DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1

Bestem grenseverdien

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- bruke ulike strategier for å utforske og **bestemme grenseverdier til funksjoner**, og utforske og argumentere for anvendelser av grenseverdier

Oppgave 2

Vi har gitt vektorene $\vec{a} = [2, -5]$, $\vec{b} = [1, -4]$, $\vec{c} = [-2, 10]$ og $\vec{d} = [4, 1]$

a) Avgjør om noen av vektorer har lik lengde.

b) Avgjør om noen av vektorer står normalt på hverandre.

c) Avgjør om noen av vektorene er parallelle

a) Regner ut lengdene til vektorene:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$
$$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + 10^2} = \sqrt{104}$$
$$|\vec{d}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Vi ser at $\vec{b}$ og $\vec{d}$ har samme lengde.

b) Vi vet at to vektorer står normalt på hverandre hvis og bare hvis skalarproduktet mellom vektorene er 0. Dette gjelder kun for vektorene $\vec{b}$ og $\vec{d}$:

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = [1, -4] \cdot [4, 1] = 4 - 4 = 0$$

c) Vi kan skrive vektorene på formen $k[1, r]$:

$$\vec{a} = 2 \cdot [1, -5/2]$$
$$\vec{b} = [1, -4]$$
$$\vec{c} = -2 \cdot [1, -5]$$
$$\vec{d} = 4 \cdot [1, 1/4]$$

Siden vi vet at $[1, r] \parallel [1, s] \Leftrightarrow r = s$, så kan vi konkludere med at ingen av vektorene er parallelle.

Kommentarer
Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen:

- forstå begrepet vektor og regneregler for vektorer i planet, og bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet

Oppgaven krever også at eleven argumenterer for løsningene.

Oppgave 3

```python
def f(x):
    return x/(1+x**2)

h = 0.0001
x = 0
while (f(x+h)-f(x))/h > 0:
    x = x + 0.01
print("x=", x)
```

En elev har skrevet programkoden ovenfor.

a) Hva ønsker eleven å finne ut?

b) Forklar hva som skjer når programmet kjøres. Hva blir resultatet?

a) Eleven ønsker å finne ut hvor den deriverte til f første gang går fra å være positiv til å være mindre eller lik 0, når x er større eller lik 0.

b) Først blir funksjonen f definert. Her er $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Når programmet kjøres, vil x være 0 i starten. Så sjekker programmet om den gjennomsnittlige vekstfarten i intervallet $[x, x+h]$ er positiv. Siden h er nær null, så vil dette være en god tilnærmet verdi for den deriverte i x. Dersom det er sant, vil x øke med 0,01. Dette fortsetter programmet med så lenge vekstfarten er positiv.

For å finne ut hva som blir resultatet, deriverer jeg f:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Vi ser at den deriverte går fra å være positiv til å være negativ når $x=1$. Programmet skriver ut $x=1$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **forstå begrepene vekstfart**, grenseverdi, **derivasjon** og kontinuitet, og bruke disse for å løse praktiske problemer

I tillegg er også følgende kompetansemål relevant for denne oppgaven:

- **bestemme den deriverte i et punkt** geometrisk, algebraisk og **ved numeriske metoder**, og gi eksempler på funksjoner som ikke er deriverbare i gitte punkter

Eleven må kunne lese og forstå algoritmen i oppgaven. Det vil si at eleven må kunne veksle mellom ulike typer representasjoner. Oppgaven tester også elevens grunnleggende digitale ferdigheter.

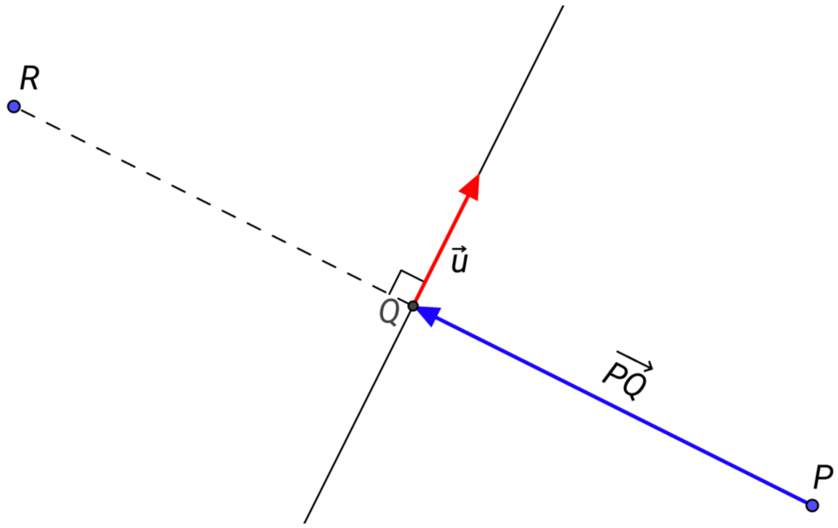
I oppgave b) vil elever som viser forståelse for hva som skjer når programmet kjøres, men ikke regner ut når den deriverte er 0, kunne få uttelling. For å få full uttelling må eleven finne ut når $f'(x)=0$ for $x>0$.

Oppgave 4

Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til punktet vi får når vi speiler $P(6,1)$ om linjen $y = 2x + 4$.

Et generelt punkt på linjen er gitt som $Q(t, 2t+4)$. Linjen har retningsvektor $\vec{u} = [1, 2]$. Finner først en verdi for t slik at $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u}$:

$$\overrightarrow{PQ} = [t-6, 2t+3]$$
$$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$



Vi får

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t - 6 + 4t + 6 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t = 0$$

Lar vi R være punktet vi får når vi speiler P om linjen, så må

$$\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ} = 2 \cdot [-6, 3] = [-12, 6]$$

Dette gir oss

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = [6,1] + [-12, +6] = [-6, 7]$$

Vi ser at koordinatene til punktet vi får når vi speiler $P(6,1)$ om linjen er $R(-6,7)$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **anvende parameterframstillinger til linjer** og bruke parameterframstillinger til å løse naturvitenskapelige problemer
- forstå begrepet vektor og **regneregler for vektorer** i planet, og **bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet**

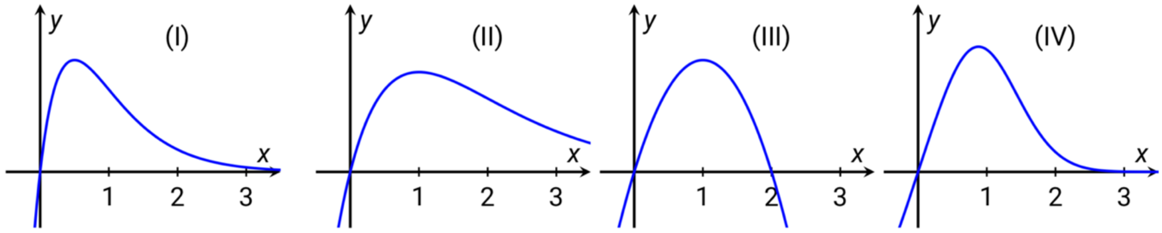
Oppgaven stiller krav til elevens problemløsningskompetanse i tillegg til å kunne argumentere for egne løsninger.

Oppgave 5

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4x \cdot e^{-x}$$

En av grafene nedenfor er grafen til f.
Begrunn hvilken av grafene nedenfor som er grafen til f.



Jeg vet at $e^{-x} > 0$ for alle verdier av x. Funksjonen f har derfor kun ett nullpunkt, $x = 0$. Dette utelukker graf III. Deriverer f får å se etter ekstremalpunkt.

$$f'(x) = 4e^{-x} - 4xe^{-x} = 4(1-x)e^{-x}$$

Vi ser at $f'(x)$ skifter fortegn når $x = 1$. Det utelukker graf I, og muligens graf IV (litt vanskelig å se om ekstremalpunktet er $x = 1$). Dobbeltderiverer for å finne eventuelle vendepunkt.

$$f''(x) = -4e^{-x} - 4(1-x)e^{-x} = -4(2-x)e^{-x}$$

Vi ser at den dobbeltderiverte skifter fortegn i $x = 2$. Det vil si at det er et vendepunkt der. Det er kun graf II som har vendepunkt i $x = 2$.

Det er graf II som er grafen til f.

Kommentarer

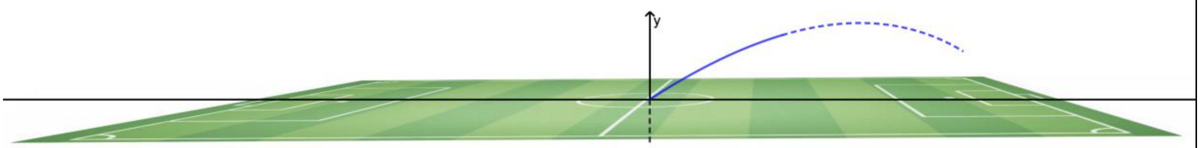
Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon
- utforske, **analysere og derivere ulike funksjoner** og deres omvendte funksjoner, og **gjøre rede for egenskaper til** og sammenhenger mellom slike **funksjoner**

I tillegg må eleven kunne veksle mellom ulike representasjoner av funksjoner. Oppgaven krever også at elevene viser kompetanse i å argumentere og kommunisere.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1



En fotballspiller tok et frispark. Han sparket ballen i retning av motstandernes mål. Ballens posisjon t sekunder etter at frisparket ble tatt er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = \left[28t - 3t^2,\ 10t - 5t^2\right]$$

Enheten langs aksene er meter.

a) Bestem banefarten ballen fikk da den ble sparket.

b) Hvor lang tid tok det fra ballen ble sparket til den traff bakken?

c) Bestem ballens banefart da den var i sitt høyeste punkt.

a) Jeg bruker GeoGebra:

1	$r(t) := (28\ t - 3\ t^2, 10\ t - 5\ t^2)$
2	Banefarten da ballen ble sparket:
3	$\lvert r'(0) \rvert$ $\approx$ **29.732**

Vi ser at banefarten var ca. 30 m/s da ballen ble sparket.

b) Bestemmer t slik at y-koordinaten til $\vec{r}(t)$ blir 0:

4	$y(r(t)) = 0$ Løs: $\{t = 0, t = 2\}$

Vi ser at det tok ca. 2,0 sekunder.

c) Finner først når ballen var på sitt høyeste punkt. Det er når y-koordinaten har sin største verdi.

5	$y(r(t))$ $\rightarrow\ -5t^2 + 10t$
6	$5 Derivert: $-10t + 10$
7	$6 Løs: $\{t = 1\}$
8	$\lvert r'(1)\rvert$ $\approx\ 22$

Vi ser at banefarten var 22 m/s når ballen var på sitt høyeste punkt.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- anvende parameterframstillinger til linjer og **bruke parameterframstillinger til å løse naturvitenskapelige problemer**

For å løse oppgaven, må eleven kunne tolke de naturvitenskapelige spørsmålene og oversette disse til matematiske problem, kunne løse dem og tolke svaret.

Det er kommet noen kommentarer til oppgaven, der det stilles spørsmål ved om det er innenfor læreplanens rammer å bruke parameterframstillinger til kurver som ikke er linjer. Kulepunktet ovenfor består av to ledd. Det første handler om linjer uavhengig av kontekst. Det andre leddet handler om parameterframstillinger generelt i en naturvitenskapelig kontekst.

Oppgave 2

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^4 - b \cdot x^3 + 2\ ,\quad D_f = [-3, \rightarrow\rangle$$

For hvilke verdier av b har f en omvendt funksjon?

For at f skal ha en omvendt funksjon må f være strengt voksende i definisjonsmengden. Den deriverte er $f'(x) = 4x^3 - 3bx^2 = x^2(4x - 3b)$. Vi ser at $x = 0$ er et terrassepunkt, med mindre det sammenfaller med det andre kritiske punktet som er $x = 3b/4$. Vi må med andre ord ha at $3b/4 \leq -3 \Leftrightarrow b \leq -4$. Altså har f en omvendt funksjon hvis og bare hvis $b \leq -4$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **utforske, analysere og derivere ulike funksjoner og deres omvendte funksjoner**, og gjøre rede for egenskaper til og sammenhenger mellom slike funksjoner

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven viser noe forståelse for hva det vil si at en funksjon har en omvendt funksjon, men klarer ikke å bestemme riktige verdier for b.	Eleven viser forståelse for når en funksjon har en omvendt funksjon og argumenterer ut fra grafen til f, for eksempel med en glider.	Eleven viser forståelse for når en funksjon har en omvendt funksjon og argumenterer på en god måte ut fra monotoniegen-skapene til funksjonen.

Oppgave 3

En sirkel C kan beskrives ved å oppgi sentrum $S(a, b)$ og radius r.

a) Beskriv en algoritme som du kan bruke til å avgjør om et gitt punkt $P(s, t)$ ligger på, inni eller utenfor sirkelen C.

b) Skriv en kode basert på algoritmen fra oppgave a). Input skal være a, b, r, s og t. Output skal være en av følgende tekster:

- Punktet ligger innenfor sirkelen
- Punktet ligger på sirkelen
- Punktet ligger utenfor sirkelen

a) Input er a,b,r,s,t.
Jeg regner først ut kvadratet av avstanden mellom P og S.
Hvis denne avstanden er mindre enn r^2, så skriver jeg ut teksten «Punktet ligger innenfor sirkelen.»
Hvis avstanden er lik r^2, skriver jeg ut «Punktet ligger på sirkelen».
Ellers skriver jeg ut «Punktet ligger utenfor sirkelen»

b) Koden ser slik ut:

```
a, b = 1, 2   # Senstrum i sirkelen
r = 3         # radius til sirkelen
s, t = 2, 1   # Koordinater til punket P

# kvadratet av avstanden er d:
d = (a-s)**2 + (b-t)**2

if d < r**2:
    print("Punktet ligger innenfor sirkelen")
elif d == r**2:
    print("Punktet ligger på sirkelen")
else:
    print("Punktet ligger utenfor sirkelen")
```

Kommentar

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- forstå begrepet vektor og regneregler for vektorer i planet, og **bruke vektorer til å beregne ulike størrelser i planet**

Oppgaven stiller krav til kompetanse i algoritmisk tenkning og generalisering. Eleven må kunne regne ut avstander i planet og bruke disse i betingelser i en algoritme.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven beskriver til en viss grad en algoritme som kan fungere, men klarer ikke å lage en kode som svarer til algoritmen.	Eleven beskriver en algoritme som gir ønsket resultat, men koden inneholder feil eller mangler.	Eleven lager en riktig beskrivelse av algoritmen og lager en oversiktlig kode der det brukes variabler og betingelser på en god måte.

Oppgave 4

Temperaturen i en kopp kaffe blir målt hvert fjerde minutt. Temperaturen i rommet der koppen står er $21{,}2\ ^\circ\text{C}$. Resultatet av målingene er vist i tabellen nedenfor.

Tid (minutt)	0	4	8	12	16
Temperatur ($^\circ$C)	70	53	42	35	30

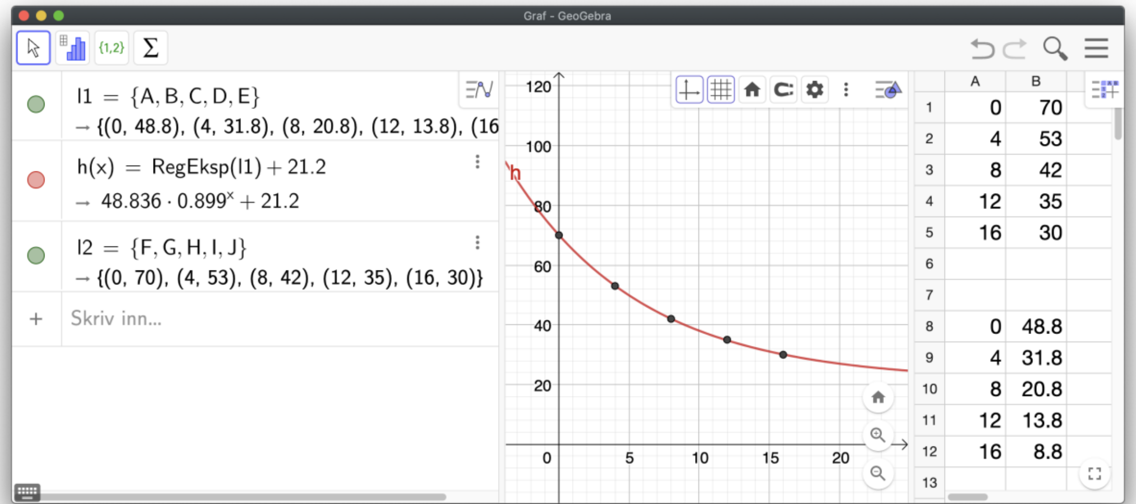
En elev har brukt et digitalt verktøy og kommet fram til følgende regresjonsmodeller ut fra tallene i tabellen:

$$f(x) = -2{,}45x + 65{,}6$$
$$g(x) = 0{,}13x^2 - 4{,}45x + 70$$
$$h(x) = 21{,}2 + 49 \cdot e^{-0{,}11x}$$

a) Vis hvordan eleven kan ha kommet fram til modellen h.

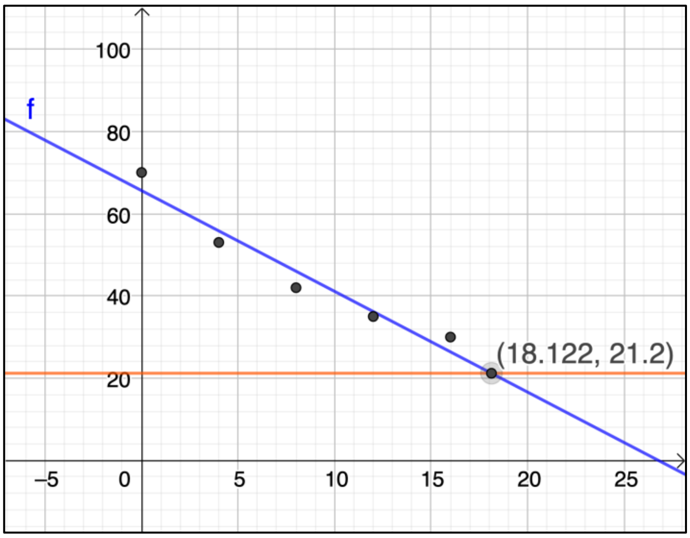
b) Vurder gyldighetsområdet til de ulike modellene ut fra den praktiske situasjonen.

a) Jeg bruker GeoGebra:

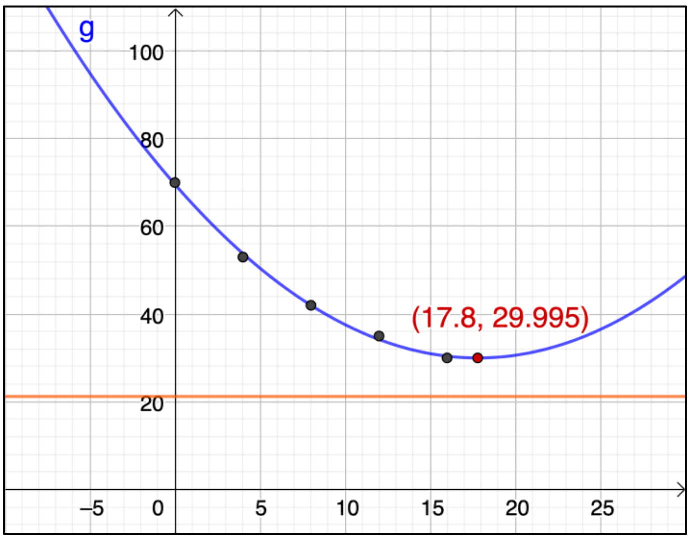


Jeg førte inn tallene i regnearket og laget to lister med punkt. Den ene er laget ut fra tallene i tabellen. I den andre listen har jeg trukket fra 21,2. Dette har jeg gjort fordi jeg tenker at temperaturen vil gå mot romtemperaturen. Trekker jeg fra 21,2 grader, så vil jeg få en funksjon som går mot 0 når tiden går. Bruker derfor RegEksp på disse punktene. Så legger jeg til 21,2 til denne modellen og får h.

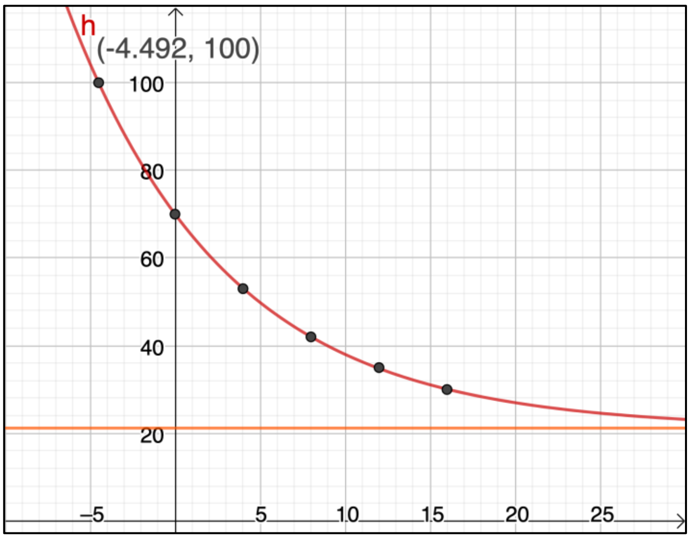
b) Den lineære modellen passer sånn noenlunde med tallene innenfor målepunktene, men stemmer ikke noe særlig utenfor disse. Vi ser for eksempel at etter litt over 18 minutt vil temperaturen i koppen bli lavere en romtemperaturen.



Andregradsfunksjonen passer bedre med tallene, men også denne har kun et gyldighetsområde begrenset av punktene vi har målt. Straks vi kommer over 18 minutt vil denne modellen gi at temperaturen i koppen stiger igjen. Det kan jo ikke stemme. Seks minutter før målepunktene vil temperaturen være over 100 grader. Det kan heller ikke stemme.



Modellen h stemmer bra både innenfor de målte verdiene og når tiden går. Her må vi selvsagt anta at romtemperaturen er konstant og at koppen får stå i fred. Også denne har problemer når vi ser på negative tider. Vi ser at om vi går lenger enn ca. 4,5 minutt bak i tid, så vil temperaturen i koppen bli over kokepunktet. Det går jo ikke. Gyldighetsområdet er med andre ord fra koppen ble satt ut og framover i tid.



Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- modellere og analysere eksponentiell og logistisk vekst i reelle datasett

I tillegg krever oppgaven kompetanse innenfor kjerneelementet *Anvendelser og modellering*.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven viser grafisk at modellen passer bra med punktene, men klarer ikke å vise hvordan vi kan komme fram til modellen ved hjelp av regresjon. Eleven har noen enkle, men mangelfulle betraktninger om gyldighetsområdene.	Eleven klarer å komme fram til modellen ved hjelp av regresjon og sier noe om gyldighetsområdet til de ulike modellene.	Eleven klarer å komme fram til modellen ved hjelp av regresjon og kommuniserer dette på en god måte. Eleven klarer også å argumentere godt for gyldighetsområdet til de ulike modellene.

Oppgave 5

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=\begin{cases}2x^2+3x+a\ , & x<1\\ -2x^2+b\cdot x\ , & x\geq 1\end{cases}$$

a) Bestem a og b slik at f blir deriverbar i $x=1$

b) Avgjør om grafen til f har vendepunkt.

a) For at en funksjon skal være deriverbar, må den også være kontinuerlig.

Kontinuitet gir oss: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$. Det vil si at $5+a=-2+b$.

Den deriverte er (når $x\neq 1$):

$$f'(x)=\begin{cases}4x+3\ , & x<1\\ -4x+b\ , & x>1\end{cases}$$

Deriverbarhet gir oss $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)$. Det vil si at $7=-4+b \Leftrightarrow b=11$. Setter vi dette inn i den første likningen (fra kontinuitet), får vi $a=-2+11-5=4$.

Altså må $a=4$ og $b=11$ for at funksjonen skal være deriverbar i $x=1$.

b) Den dobbeltderiverte er (når $x\neq 1$):

$$f''(x)=\begin{cases}4, & x<1\\ -4, & x>1\end{cases}$$

Vi ser at den dobbeltderiverte skifter fortegn i $x=1$. For at punktet $(1,f(1))$ skal kalles et vendepunkt, må grafen være sammenhengende og ha en tangent i punktet. Det vil si at $a=4$ og $b=11$, slik vi fant i oppgave a). Grafen til f har vendepunkt når $a=4$ og $b=11$.

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **forstå** begrepene vekstfart, **grenseverdi, derivasjon og kontinuitet**, og bruke disse for å løse praktiske problemer
- **analysere** og tolke ulike **funksjoner ved å bruke derivasjon**

Oppgaven tester om eleven forstår begrepene deriverbarhet og vendepunkt. For å kunne svare på spørsmålene, må eleven kunne regne ut ensidige grenser, løse likningssett og kunne avgjøre om $(1,f(1))$ er et vendepunkt. I oppgave b) er det ikke spesifisert hvilke verdier a og b skal ha. Det er en vanlig konvensjon å kreve at funksjonen skal være kontinuerlig i punktet og ha en tangent i punktet. Oppgaven burde ha presisert i oppgave b) at spørsmålet gjelder for de to verdiene eleven fant i oppgave a).

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven viser en viss forståelse for deriverbarhet, men klarer ikke regne ut de riktige tallene.	Eleven klarer å sette opp riktige likninger og løser disse. Eleven viser en viss forståelse for begrepene deriverbarhet og /eller vendepunkt.	Eleven viser god kompetanse i symbol- og formalisme. Eleven løser oppgavene korrekt og argumenterer ut fra definisjon på deriverbarhet og vendepunkt.

Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+C}$$

der C er en konstant.

a) Finnes det noen verdier for C som gjør at grafen til f har et topp- eller bunnpunkt?

b) Undersøk og bestem hvilke verdier for C som gjør at grafen til f har et vendepunkt.

c) Anta $C>0$. Vis at $f(x+\ln C)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

d) Anta $C<0$. Beskriv hvordan grafen til f påvirkes når verdien til C endres.

a) Deriverer f og ser at denne alltid har samme fortegn som C. Det vil si at grafen er enten alltid stigende eller synkende. Unntaket er tilfellet $C=0$, men da er $f(x)=1$ en konstantfunksjon. Altså finnes det ingen verdier for C som gjør at grafen til f har topp- eller bunnpunkt.

1	$f(x) := \dfrac{e^x}{e^x+C}$
2	$f'(x)$ Faktoriser: $\mathbf{e^x \cdot \dfrac{C}{(C+e^x)^2}}$

b) Dobbeltderiverer f og får $f''(x)=\frac{Ce^x(C-e^x)}{(C+e^x)^3}$.

3	$f''(x)$
	Faktoriser: $\mathbf{e^x\, C\, \frac{C-e^x}{(C+e^x)^3}}$

Vi ser at vi har tre tilfeller:

1. $C>0$. I dette tilfellet skifter $f''(x)$ fortegn når $x=\ln C$.
2. $C<0$. I dette tilfellet får vi at funksjonen ikke er definert for $x=\ln(-C)$, siden nevneren da blir 0. Telleren vil alltid være positiv. Den dobbeltderiverte skifter fortegn i $x=\ln(-C)$, men siden denne x-verdien ikke er med i definisjonsmengden, så er ikke dette et infleksjonspunkt.
3. $C=0$. I dette tilfellet er $f(x)=1$ en konstantfunksjon, og grafen har ikke noen vendepunkt.

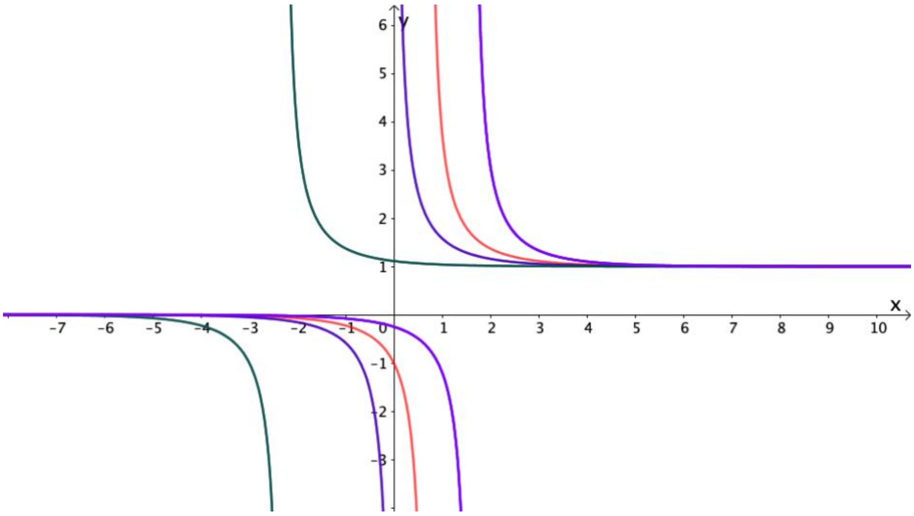
Altså ser vi at grafen har vendepunkt når $C>0$.

c) Vi får $f(x+\ln C)=\frac{e^{x+\ln C}}{e^{x+\ln C}+C}=\frac{e^{\ln C}e^x}{e^{\ln C}e^x+C}=\frac{Ce^x}{C(e^x+1)}=\frac{e^x}{e^x+1}$. Vi kunne også vise dette med GeoGebra:

4	Forenkle(f(x + ln(C)))
	$\rightarrow \mathbf{\frac{e^x}{e^x+1}}$

Dette forteller meg at grafen til f er forflyttet $\ln(C)$ enheter til høyre for grafen til $g(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$. (Dersom $0<C<1$ betyr det at grafen flyttes $\ln C$ enheter mot venstre, siden $\ln C$ da er negativ).

d) Jeg ser at dersom $C<0$ vil vi få samme fenomen. Ulike verdier for C vil gi samme form på grafen, men at grafen forflyttes.



I dette tilfellet kan vi sammenlikne grafene med grafen til $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$. Vi har nemlig at $f(x+\ln(-C))=\dfrac{e^{x+\ln(-C)}}{e^{x+\ln(-c)}+C}=\dfrac{-Ce^x}{-Ce^x+C}=\dfrac{e^x}{e^x-1}=h(x)$

Dette forteller meg at grafen til f er forflyttet $\ln(-C)$ enheter til høyre for grafen til $h(x)=\dfrac{e^x}{e^x-1}$. (Dersom $-1<C<0$ betyr det at grafen flyttes $\ln(-C)$ enheter mot venstre, siden $\ln(-C)$ da er negativ).

Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- analysere og tolke ulike funksjoner ved å bruke derivasjon
- utforske og forstå regneregler for potenser og logaritmer, og bruke ulike strategier for å løse eksponentialligninger og logaritmeligninger

Oppgaven tester om eleven kan utforske og finne sammenhenger. I dette tilfellet handler det om formen på en graf og hvordan ulike verdier påvirker grafen. Eleven kan utforske situasjonen ved å bruke for eksempel en glider. På den måten kan eleven finne en sammenheng. En løsning kan ha ulike lag av presisjon, alt fra å beskrive med egne ord hva som skjer når *C* endres, til å argumentere / bevise resultatet.

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven klarer til en viss grad å beskrive sammenhengene i oppgave a) og b).	Eleven klarer å argumentere for de ulike resultatene i a) og b) og beskrive en sammenheng mellom grafen og *C*.	Eleven klarer å argumentere for de ulike resultatene og klarer å beskrive på en presis måte hva som skjer med grafen for ulike verdier av *C*.

Oppgave 7

Vi har følgende resultat:

Anta at grafen til en tredjegradsfunksjon f skjærer en linje ℓ i tre punkter med x-koordinater x_1, x_2 og x_3. La $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
Da vil tangenten til grafen til f i punktet $(m, f(m))$ gå gjennom punktet $(x_3, f(x_3))$.

a) Vis at resultatet stemmer for funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 3$$

og linjen $y = 2x - 1$ når $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ og $x_3 = 2$.

La g være en tredjegradsfunksjon. Anta at en linje $y = ax + b$ skjærer grafen til g i $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ og $(x_3, f(x_3))$.

b) Forklar at vi kan skrive g på formen

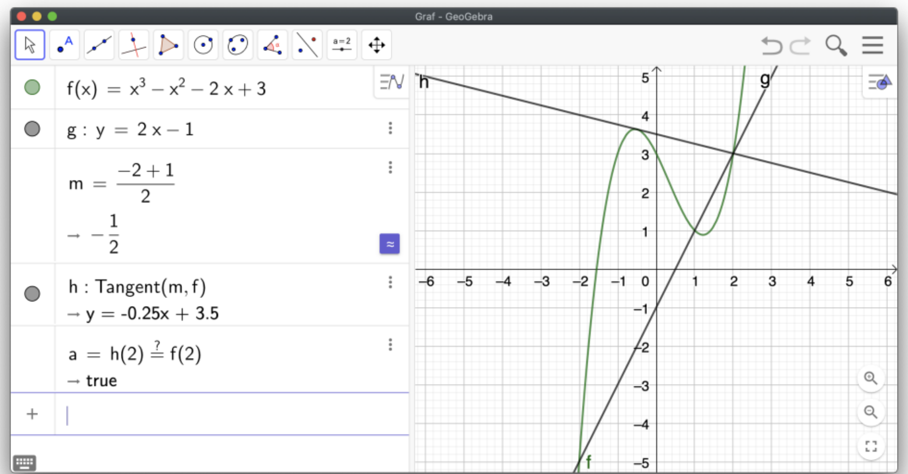
$$g(x) = k(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + (ax + b) \text{, der } k \in \mathbb{R}.$$

c) Vis at tangenten til grafen til g i $m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ går gjennom $(x_3, g(x_3))$.

Gitt funksjonen $h(x) = x^3 - 2x + 1$ og punktet $P(2,5)$. Vi ønsker å tegne en tangent til grafen til h som går gjennom P.

d) Forklar hvordan vi kan bruke linjen $y = 2x + 1$ til å bestemme tangeringspunktet.

a) Jeg bruker GeoGebra:



Vi ser at resultatet stemmer i dette tilfellet.

b) Siden grafen til g skjærer linjen $y = ax + b$ i de tre punkta, så må polynomet $g(x) - (ax+b)$ ha de tre nullpunkta x_1, x_2 og x_3. Det betyr at

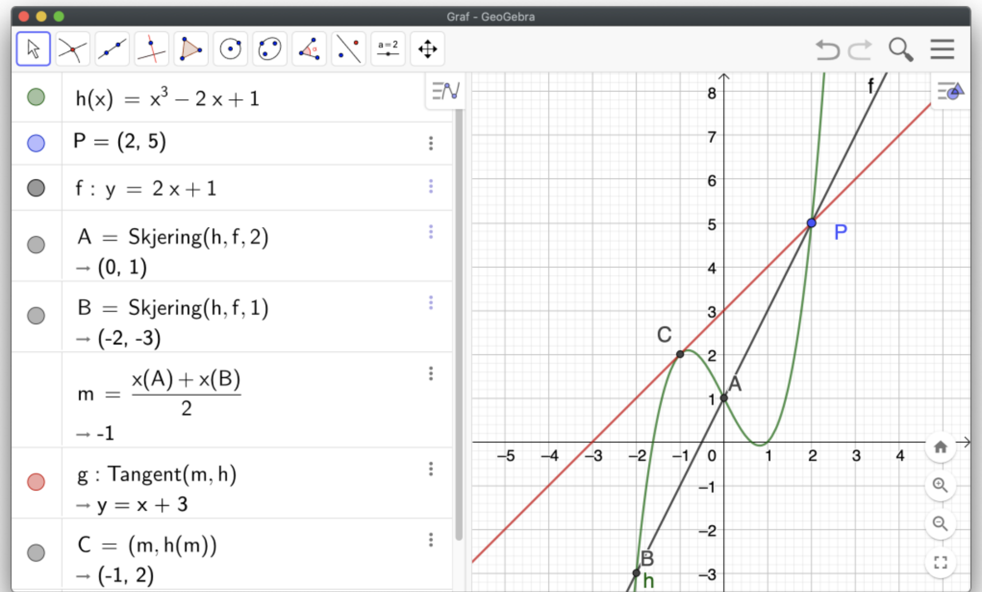
$$g(x) - (ax+b) = k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$
$$\Updownarrow$$
$$g(x) = k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) + ax + b$$

c) Bruker GeoGebra CAS:

1	$g(x) := k\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) + ax + b$
2	$m := \dfrac{x_1 + x_2}{2}$
3	$t(x) := \text{Tangent}(m, g)$
4	$t(x_3) \stackrel{?}{=} g(x_3)$ $\rightarrow$ **true**

Vi ser på linje 4 at resultatet stemmer.

d) Jeg ser at grafen til h skjærer linjen $y = 2x+1$ i tre punkt. Disse har *x*-verdier -2, 0 og 2. Tar vi gjennomsnittet m av de to første *x*-verdiene, får vi at tangenten i punktet $(m, h(m))$ må gå gjennom P. Vi ser at tangeringspunktet er $(-1, 2)$.



Kommentarer

Oppgaven tester følgende kompetansemål fra læreplanen

- **utforske, analysere** og derivere **ulike funksjoner** og deres omvendte funksjoner, og gjøre rede for egenskaper til og sammenhenger mellom slike funksjoner

Oppgaven tester elevens kompetanse til å

- lese og tolke en matematisk tekst
- argumentere og kommunisere
- generalisere
- løse matematiske problem

Lavt nivå	Middels nivå	Høyt nivå
Eleven klarer å vise at resultatet stemmer for funksjonen i oppgave a)	Eleven viser forståelse for resultatet og viser en viss løsningsstrategi for å vise resultatet. Argumentasjonen i oppgave b) kan være mangelfull.	Oppgaven er løst korrekt. Eleven argumenterer godt og har med gode forklaringer.