Figure 1:

2PY Eksamen V2022 Løsningsforslag

Farhan Omar

May 28, 2022

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (5 poeng)

1 a)

Datamaterialet sortert i stigende rekkefølge:

2, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 10

Antall fjellturer x	Frekvens f	$x \cdot f$	Kumulativ frekvens	Relativ frekvens
2	2	4	2	$\frac{2}{10}$
4	2	8	$2+2=4$	$\frac{2}{10}$
5	3	15	$4+3=7$	$\frac{3}{10}=0,3$
6	2	12	$7+2=9$	$\frac{2}{10}$
10	1	10	$9+1=10$	$\frac{2}{10}$
Sum	10	49		

Fra tabellen ser vi at:

$$Median = \frac{5+5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$Gjennomsnitt = \frac{49}{10} = 4,9$$

$$Typetall = 5$$

$$Variasjonsbredde = 10 - 2 = 8$$

1 b)

Fra tabellen ovenfor ser vi at: Kumulativ frekvens for 5 er 7 og betyr at Sebastian har vært på 5 fjellturer eller mindre 7 ganger i løpet av de siste 10 årene. Den relative frekvensen for 5 fjellturer er $0,3$ og betyr 30 prosent av alle turene de siste 10 årene har vært 5 fjellturer.

Oppgave 2 (2 poeng)

$$\begin{aligned}\frac{5\cdot 10^6 + 1,5\cdot 10^7}{2,5\cdot 10^{-6}} &= \frac{5\cdot 10^6 + 15\cdot 10^6}{2,5\cdot 10^{-6}}\\ &= \frac{(5+15)\cdot 10^6}{2,5\cdot 10^{-6}}\\ &= \frac{20}{2,5}\cdot 10^{6-(-6)}\\ &= 8\cdot 10^{12}\end{aligned}$$

Oppgave 3 (2 poeng)

3 a)

Vi har at Ny verdi (slutt verdi) (N)er lik gammel verdi (eller start verdi)(G) ganget vekstfaktor opphøyd i antall perioder.

$$\begin{aligned}N(n) &= G\cdot V^n\\ &= 600000\cdot(1-\frac{5}{100})\\ &= 600000\cdot 0,95 = 570000\,Kr\end{aligned}$$

Verdien av båten om et år vil bli $570000\,Kr$ så den har gått ned med

$$600000 - 570000 = 30000\,Kr$$

.

3 b)

Eirik har tenkt at verdien av båten har gått ned med 30000 Kr hvert år og da blir det

$$600000 - 5\cdot 30000 = 450000\,Kr$$

men verdien går ned med 5% hvert år og etter 5 år blir det

$$600000 \cdot (0,95)^5 \, Kr$$

Oppgave 4 (4 poeng)

4 a)

$$\begin{aligned} a &= \frac{58-54}{16-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \\ K(8) &= 54 \\ 0,5 \cdot 8 + b &= 54 \\ 4 + b &= 54 \\ b &= 54 - 4 \\ b &= 50 \end{aligned}$$

Tallet a er er stigningstallet og forteller diameteren til kartlaven øker med $0,5\,mm$ per år. B er skjæring med y-aksen(altså x=0) og viser at i år null (altså ved første observasjon) var diameteren av kartlaven $50mm$.

4 b)

Diameteren øker med $0,5mm$ per år så den vil øke med $0,5 \cdot 200 = 100mm$ i løpet av 200 år. Eller kan man regne det slik

$$\begin{aligned} K(x) &= ax + b = 0,5x + 50 \\ x &= 200 \\ K(200) &= 0,5 \cdot 200 + 50 = 150 \\ K(0) &= 95 \cdot 0 + 50 = 50 \\ K(200) - K(0) &= 150 - 50 = 100 \end{aligned}$$

Oppgave 5 (7 poeng)

5 a)

Vi lager tabellen nedenfor utfra opplysningene i oppgaveteksten

Antall krabber x	Antall dager f	Klassemidtpunkt x_m	Kumulativ frekvens	$x_m \cdot f$	$\frac{frekvens}{klassebredede}$
$[0, 20)$	5	$\frac{0+20}{2} = \frac{20}{2} = 10$	5	$10 \cdot 5 = 50$	$\frac{5}{20} = 0,25$
$[20, 30)$	10	$\frac{20+30}{=} \frac{50}{2} = 25$	5+10=15	$25 \cdot 10 = 250$	$\frac{10}{10} = 1$
$[30, 40)$	10	$\frac{30+40}{=} \frac{70}{2} = 35$	15+10=25	$35 \cdot 10 = 350$	$\frac{10}{10} = 1$
$[40, 60)$	15	$\frac{40+60}{2} = \frac{100}{2} = 50$	25+15=40	$50 \cdot 15 = 750$	$\frac{15}{20} = 0.75$
$[60, 100)$	20	$\frac{60+100}{2} = \frac{160}{2} = 80$	40+20=60	$80 \cdot 20 = 1600$	$\frac{20}{40} = 0.5$
Sum	60			3000	

$$Gjennomsnitt = \frac{3000}{60} = 50$$

5 b)

Median nummer(plass) $= \frac{60+1}{2} = 30,5$ så median ligger i klassen $[40, 60)$ fordi denne klassen har kummulativ frekvens 40 som er den første som er større enn median nummer.

Median-nummer i klassen = mediannummer for hele datasettet - kumulativ frekvens for klassen før.

$= 30,5 - 25 = 5,5$

$$\begin{aligned}\text{Median} &= \text{nedre grense i klassen} + \frac{\text{median-nummer i klassen}}{\text{frekvens til klassen}} \cdot klassebredde \\ &= 40 + \frac{5,5}{15} \cdot 20 = 40 + 7,33 = 47,33 \approx 47\end{aligned}$$

Vi antar at observasjonene er jevnt fordelt i klassen .

5 c)

vi har antatt at de 15 observasjonene er jevntfordelt i intervallet [40,60) men denne antagelsen er ikke helt nøyaktig så median kan bli større eller mindre avhengig av fordelingen av observasjonene i intervallet.

5 d)

vi lager histogram ved å bruke data fra tabellen ovenfor. Vi setter verdiene av $\frac{frekvens}{klassebredede}$ på $y - aksen$ og klassegrensene på $x - aksen$

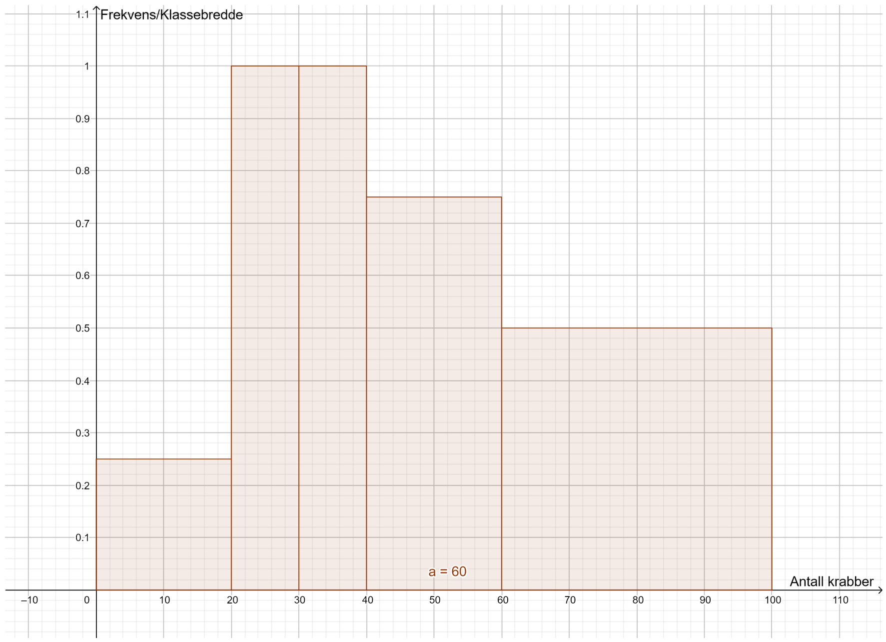

Figure 2

Oppgave 6 (4 poeng)

6 a)

Fra figurene ser vi at hvert figur består av en kvadrattall og 4 trekanttall. Vi lage nedenfor tabell:

figur no.	1	2	3	4	5	n
firkanttall	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	n^2
trekanttall	$4 \cdot 0$	$4 \cdot 1$	$4 \cdot 3$	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 10$	$4 \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$
Sum	1	8	21	40	65	$n^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}n(n-1)$

Det er 65 sirkler i tabell nummer 5.

6 b)

Fra tabellen vi lagde i a) er antall sirkler i figur nummer n gitt ved:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= n^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) \\
&= n^2 + 2n^2 - 2n \\
&= 3n^2 - 2n
\end{aligned}
$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (8 poeng)

1 a)

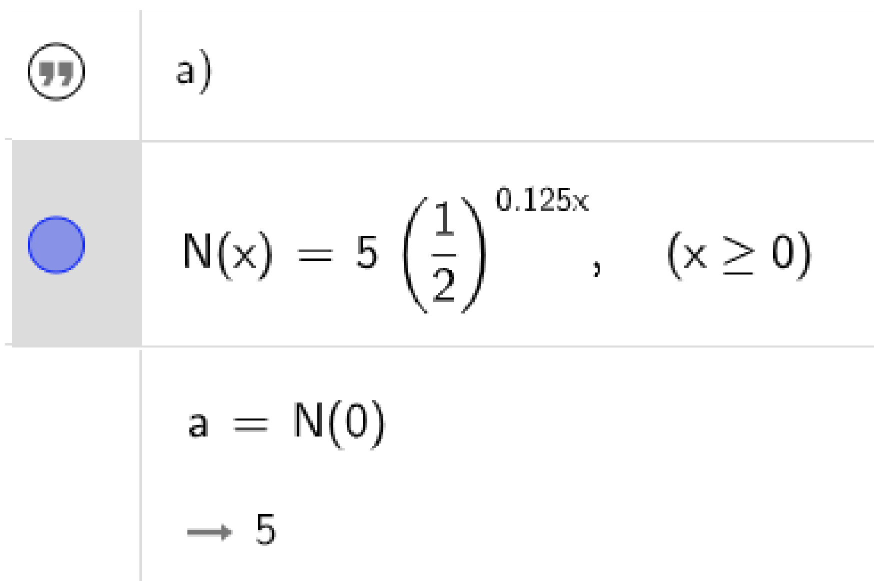

Figure 3

Massen til Jod-131 er 5 *mikrogram* i starten.

1b)

Vi bruker graftegner og kommando Funksjon(utrykk,start,slutt) og får

Figure 4

1 c)

Vi bruker Geogebra og tegner linjen $y = \frac{1}{2}N(0)$ så bruker vi skjæring mellom to objekter

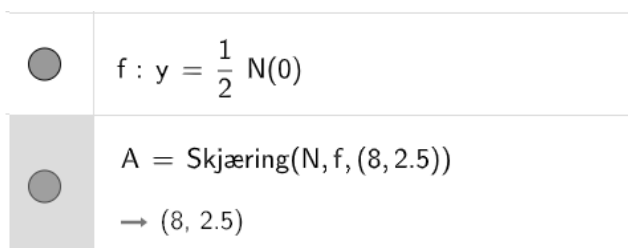

Figure 5

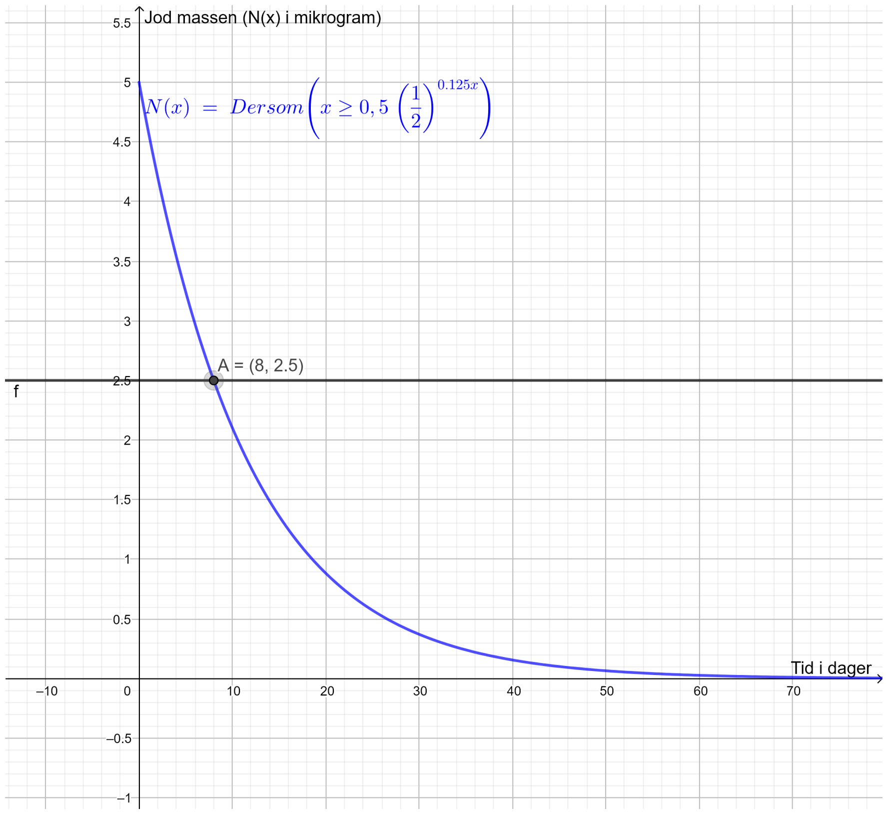

Figure 6

Vi ser at halveringstiden er 8 dager.

1 d)

Vi finner linjen via Geogebra kommando *Linje(punkt,punkt)* så finner vi stigning via kommando *stigning(Linje)*

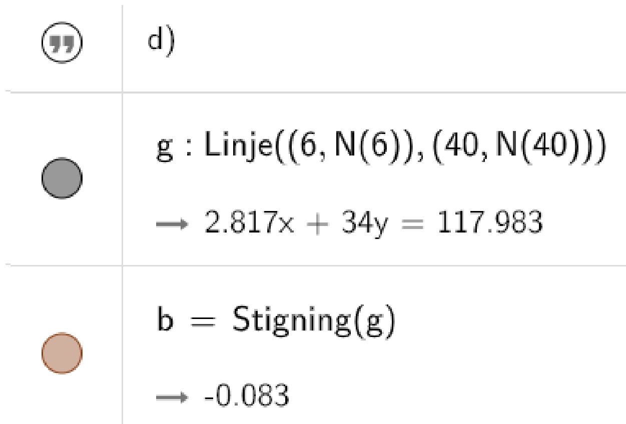

Figure 7

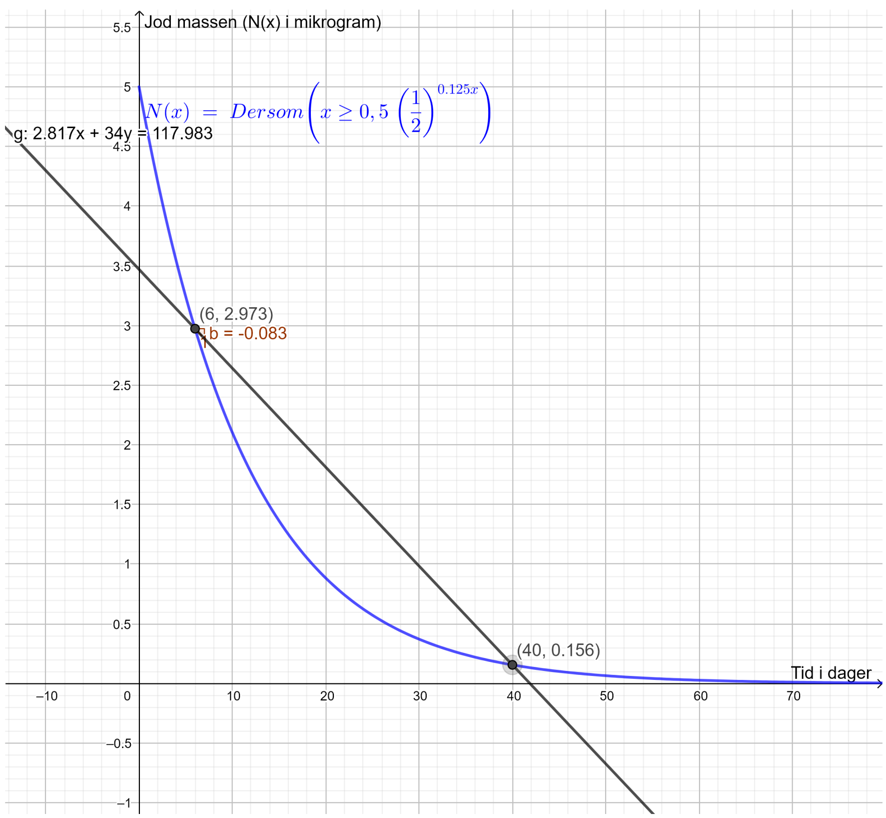

Figure 8

Stigning er -0,083 som betyr at mellom dag 6 og 40 avtar massen til jod med 0,08 mikrogram/dag i gjennomsnitt.

1 e)

Vi bruker Geogebra algebrafelt. Først skriver vi punktet så bruker vi kommando emf-Tanget(punkt,funksjon) for å få tangentlinjen så kommando emfStigning(Linje) for å finne stigningen

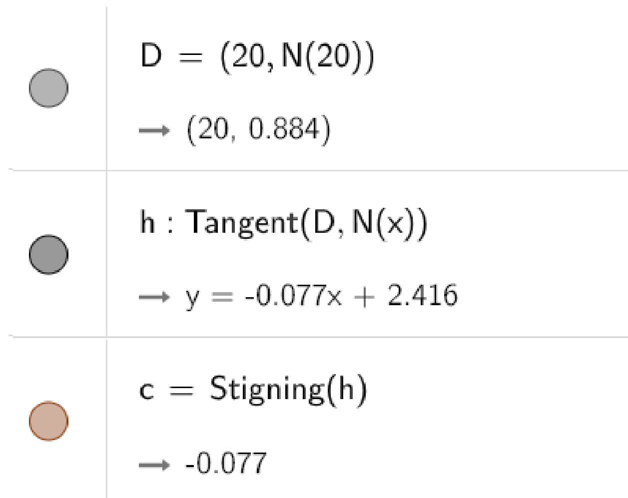

Figure 9

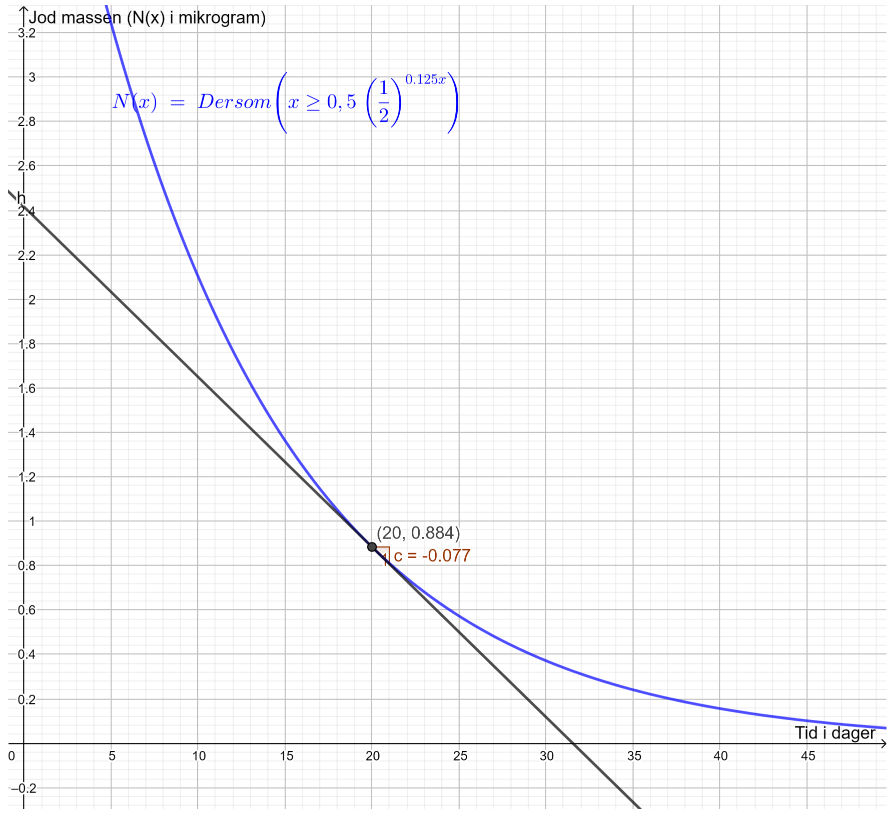

Figure 10

Stigningstallet i dette tilfellet representerer momentantekstfart. Massen til jod er i ferd med å avta med $0,077$ mikrogram per dag på dag 20.

Oppgave 2 (6 poeng)

2 a)

La x være antall personer som blir med på hytteturen så blir f(x) hvor mye hver en skal betale. Jo flere blir med desto mindre betaler hver person. Dette er omvendt proporsjonalitet. En funksjon som beskriver situasjonen er

$$f(x) = \frac{8000}{x}, x \geq 0$$

Vi bruker graftegner til å tegne funksjonen og får Koordinatene til punktet $(5, f(5) = 1600)$ forteller at når det er 5 personer som skal delta i hytteturen skal hver en betale 1600 kr.


09:34 tor. 26. mai
100 %
Funksjon
g(x) = 8000/x, (x > 0)
Punkt
A = (5, g(5))
→ (5, 1600)
Skriv inn...
g(x) = Dersom(x > 0, 8000/x)
A = (5, 1600)

Figure 11

2 b)

siden innbyggertallet øker med fast prosent så er dette en eksponentiell vest. Vi bruker eksponentiell regresjon i Geogebra med to punkter $(0, 30000), (10, 60000)$.

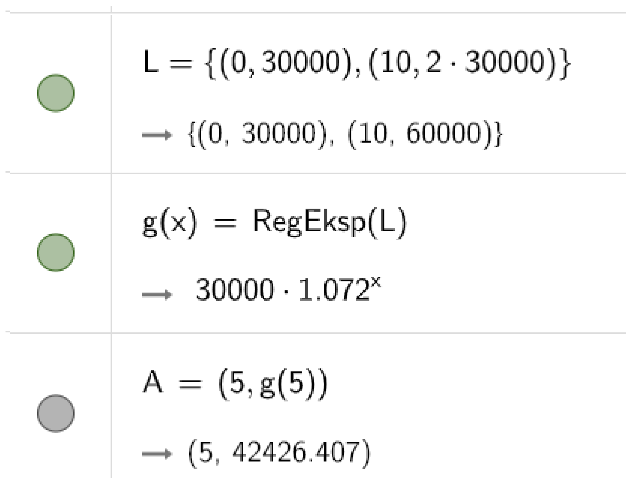

Figure 12

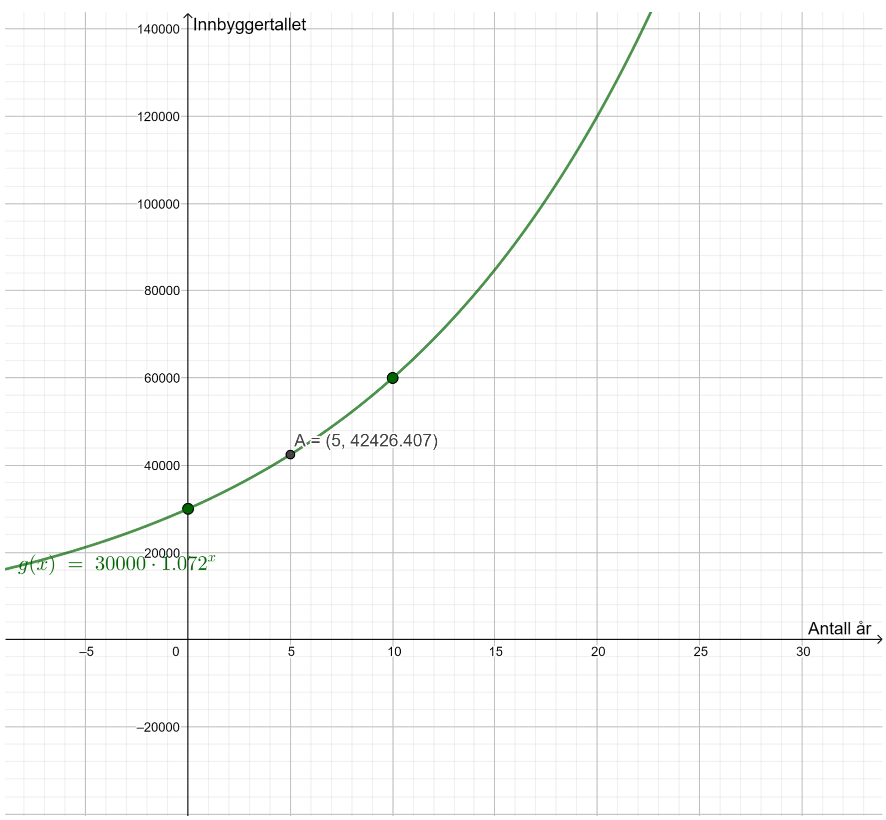

Figure 13

Koordinatene til punktet $(5, g(5) = 42426)$ forteller at etter 5 år øker innbyggertallet til 42426

Oppgave 3 (3 poeng)

Dette er eksponentiell vekst over flere perioder med 3 endringen i vekst. Vi bruker at

$$\text{Ny verdi} = \text{Gammel verdi} \cdot \text{Vekst faktor}^{\text{antall perioder}}$$
$$N = G \cdot V^n$$

Vi bruker Cas til å løse

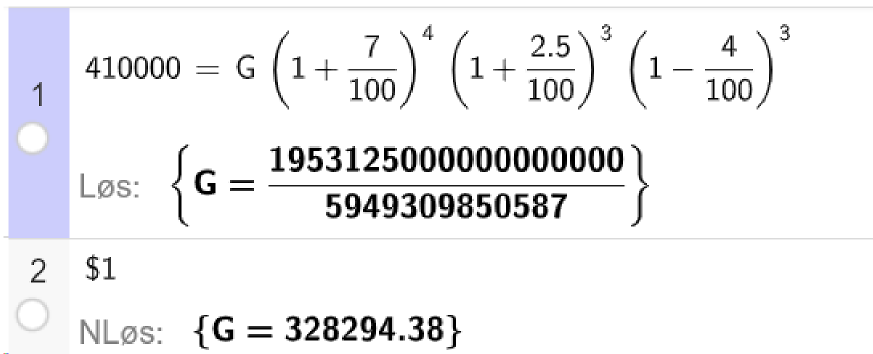

Figure 14

Verdien av Trines andel i fondet for 10 år siden var $328294,38\, Kr$

Oppgave 4 (5 poeng)

4 a)

Vi bruker Regneark (Excel) og finner at Amalie vil ha $449404,7872$ Kr etter siste innskudd i 2032.

	A	B	C
1	Fast innskudd	36000	
2	Fast rente	2,5	
3	Vekstfaktor	1,025	
4			
5	År	Penger på konto i starten av året	Penger på konto i slutten av året
6	01.01.2022	36000	36900
7	01.01.2023	72900	74722,5
8	01.01.2024	110722,5	113490,5625
9	01.01.2025	149490,5625	153227,8266
10	01.01.2026	189227,8266	193958,5222
11	01.01.2027	229958,5222	235707,4853
12	01.01.2028	271707,4853	278500,1724
13	01.01.2029	314500,1724	322362,6767
14	01.01.2030	358362,6767	367321,7436
15	01.01.2031	403321,7436	413404,7872
16	01.01.2032	449404,7872	460639,9069

Figure 15

	A	B	C
1	Fast innskudd	36000	
2	Fast rente	2,5	
3	Vekstfaktor	=1+B2/100	
4			
5	År	Penger på konto i starten av året	Penger på konto i slutten av året
6	44562	=B1	=B6*$B$3
7	44927	=C6+$B$1	=B7*$B$3
8	45292	=C7+$B$1	=B8*$B$3
9	45658	=C8+$B$1	=B9*$B$3
10	46023	=C9+$B$1	=B10*$B$3
11	46388	=C10+$B$1	=B11*$B$3
12	46753	=C11+$B$1	=B12*$B$3
13	47119	=C12+$B$1	=B13*$B$3
14	47484	=C13+$B$1	=B14*$B$3
15	47849	=C14+$B$1	=B15*$B$3
16	48214	=C15+$B$1	=B16*$B$3

Figure 16

4 b)

Vi bruker Regneark (Excel) og finner at Amalie vil passere 1 million Kr etter innskudd i 2043.

	A	B	C	D
1	Fast innskudd	36000		
2	Fast rente	2,5		
3	Vekstfaktor	1,025		
4				
5	År	Penger på konto i starten av året	Penger på konto i slutten av året	
6	01.01.2022	36000	36900	
7	01.01.2023	72900	74722,5	
8	01.01.2024	110722,5	113490,5625	
9	01.01.2025	149490,5625	153227,8266	
10	01.01.2026	189227,8266	193958,5222	
11	01.01.2027	229958,5222	235707,4853	
12	01.01.2028	271707,4853	278500,1724	
13	01.01.2029	314500,1724	322362,6767	
14	01.01.2030	358362,6767	367321,7436	
15	01.01.2031	403321,7436	413404,7872	
16	01.01.2032	449404,7872	460639,9069	
17	01.01.2033	496639,9069	509055,9046	
18	01.01.2034	545055,9046	558682,3022	
19	01.01.2035	594682,3022	609549,3598	
20	01.01.2036	645549,3598	661688,0938	
21	01.01.2037	697688,0938	715130,2961	
22	01.01.2038	751130,2961	769908,5535	
23	01.01.2039	805908,5535	826056,2673	
24	01.01.2040	862056,2673	883607,674	
25	01.01.2041	919607,674	942597,8659	
26	01.01.2042	978597,8659	1003062,813	
27	01.01.2043	1039062,813	1065039,383	

Figure 17

	A	B	C
1	Fast innskudd	36000	
2	Fast rente	2,5	
3	Vekstfaktor	=1+B2/100	
4			
5	År	Penger på konto i starten av året	Penger på konto i slutten av året
6	44562	=B1	=B6*$B$3
7	44927	=C6+$B$1	=B7*$B$3
8	45292	=C7+$B$1	=B8*$B$3
9	45658	=C8+$B$1	=B9*$B$3
10	46023	=C9+$B$1	=B10*$B$3
11	46388	=C10+$B$1	=B11*$B$3
12	46753	=C11+$B$1	=B12*$B$3
13	47119	=C12+$B$1	=B13*$B$3
14	47484	=C13+$B$1	=B14*$B$3
15	47849	=C14+$B$1	=B15*$B$3
16	48214	=C15+$B$1	=B16*$B$3
17	48580	=C16+$B$1	=B17*$B$3
18	48945	=C17+$B$1	=B18*$B$3
19	49310	=C18+$B$1	=B19*$B$3
20	49675	=C19+$B$1	=B20*$B$3
21	50041	=C20+$B$1	=B21*$B$3
22	50406	=C21+$B$1	=B22*$B$3
23	50771	=C22+$B$1	=B23*$B$3
24	51136	=C23+$B$1	=B24*$B$3
25	51502	=C24+$B$1	=B25*$B$3
26	51867	=C25+$B$1	=B26*$B$3
27	52232	=C26+$B$1	=B27*$B$3

Figure 18: Med formler

Oppgave 5 (4 poeng)

5 a)

Vi bruker regresjonsanalyse i Geogebra for å finne en eksponentiell funksjon. Vi legger punktene i et regneark , markerer dem så velger vi regresjonsanalyse og velger eksponentiell

	A	B	C
1	Fallhøyde (m)	Tid (sekunder)	
2	0.15	66.2	
3	0.2	54.2	
4	0.3	38.4	
5	0.4	30.9	
6	0.5	24.9	
7	0.6	21.7	
8	0.7	19.3	
9	0.8	17.2	
10	0.85	15.8	
11			

Figure 19

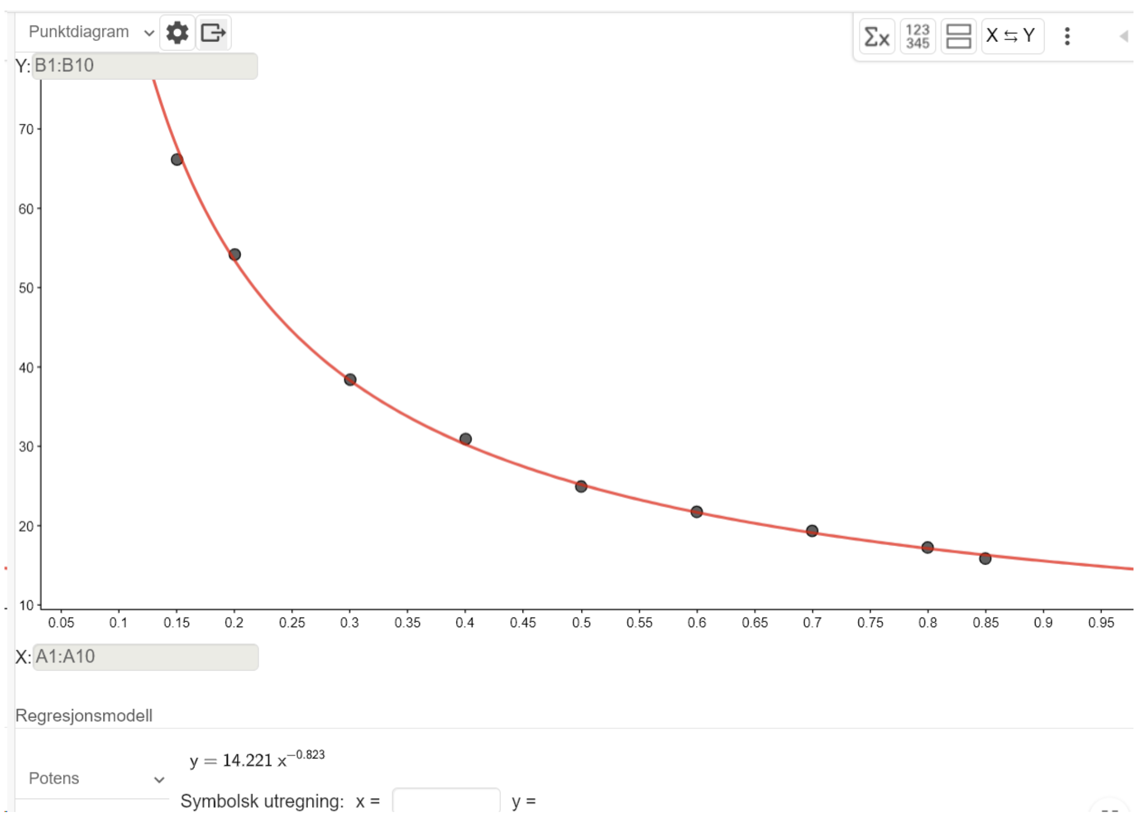

Figure 20

Fra figuren ser vi at $a = 14,221, b = -0,823$

5 b)

Vi eksportere grafen til grafikkfeltet. Så regner vi 40% økning i fallhøyden på $0.15mm$ blir 0.21 og tiden blir $51,334mm$,så regner vi endring i prosent for tiden mellom de to fallhøydene og den er på $-24,176$. Så tiden har avtatt med $24,18$ prosent.

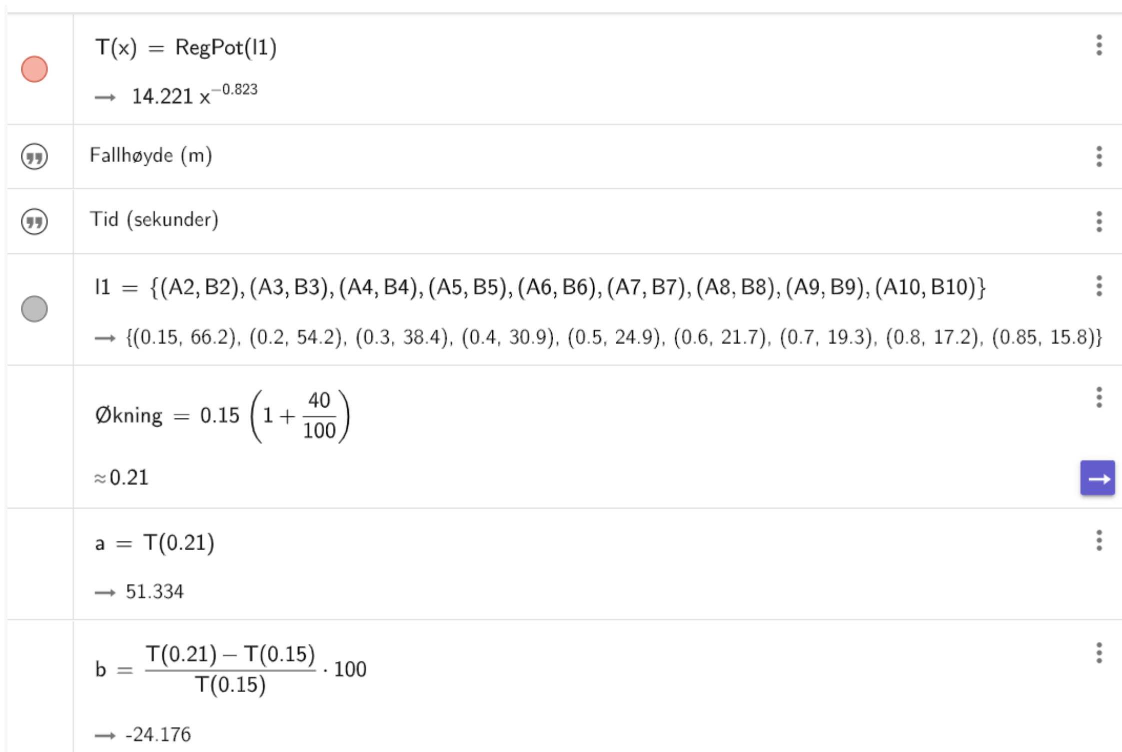

Figure 21

Oppgave 6 (4 poeng)

6 a)

Vi bruker Excel (regneark) og får at Median blir 7 minutter og gjennomsnitt blir også 7 minutter mens standardavvik er på 1,414 minutter.

	A	B	C	D
1	Oppgave 6			
2				
3	Antall forsentkomminger x (minutter)	Median	Gjennomsnitt	Standardavvik
4	4	7	7	1,41421356
5	5			
6	5			
7	5			
8	6			
9	6			
10	6			
11	6			
12	6			
13	7			
14	7			
15	7			
16	7			
17	7			
18	8			
19	8			
20	8			
21	8			
22	8			
23	8			
24	9			
25	9			
26	9			
27	9			

Figure 22

6 b)

Standardavvik er et spredingsmål og gir oss info om hvor mye unna ligger verdiene i et datasett fra gjennomsnittsverdi i gjennomsnitt. Hvis vi har mange verdier som er nær hverandre så er standardavviket lav ellers er det høy. Median er observasjonen i midten av datasettet når den er sortert i stigende rekkefølge så 50% av verdiene er under den og 50% er over den. Ole har større standardavvik betyr at antall minutter han kom for sent er mer variert en

Kari. Median er mindre betyr at han i 50 % av timene kom færre minutter for sent enn Kari. Gjennomsnitt er høyere betyr at han i gjennomsnitt var mer for sent enn Kari og dette kommer av større variasjon i antall minutter forsentkomminger.

Så Ole har større variasjon i antall minutter han kom for sent og han i gjennomsnitt var mer for sent enn Kari.

En situasjon som kan gi dette er følgende

E	F	G	H
Antall forsentkomminger x (minutter) for Ola	Median	Gjennomsnitt	Standardavvik
5	5	7,29166667	2,49130432
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
5			
10			
10			
10			
10			
10			
10			
10			
10			
10			
10			

Figure 23

Oppgave 7 (6 poeng)

Vi bruker Geogebra. Trekning er uten tilbakelegging og trekningene er uavhengige så vi ganger sannsynlighetene. La O være Oransje og G være Gul så,

7 a)

$$P(4oransje) = P(O, O, O, O) = P(O) \cdot P(O) \cdot P(O) \cdot P(O)$$

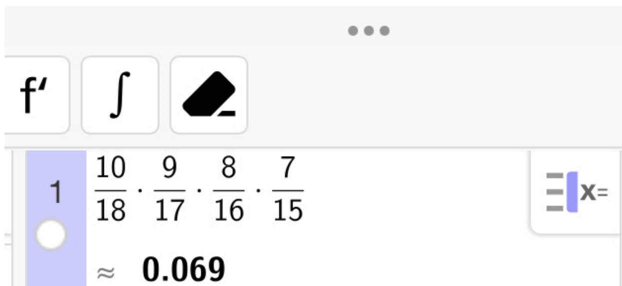

Figure 24

Så det er 6.9% sannsynlighet for at hun trekker 4 oransje blomster.

6 b)

$$P(G, O, O, G) = P(G) \cdot P(O) \cdot P(O) \cdot P(G)$$

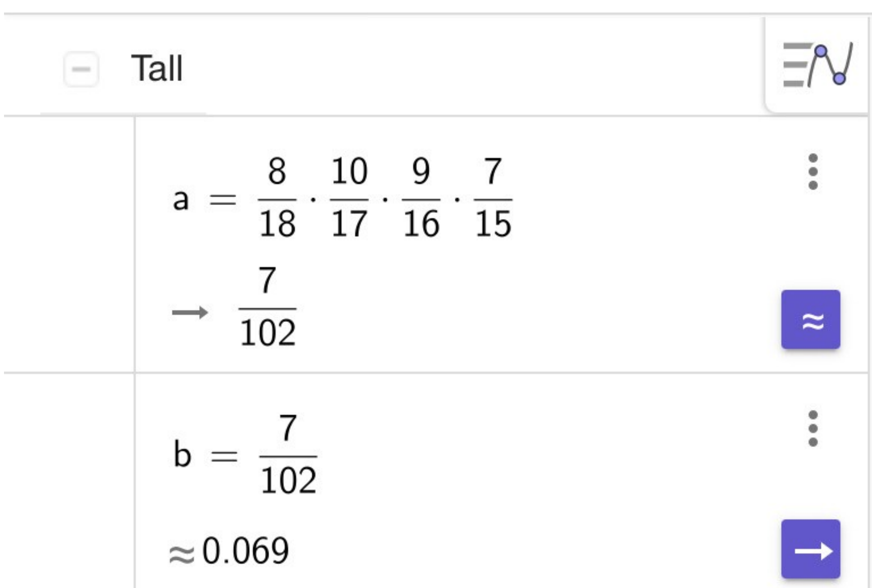

Figure 25

6 c)

Her finnes det 4 muligheter

$$P(\text{En Gul og 3 oransje}) = P(G,O,O,O) + P(O,G,O,O) + P(O,O,G,O) + P(O,O,O,G)$$

1 $\frac{8}{18} \cdot \frac{10}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} + \frac{10}{18} \cdot \frac{8}{17} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{8}{15} + \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15} + \frac{10}{18} \cdot \frac{9}{17} \cdot \frac{8}{16} \cdot \frac{8}{15}$

$\rightarrow \mathbf{\frac{16}{51}}$

2 $1

$\approx \mathbf{0.314}$

Figure 26

Så det er 31,4% sannsynlighet for at hun trekker en gul og 3 oransje blomster.