiktlig og viser god forståelse for algoritmisk tenkning. Eleven argumenterer for at antallet forsøk er stort nok til å gi svar på problemet.

Oppgave 3

Et bakeri baker og selger et populært brød. Tabellen nedenfor viser sammenhengen mellom antall bakte brød per dag og hvor mye det koster å bake brødene.

Antall brød	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275
Kostnader (kroner)	650	780	1000	1150	1400	1700	2000	2400	2830	3300

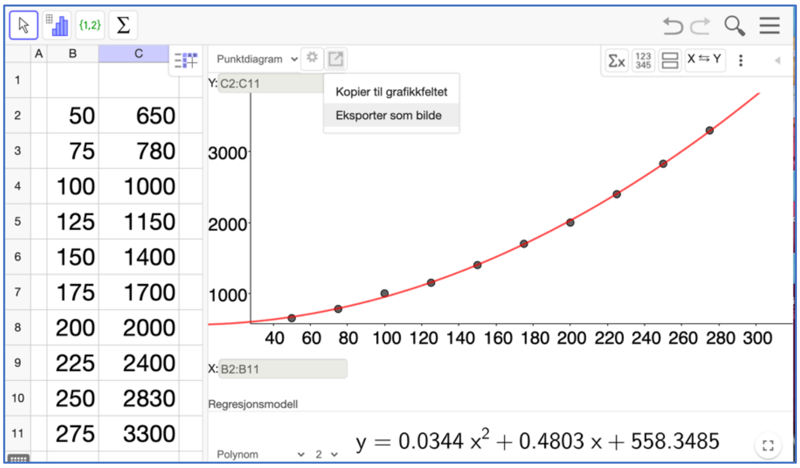
Utsalgsprisen per brød settes til 27 kroner.

a) Bruk blant annet tallene i tabellen til å lage en modell for overskuddet til bakeriet dersom de baker og selger x brød per dag.

b) Bruk modellen fra oppgave a) til å bestemme hvor mange brød de må bake og selge hver dag for at overskuddet skal bli størst mulig. Hvor stort blir dette overskuddet?

a) For å bestemme overskuddsfunksjonen O må vi finne kostnadsfunksjonen K og inntektsfunksjonen I.

For å bestemme kostnadsfunksjonen bruker vi regresjon på tallene i tabellen. De passer godt med en andregradsfunksjon, og dette er også en vanlig modelltype når vi snakker om kostnader.



En god modell K for kostnadene er

$$K(x) = 0{,}0344x^2 + 0{,}480x + 558 \quad , \quad x \geq 0$$

Modellens begrensning oppover er ikke så lett å bestemme. Siden brødene koster 27 kroner per stykk, vil inntekstfunksjonen I være gitt ved

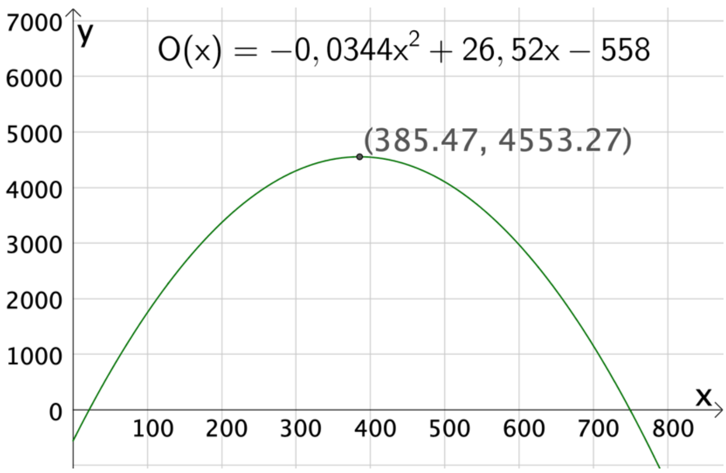
$$I(x) = 27 \cdot x \quad , \quad x \geq 0$$

Dette gir at

$$\begin{aligned} O(x) &= I(x) - K(x) \\ &= 27x - (0{,}0344x^2 + 0{,}480x + 558) \\ &= -0{,}0344x^2 + 26{,}52x - 558 \end{aligned}$$

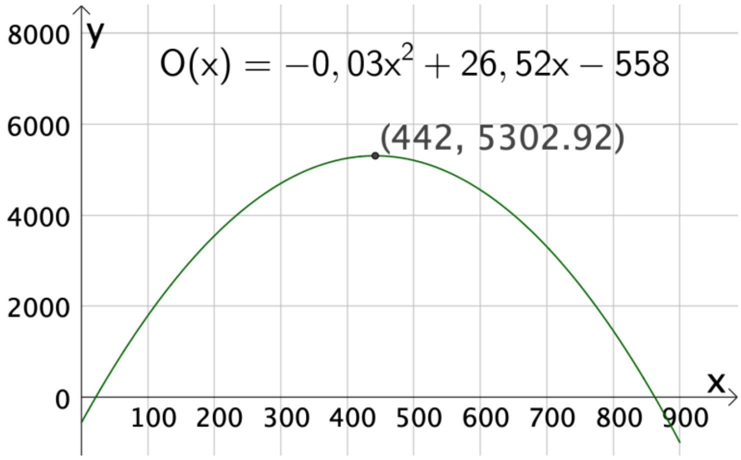
er en god modell for bedriftens overskudd per dag, som funksjon av antall produserte og solgte brød.

b) Vi tegner grafen til O og bestemmer toppunktet. Overskuddet blir størst når de produserer 385 brød per dag. Overskuddet blir da ca. 4550 kroner.



Kommentarer

I denne oppgaven blir det stor forskjell på om vi tar med de to siste desimalene i andregradsleddet eller ikke. Dersom eleven bruker at $K(x) = 0{,}03x^2 + 0{,}48x + 558$, så vil resultatet bli betydelig annerledes. Overskuddsfunksjonen vil da få følgende graf:



Vi ser at vi her får et helt annet resultat. Elever som har gjort dette, har likevel vist god kompetanse i modellering og kan få full uttelling.

Oppgaven tester først og fremst elevens modelleringskompetanse og ferdigheter i å bruke digitale verktøy. Følgende kompetansemål fra læreplanen kan være aktuelt (avhengig av løsningsmetode) for denne oppgaven:

- anvende derivasjon til å analysere og tolke egne matematiske modeller av reelle datasett

Eleven må i denne oppgaven skal eleven lese en matematisk tekst og forstå den. Eleven må selv velge regresjonsmodell for kostnadsfunksjonen og dessuten kombinere denne med en inntektsfunksjon for å bestemme overskuddsfunksjonen. I en god løsning av oppgaven viser eleven kompetanse særlig knyttet til kjerneelementene *Anvendelser og modellering* og *Representasjon og kommunikasjon*.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven lager et funksjonsuttrykk for kostnadsfunksjonen ved hjelp av regresjon.	Eleven utfører regresjon for å bestemme modell for kostnadsfunksjonen. Eleven lager overskuddsfunksjon, bestemmer riktig ekstremalpunkt til denne.	Eleven utfører regresjon for å bestemme modell for kostnadsfunksjonen og lager en modell for overskuddsfunksjonen. Eleven bestemmer riktig ekstremalpunkt og kommuniserer løsningene på en god måte.

Oppgave 4

I en S1-gruppe er det 12 gutter og 18 jenter. Seks av elevene skal trekkes ut tilfeldig til muntlig eksamen i faget. Vi lar X være antall jenter som blir trukket ut.

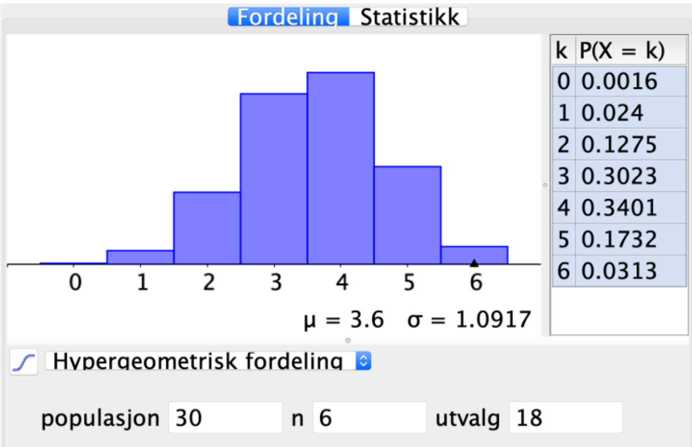
a) Lag en grafisk fremstilling av sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk to ulike strategier til å bestemme sannsynligheten for at det blir trukket ut minst én gutt.

Maya er en av jentene i gruppen.

c) Bestem sannsynligheten for Maya blir trukket ut sammen med 2 andre jenter og 3 gutter.

a) Dette er en hypergeometrisk fordeling. Bruker sannsynlighetskalkulatoren på GeoGebra.

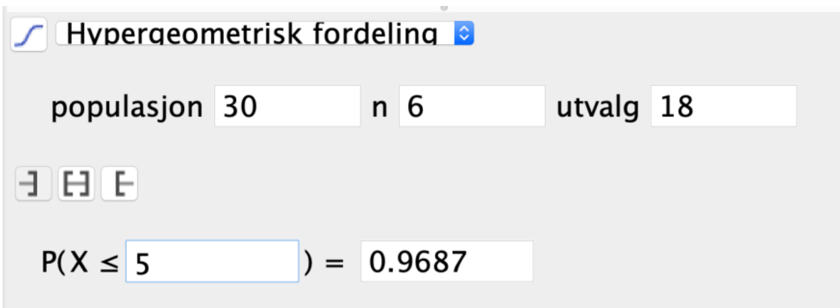


b) Vi kan enten tenke komplement og får da at sannsynligheten for minst en gutt er

$$P(\text{minst en gutt}) = 1 - P(\text{ingen gutter}) \approx 1 - 0{,}0313 = 0{,}9687.$$

Vi kan også regne ut sannsynligheten for mindre enn eller lik 5 jenter

$$P(\text{minst en gutt}) = P(X \leq 5) \approx 0{,}9687$$



c) Vi trekker først ut Maya, så 2 av de 17 jentene og så 3 av de 12 guttene. Jeg regner ut antall gunstige utfall delt på antall mulige.

$$P(Maya + 2J + 3G) = \frac{1 \cdot \binom{17}{2} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{30}{6}} = 0{,}0504$$

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **utforske** og tolke binomiske og **hypergeometriske fordelinger**, og gi eksempler på reelle anvendelser av disse fordelingene
- analysere et problem der sannsynlighet og kombinatorikk inngår, og bruke ulike strategier i problemløsingen

I en god løsning av oppgaven viser eleven kompetanse særlig knyttet til kjerneelementet *Utforsking og problemløsning*.

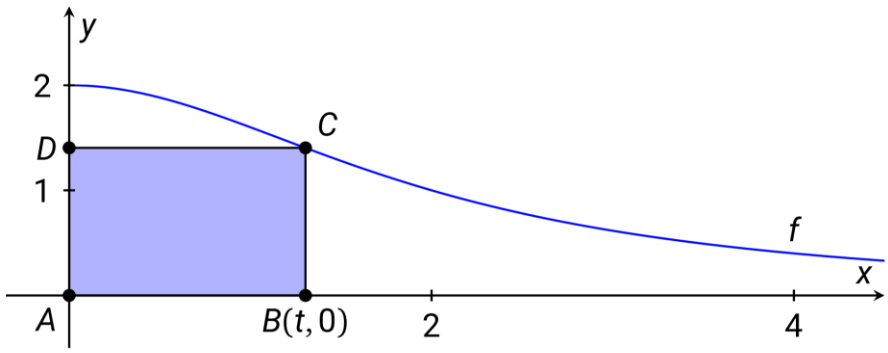
Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven identifiserer at vi har en hypergeometrisk fordeling og klarer å fremstille denne grafisk. Eleven klarer å løse b) ved hjelp av én strategi.	Eleven argumenterer for at vi har et hypergeometrisk forsøk og løser oppgave b) korrekt. Oppgave c) er ufullstendig løst.	Eleven argumenterer for at vi har et hypergeometrisk forsøk og løser oppgavene korrekt. Eleven begrunner løsningene i b) og c) på en god måte.

Oppgave 5

Nedenfor har vi tegnet grafen til funksjonen f gitt ved

$$f(x)=\frac{8}{x^2+4} \quad , \quad x>0$$

Punktene A, B, C og D danner et rektangel. Punktet C ligger på grafen til f, og punktet D ligger på *y*-aksen. Punktet B har *x*-koordinat t. Punktet A ligger i origo.

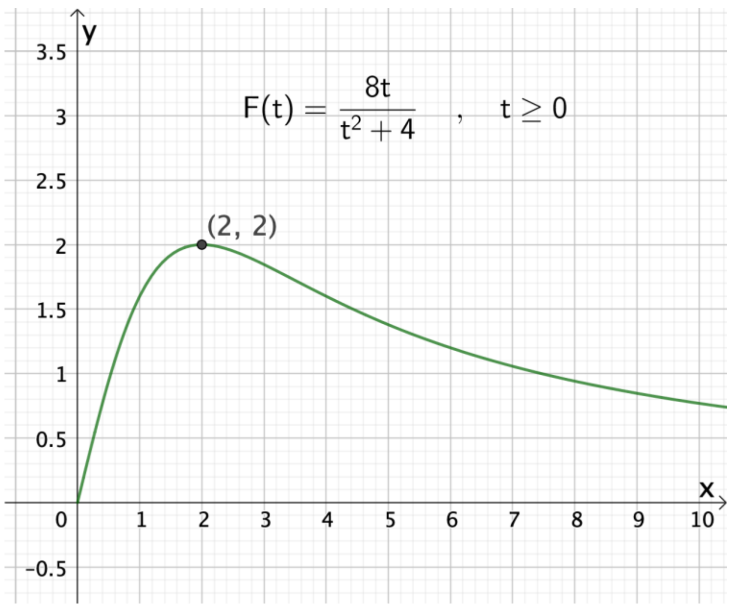


Bestem t slik at arealet til rektangelet $ABCD$ blir størst mulig.

Arealet F av det blå rektangelet er $AB \cdot BC$ der $AB=t$ og $BC=f(t)$. Vi får

$$F(t)=t\cdot f(t)=\frac{8t}{t^2+4} \quad , \quad t\geq 0$$

Jeg finner toppunktet til grafen til *F*. Jeg gjøre dette grafisk og får at $t=2$ gir det største arealet.



Kommentarer

Oppgaven tester først å fremst om eleven kan anvende funksjoner til å løse et optimaliseringsproblem. Oppgavens fokus er først å fremst å kunne sette opp riktig uttrykk for arealet og analysere dette for å svare på problemet. Oppgaven kan løses grafisk eller ved å bruke derivasjon.

Eleven kan vise kompetanse innenfor følgende kompetansemål fra læreplanen:

- anvende derivasjon til å analysere og forstå optimaliseringsproblemer

I denne oppgaven er det først og fremst elevens kompetanse til å løse en sammensatt oppgave som er viktig. I en god løsning av oppgaven viser eleven kompetanse særlig knyttet til kjerneelementet *Representasjon og kommunikasjon*. Siden eleven ikke får oppgitt arealfunksjonen, vil oppgaven også ha et preg av problemløsning.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven kan ha funnet rett arealfunksjon, men viser ikke noen strategier for å finne det største arealet. Det kan også være at eleven har en viss strategi, men klarer ikke å finne arealfunksjonen.	Eleven har vist en strategi for å løse oppgaven, men har ikke klart å gjennomføre strategien på en tilstrekkelig måte. Det kan være at eleven har funnet feil arealfunksjon, feil i beregninger eller mangelfull argumentasjon.	Eleven klarer å løse oppgaven og argumenterer for løsningene på en god måte. Det vil si at arealfunksjonen blir begrunnet og at det argumenteres for hvorfor den søkte *t*-verdien gir størst areal. Dette blir kommunisert på en god måte.

Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+C}$$

der C er en konstant.

a) Finnes det noen verdier for C som gjør at grafen til f har et topp- eller bunnpunkt?

b) Undersøk og bestem hvilke verdier for C som gjør at grafen til f har et vendepunkt.

c) Anta $C>0$. Vis at $f(x+\ln C)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

d) Anta $C<0$. Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

a) Deriverer f og ser at denne alltid har samme fortegn som C. Det vil si at grafen er enten alltid stigende eller alltid synkende. Unntaket er tilfellet $C=0$, men da er $f(x)=1$ en konstantfunksjon. Altså finnes det ingen verdier for C som gjør at grafen til f har topp- eller bunnpunkt.

1	$f(x) := \frac{e^x}{e^x + C}$
2	$f'(x)$ Faktoriser: $\mathbf{e^x \cdot \frac{C}{(C + e^x)^2}}$

b) Dobbeltderiverer f og får $f''(x) = \frac{Ce^x(C-e^x)}{(C+e^x)^3}$.

3	$f''(x)$ Faktoriser: $\mathbf{e^x \, C \, \frac{C - e^x}{(C + e^x)^3}}$

Vi ser at vi har tre tilfeller:

1. $C>0$. I dette tilfellet skifter $f''(x)$ fortegn når $x=\ln C$.
2. $C<0$. I dette tilfellet får vi at funksjonen ikke er definert for $x=\ln(-C)$, siden nevneren da blir 0. Telleren vil alltid være positiv. Den dobbeltderiverte skifter fortegn i $x=\ln(-C)$, men siden denne x-verdien ikke er med i definisjons-mengden, så er ikke dette et infleksjonspunkt.
3. $C=0$. I dette tilfellet er $f(x)=1$ en konstantfunksjon, og grafen har ikke noen vendepunkt.

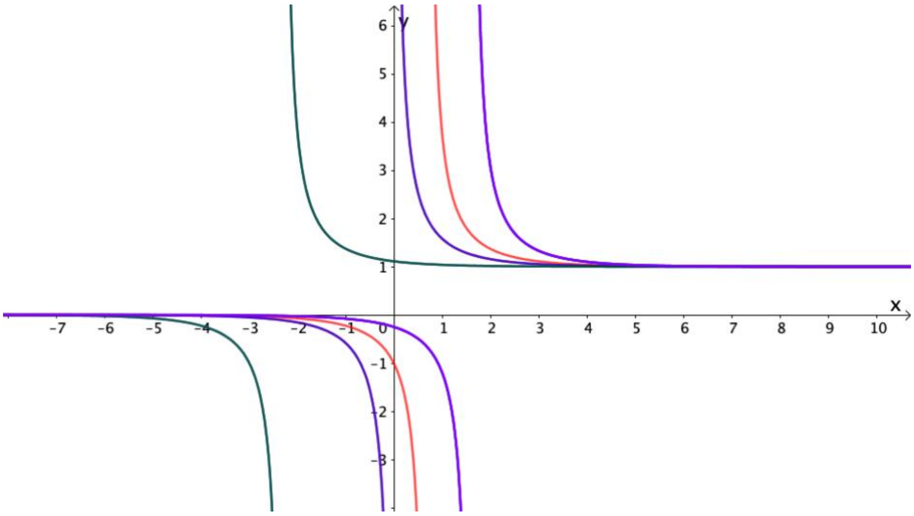
Altså ser vi at grafen har vendepunkt når $C>0$.

c) Vi får $f(x+\ln C) = \frac{e^{x+\ln C}}{e^{x+\ln C}+C} = \frac{e^{\ln C}e^x}{e^{\ln C}e^x+C} = \frac{Ce^x}{C(e^x+1)} = \frac{e^x}{e^x+1}$. Vi kunne også vise dette med GeoGebra:

4	Forenkle(f(x + ln(C))) $\rightarrow \mathbf{\frac{e^x}{e^x + 1}}$

Dette forteller meg at grafen til f er forflyttet $\ln(C)$ enheter til høyre for grafen til $g(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$. (Dersom $0<C<1$ betyr det at grafen flyttes $\ln C$ enheter mot venstre, siden $\ln C$ da er negativ).

d) Jeg ser at dersom $C<0$ vil vi få samme fenomen. Ulike verdier for C vil gi samme form på grafen, men at grafen forflyttes.



I dette tilfellet kan vi sammenlikne grafene med grafen til $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$. Vi har nemlig at $f(x+\ln(-C))=\dfrac{e^{x+\ln(-C)}}{e^{x+\ln(-c)}+C}=\dfrac{-Ce^x}{-Ce^x+C}=\dfrac{e^x}{e^x-1}=h(x)$

Dette forteller meg at grafen til f er forflyttet $\ln(-C)$ enheter til høyre for grafen til $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$. (Dersom $-1<C<0$ betyr det at grafen flyttes $\ln(-C)$ enheter mot venstre, siden $\ln(-C)$ da er negativ).

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **anvende derivasjon til å analysere og tolke** egne matematiske modeller av reelle datasett

- utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger

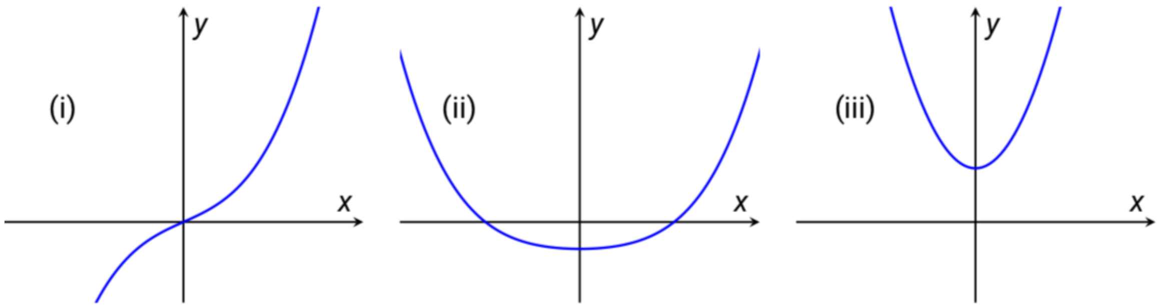
Det første kompetansemålet handler om å anvende derivasjon til å tolke modeller. Dette innebærer at eleven skal kunne bruke derivasjon til å analysere funksjoner. I en modelleringsprosess må eleven kunne gjøre antagelser og forenklinger og på den måten kunne oversette et praktisk problem til et matematisk problem og så kunne løse dette matematiske problemet. I denne oppgaven er fokus på det siste.

Oppgaven tester om eleven kan utforske og finne sammenhenger. I dette tilfellet handler det om formen på en graf og hvordan ulike verdier påvirker grafen. Eleven kan utforske situasjonen ved å bruke for eksempel en glider. På den måten kan eleven finne en sammenheng. En løsning kan ha ulike lag av presisjon, alt fra å beskrive med egne ord hva som skjer når C endres, til å argumentere / bevise resultatet. I en god løsning av oppgaven viser eleven kompetanse særlig knyttet til kjerneelementet *Utforskning og problemløsning*.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven klarer til en viss grad å beskrive sammenhengene i oppgave a) og b).	Eleven klarer å argumentere for de ulike resultatene i a) og b) og beskrive en sammenheng mellom grafen og C.	Eleven klarer å argumentere for de ulike resultatene og klarer å beskrive på en presis måte hva som skjer med grafen for ulike verdier av C.

Oppgave 7

Gitt en funksjon f. Figuren nedenfor viser grafen til f, grafen til f' og grafen til f'' i en bestem rekkefølge.



Argumenter for hvilken av grafene som er grafen til f, hvilken som er grafen til f' og hvilken som er grafen til f''.

Her er en strategi å forsøke seg fram og eliminere.

Dersom (i) er grafen til f ser vi at den er strengt voksende. D må f' være positiv for alle verdier av x, så den må i så fall være (iii). Samtidig ser vi at f har hul side ned for $x<0$ og hul side opp for $x>0$. Dette betyr at f'' må være negativ for $x<0$, dette passer ikke med den gjenværende grafen (ii) så dette kan ikke være riktig.

Dersom (ii) er grafen til f ser vi at den er minkende for $x<0$ og voksende for $x>0$, så f' må være negativ for $x<0$ og positiv for $x>0$ den må i så fall være (i). Samtidig ser vi at f har hul side opp for alle verdier av x, så f'' må være positiv for alle verdier av x. Dette passer med at f'' kan være den gjenværende grafen (iii) så dette kan være riktig.

Dersom (iii) er grafen til f ser vi at den er minkende for $x<0$ og voksende for $x>0$, så f' må være negativ for $x<0$ og positiv for $x>0$ den må i så fall være (i). Samtidig ser vi at f har hul side opp for alle verdier av x, så f'' må være positiv for alle verdier av x. Dette passer ikke med at f'' kan være den gjenværende grafen (ii) så dette kan Ikke være riktig.

Konklusjonen blir at graf (ii) er f, graf (i) er f' og graf (iii) er f''.

Oppgaven kan løses på flere måter. En annen måte å argumentere på, er å observere at graf (ii) ikke kan være grafen til den deriverte til en av de to andre funksjonene. For hvis den var det, så ville funksjonen den er derivert til ha et topp- og et bunnpunkt. Det vil si at figur (ii) er grafen til f. Siden denne har et bunnpunkt, så kan ikke graf (iii) være den deriverte (den er positiv for alle x). Altså må graf (i) være grafen til f'.

Kommentarer

Denne oppgaven stiller høye krav til argumentasjon og forklaring. I en god løsning av oppgaven viser eleven kompetanse særlig knyttet til kjerneelementet *Resonnering og argumentasjon*.

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **forstå begrepene** gjennomsnittlig og momentan vekstfart, grenseverdi og **derivasjon**, og bruke disse for å løse praktiske problemer
- anvende derivasjon til å analysere og forstå optimaliseringsproblemer

Når eleven skal anvende derivasjon til å analysere et optimaliseringsproblem, så innebærer det at eleven kan bruke derivasjon til å drøfte en funksjon. Dette betyr at eleven må kunne tolke den deriverte og den dobbeltderiverte og kunne trekke konklusjoner basert på egenskapene til disse.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven gir ingen eller mangelfulle begrunnelser for løsningen.	Eleven viser en viss forståelse for egenskaper til den deriverte. Argumentasjonen er mangelfull eller har noen feil.	Eleven bruker vesentlige egenskaper til de deriverte og argumenterer på en god måte for den riktige løsningen. Eleven bruker et presist språk i argumentasjonen.