R1 Eksamen V2022 LK20

Farhan Omar

June 16, 2022

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

a)

$$F(x) = x^3 + \ln x$$
$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$$

b)

$$g(x) = x \cdot e^{2x}$$
$$g'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} \cdot 2$$
$$= e^{2x} + 2 \times e^{2\times} = e^{2x}(1 + 2x)$$

Oppgave 2 (2 poeng)

$$e^{2x} - e^x = 2$$
$$(e^x)^2 - e^x - 2 = 0$$

Vi bruker sum-og-gang metode for å løse andregradsligning i e^x

sum:-1

Gang:-2

$$(e^x + 1)(e^x - 2) = 0$$
$$e^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = -1 \Rightarrow \text{ingen løsning}$$
$$e^x - 2 = 0$$
$$e^x = 2$$
$$lne^x = ln2$$
$$x = ln2$$

Oppgave 3 (1 poeng)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2+x-12} &= \frac{0}{3^2+3-12}=\frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+4)(x-3)}\\ &= \lim_{x\to 3}\frac{1}{x+4}=\frac{1}{3+4}=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

Oppgave 4 (3 poeng)

a)

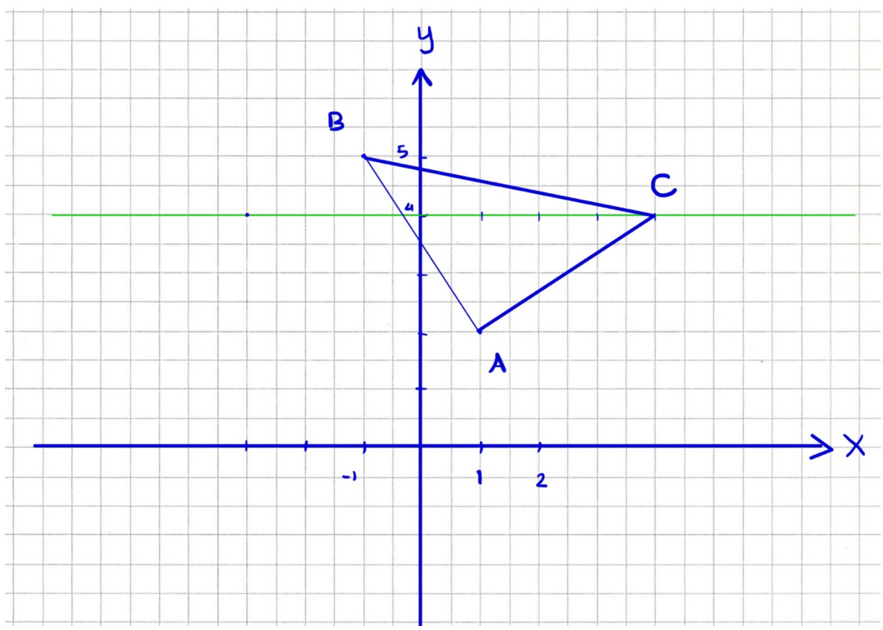

Figure 1

Metode 1:

Vi bruker Pytagoras setning,

$$
\begin{aligned}
(AB)^2 + (AC)^2 &= (BC)^2 \\
AB &= \sqrt{(-1-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \\
AC &= \sqrt{(t-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(t-1)^2 + 4} \\
BC &= \sqrt{(t-(-1))^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(t+1)^2 + 1} \\
13 + (t-1)^2 + 4 &= (t+1)^2 + 1 \\
16 + (t-1)^2 &= (t+1)^2 \\
16 + t^2 - 2t + 1 &= t^2 + 2t + 1 \\
16 &= 4t \\
t &= \frac{16}{4} = 4
\end{aligned}
$$

Metode 2 :

To vektor står vinkelrette på hverandre hvis deres skalarprodukt er null

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\
\overrightarrow{AC} = [t-1, 4-2] = [t-1, 2] \\
\overrightarrow{AB} = [-1-1, 5-2] = [-2, 3] \\
(t-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 0 \\
-2t + 2 + 6 = 0 \\
2t = 8 \\
t = \frac{8}{2} = 4
\end{aligned}
$$

b)

A og B og C ligger på rett linje hvis vektoren $\vec{AB}$ er multippel av vektoren $\vec{BC}$ (altså de er parallelle)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= [t-(-1), 4-5] = [t+1, -1] \\
\overrightarrow{BA} &= k \cdot \overrightarrow{BC} \\
-\overrightarrow{AB} &= k \cdot \overrightarrow{BC} \\
[2, -3] &= k \cdot [t+1, -1] \\
[2, -3] &= [k \cdot t + k, -k] \quad \text{To vektor er like hvis vektorkoordinatene er like} \\
&\Downarrow \\
-k &= -3 \Rightarrow k = 3 \\
kt + k &= 2 \Rightarrow \\
3t + 3 &= 2 \Rightarrow t = \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 5 (4 poeng)

a)

Når programmet kjøres ,skjer dette,

1. Funksjonen f(x) blir definert så blir x=0 og h=0.001 kjørt så while-løkke
2. while-løkke kjøres så lenge betingelsen $f(x) \leq f(x+h)$ er oppfylt.
3. Hver gange x økes med h=0.001 så kjøres løkken på nytt til betingelsen blir brutt (altså

når $f(x) > f(x+h)$). I første og andre runde har vi følgende

$$
\begin{aligned}
&Runde1\\
&\quad x = 0\\
&\quad h = 0,001\\
&\quad f\left(x\right) = \frac{0}{1+\left(0\right)^2} = 0\\
&f\left(x+h\right) = f\left(0+0,001\right) = \frac{0,001}{1+\left(0,001\right)^2} = 0,000999999\\
&\quad f\left(x\right) < f\left(x+h\right)\\
&Rnnde2\\
&\quad x = 0+0,001 = 0,001\\
&\quad f\left(x\right) = 0,000999999\\
&f\left(x+h\right) = f\left(0,001+0,001\right) = f\left(0,002\right) = \frac{0,002}{1+\left(0,002\right)^2} = 0,001999992\\
&\quad f\left(x\right) < f\left(x+h\right)\\
&Runde3\\
&\quad x = 0,002+0,001 = 0,003
\end{aligned}
$$

4. Når løkken ferdig kjørt blir x der betingelsen ikke blir oppfylt printet ut.

Eleven ønsker å finne ut om f(x) har et topppunkt i intervallet $[0, \rightarrow]$ ved å sjekk monotoniegenskapene til f i dette intervallet (når f(x) minker og vokser.)

Vi tester det og får

```
In [14]: def f(x):
             return x/(1+x**2)
         x=0
         h=0.001
         while f(x)<=f(x+h):
             x=x+h
         print(x)

         1.0000000000000007
```

Figure 2

b)

Vi finner topppurket ved å sette den deriverte lik null og får to punkter $x = -1, x = 1$. Siden x begynner fra 0 i programmet så sjekker vi bare $x = 1$. Siden den deriverte er positivt før prunket (f er voksende) og negativt etter punktet (f er avtagende) så $x = 1$ er et topppunkt.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1+x^2} \\
f'(x) &= \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \\
f'(x) &= 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\
f'(0,5) &= \frac{1-(0,5)^2}{\left(1+(0,5)^2\right)^2} = \frac{12}{25} > 0 \\
f'(2) &= \frac{1-(2)^2}{\left(1+(2)^2\right)^2} = \frac{-3}{25} < 0
\end{aligned}
$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (4 poeng)

a)

En funksjon er kontinuerlig hvis grenseverdien eksisterer(grenseverdien fra høyre og venstre må være lik) og er lik funksjonsverdien i punktet

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-}(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(x) \\
2^2 + 1 &= 2 - t \\
5 &= 2 - t \\
t &= -3
\end{aligned}
$$

b)

Her må vi bruker definisjonen av den deriverte, Funksjonen f er gitt ved:

$$
f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 : x < 2 \\ x + 3 : x \geq 2 \end{cases}
$$

Den derivert i et punkt x er definert som,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - 5}{\Delta x} \\
&\Delta x < 0 \Rightarrow \Delta x \Rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) = x^2 + 1 : \\
\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(2+\Delta x) - 5}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(2+\Delta x)^2 + 1 - 5}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta x (4+\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^-} (4+\Delta x) = 4 + 0 = 4 \\
&\Delta x > 0 \Rightarrow 2 + \Delta x > 2 \Rightarrow f(x) = x + 3 \\
\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(2+\Delta x) - 5}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2 + \Delta x + 3 - 5}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} (1) = 1
\end{aligned}$$

Siden de to ensidige grensene er ulike så grensen eksisterer ikke og ikke $f'(2)$ heller og funksjon er da ikke deriverbar i $x = 2$

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$$\begin{aligned}
|\vec{u}|^2 &= \vec{u} \cdot \vec{u} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 \\
&= 4 + 2 \cdot (-3) + 9 = 4 - 6 + 9 = 7 \\
|\vec{u}| &= \sqrt{7} \\
|\vec{v}|^2 &= (\vec{a} - 6\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2 \cdot 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 36\vec{b}^2 \\
&= 4 - 12 \cdot (-3) + 36 \cdot 9 = 364 \\
|\vec{v}| &= \sqrt{364} = 2\sqrt{91}
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\theta \\
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-6\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{a}-6\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2 = 4-5\cdot(-3)-6\cdot 9 = -35 \\
\cos\theta &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-35}{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{91}}\right) = 133,89^\circ
\end{aligned}
$$

Oppgave 3 (3 poeng)

En funksjon har invers hvis den er én-til-én funksjon (altså for hver verdi av x finnes det bare én verdi av y og motsatt vei) og dette kan skje hvis funksjonen er bare voksende eller bare minkende.Vi tegner grafen til $f(x)$ via graftegner og tegner punktet $(1, f(1))$. Vi finner også ekstremalpunkter til f.

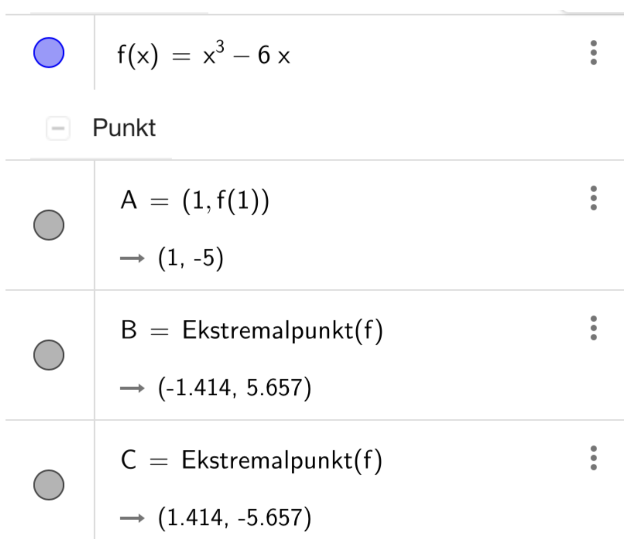

Figure 3

For å finne eksakte verdier for ekstremalpunkter må vi bruke Cas,

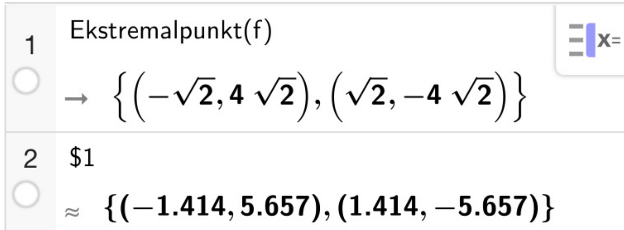

Figure 4

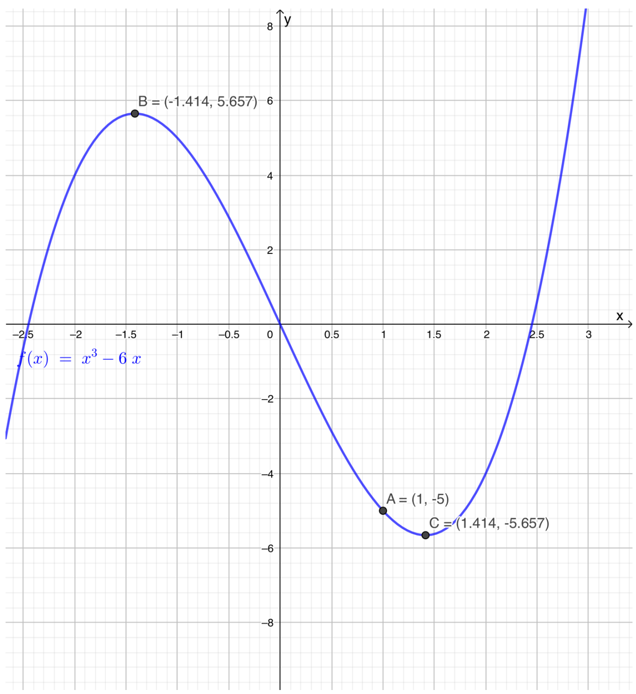

Figure 5

Fra grafen ser vi at det største intervallet som inneholder 1 og der f har invers er $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] = [-1,414, 1,414]$

Oppgave 4 (4 poeng)

Først finner vi konstantene k og r ved å løse et ligningssystem i Cas

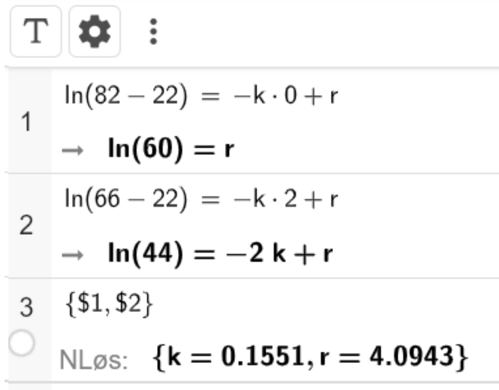

Figure 6

Vi finner T som funksjon av t via Cas

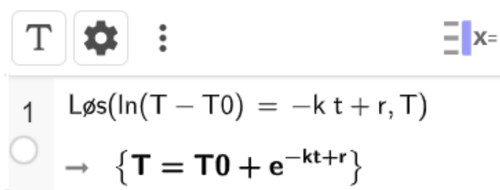

Figure 7

Vi bruker graftegner til å tegne funksjonen. Så tegner vi linjen $y = 40$ og bruker *skjæring mellom to objekt* for å finne skjæringspunktet

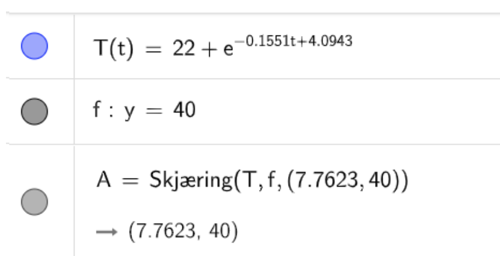

Figure 8

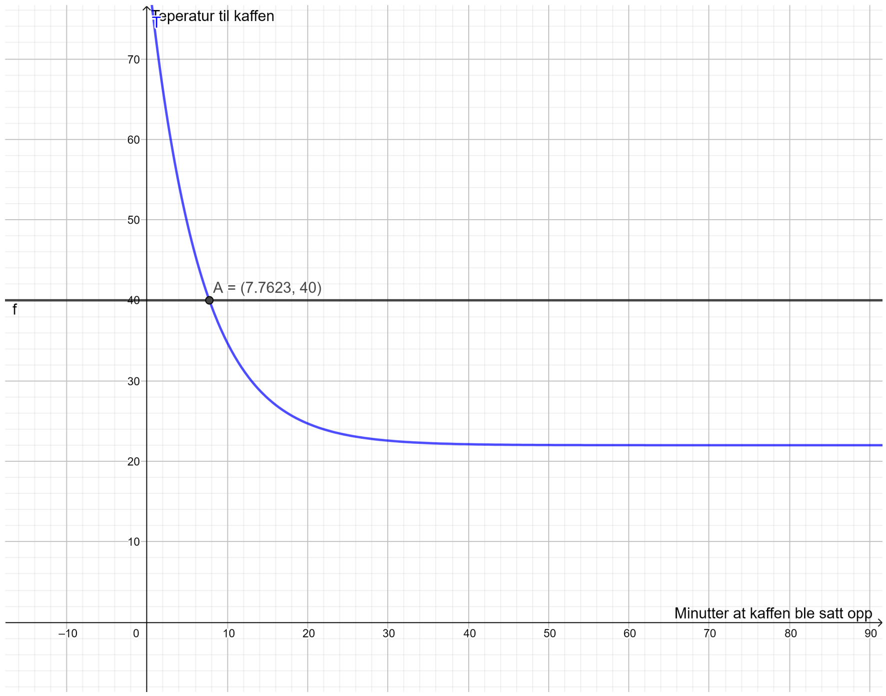

Figure 9

Fra figuren over ser vi at temperaturen vil bli mindre enn $40C^{\circ}$ når $t > 7,7623$ (etter omtrent 8 minutter).

Oppgave 5 (4 poeng)

a)

Metode 1:
En trekant ABC er rettvinklet hvis lengdene oppfyller Pytagoras setning og rettvinkelen kan være $\angle CAB$ eller $\angle ABC$ eller $\angle BCA$ og rettvinkelen er vinkelen som vis a vis hypotenus. Vi må først finne lengden av sidene til trekanten,

$$AB = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$
$$BC = \sqrt{(e-c)^2 + (f-d)^2}$$
$$AC = \sqrt{(e-a)^2 + (f-b)^2}$$

ABC er rettvinklet hvis en av disse er oppfylt,

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow \text{Vinkelen ABC er rett}$$
$$(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2 \Rightarrow \text{Vinkelen BAC er rett}$$
$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2 \Rightarrow \text{Vinkelen ACB er rett}$$

For å unngå problemet med flytt-punkt feil må vi bestemme oss en toleranse istedenfor å kreve eksakt betingelse. Vi deler høyre side på venstre side i alle ligningene å får vi 1 så flytter vi 1 igjen til venstre side og setter en toleranse (f.eks 10^{-5}). Betingelsene da blir:

$$\frac{(AB)^2 + (BC)^2}{(AC)^2} - 1 \leq 10^{-5} \Rightarrow \text{Vinkelen ABC er rett}$$
$$\frac{(AB)^2 + (AC)^2}{(BC)^2} - 1 \leq 10^{-5} \Rightarrow \text{Vinkelen BAC er rett}$$
$$\frac{(AC)^2 + (BC)^2}{(AB)^2} - 1 =\leq 10^{-5} \Rightarrow \text{Vinkelen ACB er rett}$$

Metode2:
En trekant ABC er rettvinklet hvis skalarproduktet av to av vektorene mellom punktene $(\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC})$ er null. ABC er rettvinklet hvis en av disse er oppfylt,

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$$
$$\vec{BC} \cdot \vec{AC} = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

For å unngå problemet med flytt-punkt feil (feil med desimale tall) må vi bestemme oss en toleranse ϵ som må være et tall nært null f.eks $\epsilon = 10^{-5}$. Betingelsene blir,

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} \leq 10^{-5}$$
$$\vec{BC} \cdot \vec{AC} \leq 10^{-5}$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} \leq 10^{-5}$$

b)

Kode for metode 1:

```
In [7]:
a,b = [float(num) for num in input('Skriv koordinatne til A separert med komma:').split(',')] # Ta to input fra brukeren
c,d=[float(num) for num in input('Skriv koordinatne til B separert med komma:').split(',')]
e,f=[float(num) for num in input('Skriv koordinatne til C separert med komma:').split(',')]
AB=np.sqrt((c-a)**2+(d-b)**2) # Lengden av siden AB
BC=np.sqrt((e-c)**2+(f-d)**2)
AC=np.sqrt((e-a)**2+(f-b)**2)
if ((AB**2+BC**2)/AC**2)-1<=10**-5 or (AB**2+AC**2)/BC**2-1<=10**(-5) or (AC**2+BC**2)/AB**2-1<=10**(-5): # Pytagorassetning
    print('Punktene danner en rettvinklet trekant')
else:
    print('Punktene danner ikke en rettvinklet trekant')

Skriv koordinatne til A separert med komma:3,0
Skriv koordinatne til B separert med komma:6,3
Skriv koordinatne til C separert med komma:6,0
Punktene danner en rettvinklet trekant
```

Figure 10

Kode for metode 2:

```
In [8]: import numpy as np
def RettvinkletTrekant2(a,b,c,d,e,f): # Funksjon som har koordinatene til punktene som input
    AB=np.array([(c-a),(d-b)]) # Vektor for siden mellom punktene A og B
    BC=np.array([(e-c),(f-d)])
    AC=np.array([(e-a),(f-b)])
    if np.dot(AB,BC)<=10**(-5) or np.dot(BC,AC)<=10**(-5) or np.dot(AB,AC)<=10**(-5): # Betingelse (skalarprodukt=0)
        print('Punktene danner en rettvinklet trekant')
    else:
        print('Punktene danner ikke en rettvinklet trekant')

In [9]: print(RettvinkletTrekant2(1,5,6,8,9,10),RettvinkletTrekant2(4,2,5.95,0.8,4,0))# Kjøre koden for to set av punkter

Punktene danner ikke en rettvinklet trekant
Punktene danner en rettvinklet trekant
None None
```

Figure 11

Oppgave 6 (4 poeng)

Vi bruker Cas for å løse oppgaven,

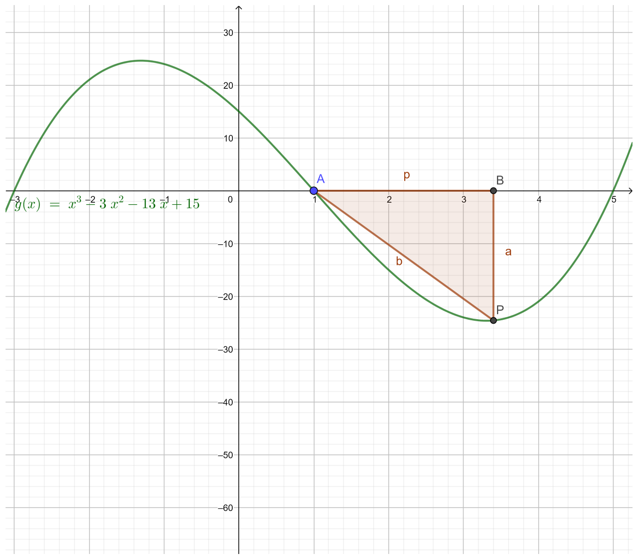

Figure 12

Siden punktene B og P har samme x-koordinat så linjen BP er vinkelrett på AB og det gjør vektorene som representerer dem. Vi lager vektorene $\vec{AB}$ og $\vec{BP}$ så finner vi arealet av trekanten som funksjon av s (rad 7). Vi deriverer Areal funksjon og setter den lik null for å finne s (rad 8).

Vi godtar bare den positive løsningen ($s = 2\sqrt{2} + 1$) siden $s \in (1, 5)$. Vi bekrefter at arealet er størst ved andrederiverttest (rad 9).

1	$g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
	$\rightarrow \ g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
2	$A := (1, 0)$
	$\rightarrow \ A := (1, 0)$
3	$B := (s, 0)$
	$\rightarrow \ B := (s, 0)$
4	$P := (s, g(s))$
	$\rightarrow \ P := \left(s, s^3 - 3s^2 - 13s + 15\right)$
5	$AB := \text{Vektor}(A, B)$
	$\rightarrow \ AB := \begin{pmatrix} s - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
6	$BP := \text{Vektor}(B, P)$
	$\rightarrow \ BP := \begin{pmatrix} 0 \\ s^3 - 3s^2 - 13s + 15 \end{pmatrix}$
7	$Ar(s) := \frac{1}{2} \lvert AB \rvert \lvert BP \rvert$
	$\rightarrow \ Ar(s) := \frac{1}{2} \lvert s - 1 \rvert \lvert s^3 - 3s^2 - 13s + 15 \rvert$
8	$\text{Derivert}(Ar) = 0$
	Løs: $\left\{ s = -2\sqrt{2} + 1, s = 2\sqrt{2} + 1 \right\}$
9	$Ar''\left(2\sqrt{2} + 1\right)$
	$\rightarrow \ -32$

Figure 13

Oppgave 7 (6 poeng)

a)

Banefarten til piratbåten er $31,24\,km/t$ (rad 4)

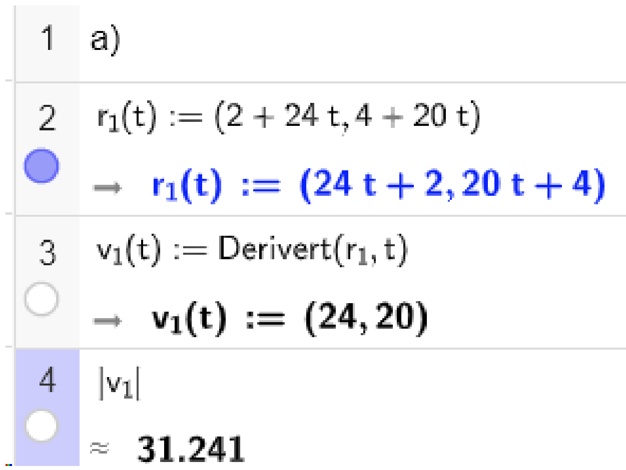

Figure 14

b)

Banene til piratbåten og politibåten krysser hverandre i punktet $(4.565, 6.137)$ men tidene til når de er der er forskjellig (se rad 7). Piratbåten er i skjæringspunktet etter $0,107$ sekunder mens politibåten er der etter $0,176$ sekunder. så kommer ikke politiet til å møte piratbåten.

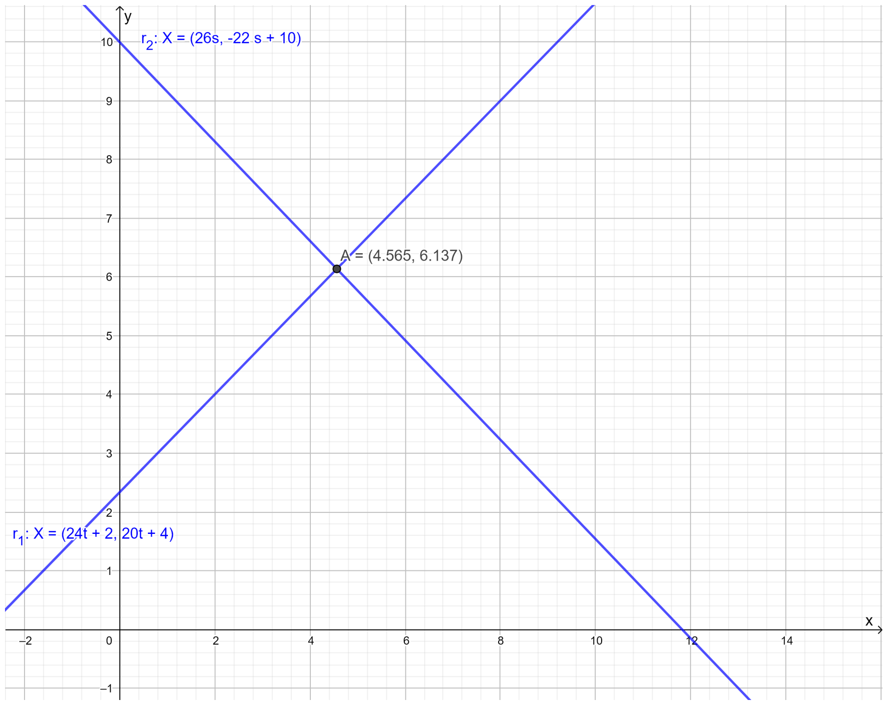

Figure 15

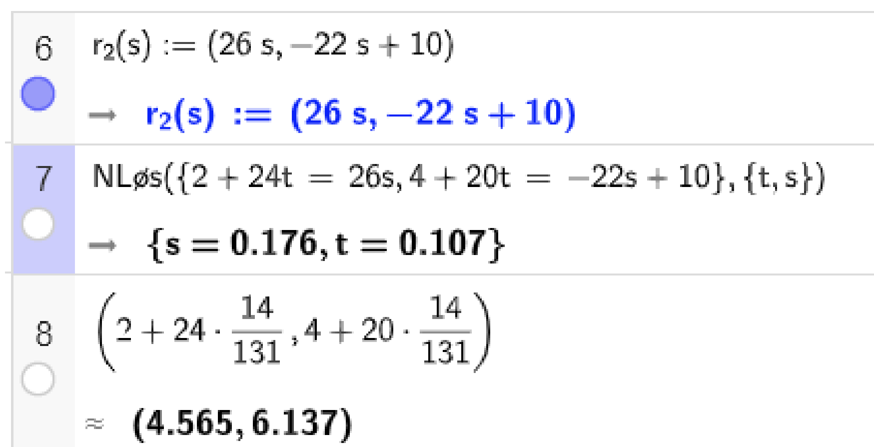

Figure 16

c)

Først vinner vi når piratbåten skal være i punktet $(8, 9)$ og får at tiden er $t = \frac{1}{4}$ (rad 10 og 11).Den tiden skal være det samme for politibåten. Så bruker vi bevegelseligninger for et partikkel med konstant fart:

$$x = x_0 + v_x t$$
$$y = y_0 + v_y t$$

for å finne fartvektor $\vec{v} = [v_x, v_y]$ (rad 12 og 13). Farten blir lengden av fartvektoren som er $32,25\,km/t$ (rad 14 og 15)

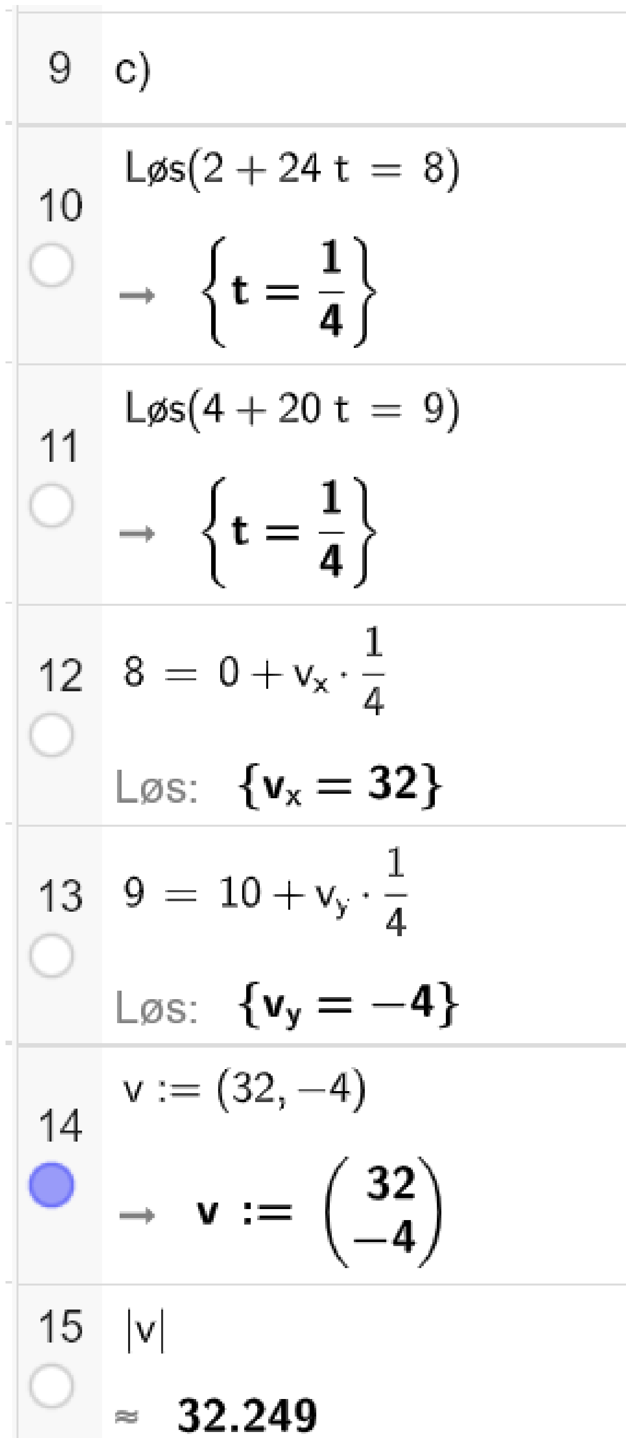
9 c)
10 Løs(2 + 24 t = 8)
→ {t = 1/4}
11 Løs(4 + 20 t = 9)
→ {t = 1/4}
12 8 = 0 + v_x · 1/4
Løs: {v_x = 32}
13 9 = 10 + v_y · 1/4
Løs: {v_y = −4}
14 v := (32, −4)
→ v := (32, −4)
15 |v|
≈ 32.249

Figure 17

Oppgave 8 (8 poeng)

a)

Vi bruker Cas. Vi taster inn begge funksjonene og får grafene til dem i grafikkfeltet. Vi ser fra figuren at grafene til f og g tangerer hverandre i punktet $(0, 3)$ og skjærer hverandre i prunket $(3, 9)$.

Fra rad 4 og 5 ser vi at den deriverte til f og er like i to punkter og de skjærer hverandre i to punkter og siden $x = 0$ er både skjæringspunkt og samtidig den deriverte til begge to er lik der så $(0, 3)$ er et tangeringspunkt mens $(3, 9)$ er skjæringspunkt.

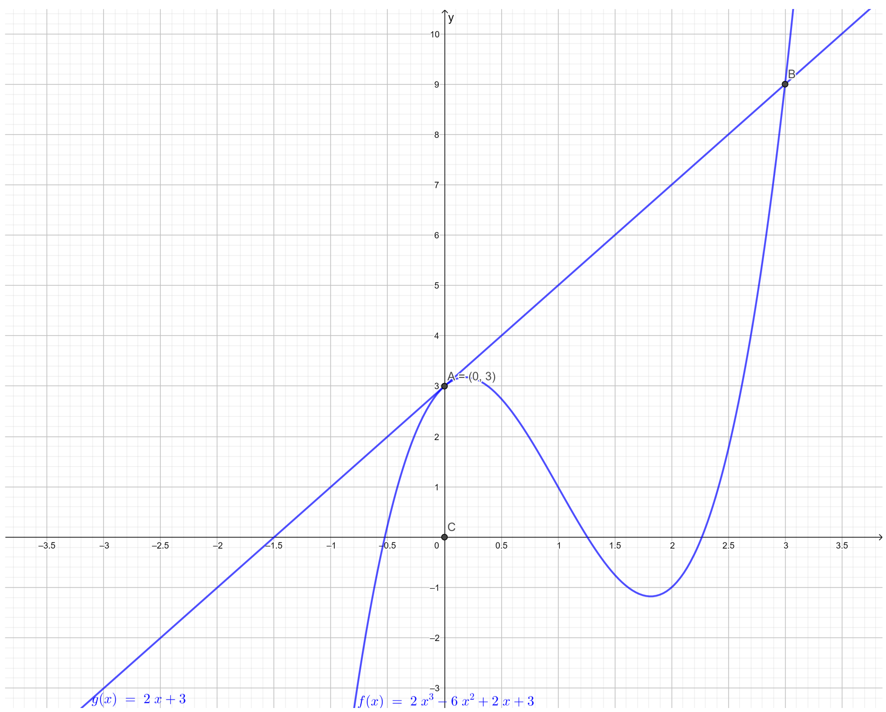

Figure 18

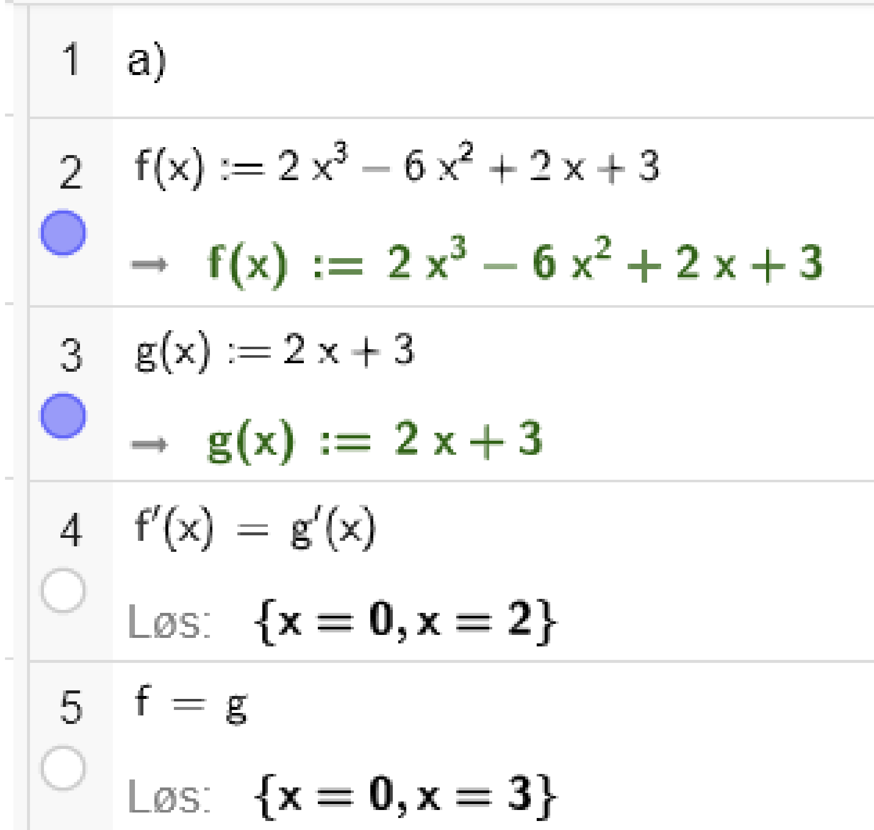

Figure 19

b)

Grafene til to funksjoner tangerer hvis de har samme den deriverte i et punkt,

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$G'(x) = c$$
$$F'(x) = G'(x)$$
$$3ax^2 + 2bx + c = c$$
$$3ax^2 + 2bx = 0$$
$$x(3ax + 2b) = 0$$
$$\text{Enten} \quad x = 0$$
$$\text{Eller} \quad 3ax + 2b = 0 \Rightarrow x = -\frac{2b}{3a}$$

Vi ser at grafene tangerer i to punkter $x = 0$ og $x = -\dfrac{2b}{3a}$ så Einar og Lise har rett.

c)

Vi vinner vendepunktet til F (rad 9) og skjæringspunkter mellom F og G (rad 10). Vi ser at det er en sammenheng mellom x-koordinat til vendepunktet og x-koordinat til skjæringspunkt

$$X_{\text{vendepunkt}} = \frac{1}{3} \cdot X_{\text{skjæringspunkt}}$$

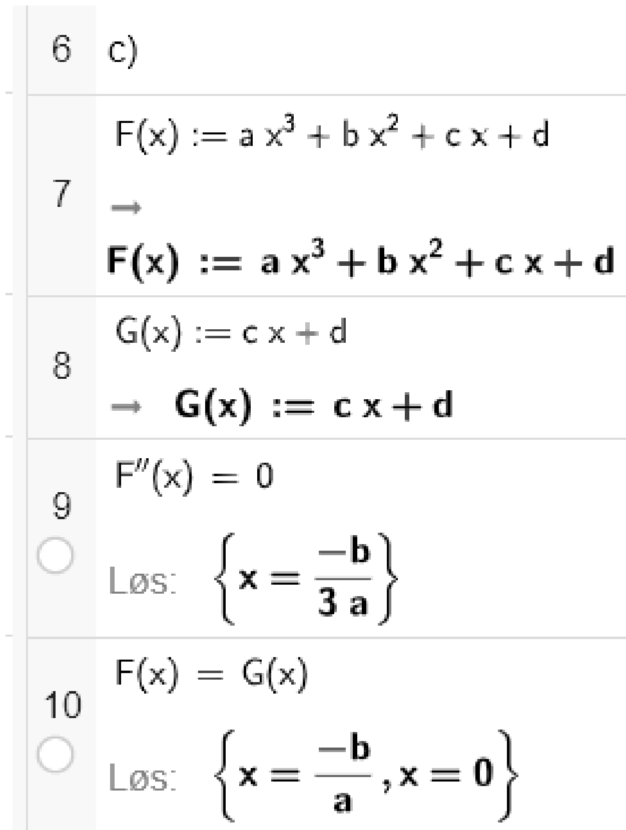

Figure 20