R2-eksamen høsten 2015

Forslag til løsningsforslag

Del 1, oppgave 1

a)

$$f(x) = 5\cos(2x)$$

$$\therefore f'(x) = -10\sin(2\text{x})$$

b)

$$g(x) = x \cdot \sin x$$

$$\therefore g'(x) = \sin x + x \cdot \cos x$$

c)

$$h(x) = 5e^{-x} \cdot \sin(2x)$$

$$\therefore h'(x) = -5e^{-x} \cdot \sin(2x) + 10e^{-x} \cdot \cos(2x)$$

Oppgave 2

a)

$$\int (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$$

$$\therefore \int_0^2 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 + 2 = \frac{2}{3}$$

b)

$$u = u(x) = e^x + 1 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int \frac{\frac{du}{dx}}{u^2} dx = \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{-1} u^{-1} + C = -\frac{1}{e^x + 1} + C$$

Oppgave 3

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} f^2(x)dx = \pi \int_0^{\ln 3} 4e^{-x}dx = 4\pi[-e^{-x}]_0^{\ln} \;= 4\pi\left(-\left(e^{\ln 3}\right)^{-1} + e^0\right) = 4\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\pi}{3}$$

Oppgave 4

a)

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(4) = f(4) = 1$$

b)

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx = F(4) - F(1) = 6 - (-1) = 7$$

Oppgave 5

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

a)

$$(4)^2 - 2(4) + (1)^2 + 6(1) + (2)^2 - 4(2) - 11 = 0$$

$$16 - 8 + 1 + 6 + 4 - 8 - 11 = 0$$

$$0 = 0, VS = HS$$

Punktet P tilfredsstiller likninga for kuleflaten.

b)

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 4z + 4 = 22 + 2 + 9 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 5^2$$

Sentrum i $S(1, -3, 2)$ og radius $r = 5$.

c)

$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{SP} = [3,4,0] \Rightarrow \vec{n} = [3,4,0]$$

Tangentplanet er gitt ved

$$3(x-4) + 4(y-1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y = 16$$

Oppgave 6

a)

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

b)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned}\sin(3x) = \sin(2x + x) &= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= (2\sin x \cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x \\ &= 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

Hvilket skulle vises.

Oppgave 7

a)

$$\overrightarrow{AB} = [1, -5, 6], \overrightarrow{AC} = [-3, 1, 3]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right] = [-21, -21, -14] = -7[3,3,2]$$

b)

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| \neq 0 \wedge \left|\overrightarrow{AB}\right|, \left|\overrightarrow{AC}\right| \neq 0 \Rightarrow \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) \neq 0 \Rightarrow \angle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \notin \{0, \pi\}$$

Som vil si at $\overrightarrow{AB}$ ikke er parallell med $\overrightarrow{AC}$. Dermed er ikke C på linja mellom A og B.

c)

$$\overrightarrow{n_\alpha} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} = [3,3,2]$$

$$\therefore \alpha: 3(x-1) + 3(y-2) + 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 3 + 3y - 6 + 2z + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + 3y + 2z = 5$$

d)

$$D(2,2,3) \to 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 5 = 13 \neq 0$$

Punktet D ligger ikke i planet α.

Oppgave 8

$$y^2 \cdot y' = x \Leftrightarrow y^2 dy = x dx$$

$$\int y^2 dy = \int x dx \Leftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y^3 = \frac{3}{2}x^2 + C \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$$

Gitt initialbetingelsene $y(0) = 2$

$$2 = \sqrt[3]{C} \Leftrightarrow C = 8$$

$$\therefore y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x + 8}$$

Oppgave 9

Grunnsteget – teste for $n = 1$

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow VS =$$

Antar at det holder for $n = k$

$$\sum_{n=1}^{k} n^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Induksjonssteget – vise at det holder for $n = k + 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{k} n^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

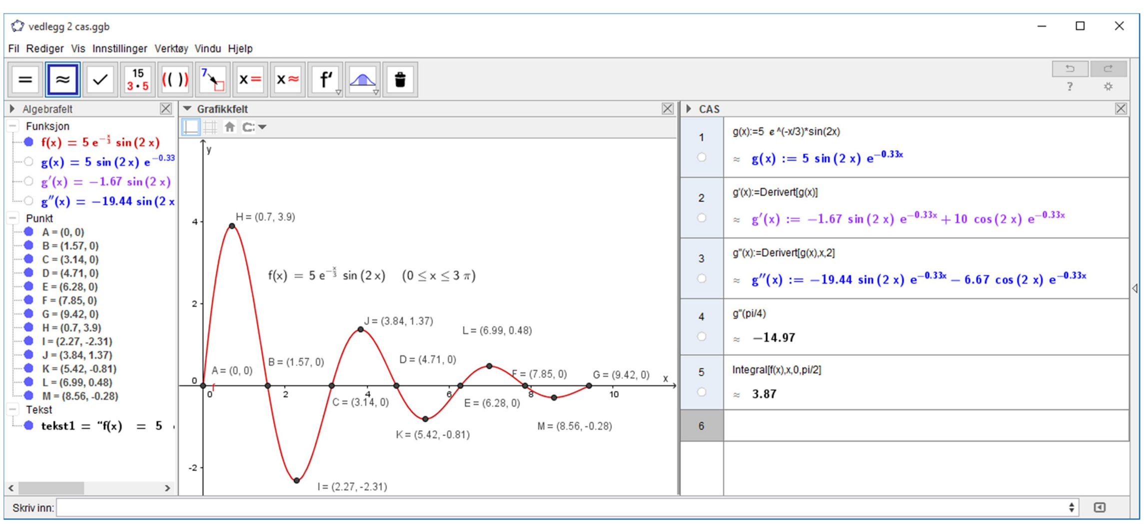
$$\frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)(k+1)^2}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \Rightarrow VS =$$

Dermed holder påstanden. Quod erat demonstrandum, hvilket skulle vises.

Del 2, oppgave 1

a)



b)

Nullpunkt ved $f(x)=0 \Leftrightarrow 5e^{-\frac{x}{3}}\cdot\sin(2x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{N}^0=\{0,1,2,\dots\}$

Altså ved $x\in[0,3\pi]$, får vi nullpunkter $x\in\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi,\frac{5\pi}{2},3\pi\right\}$. Alle y-verdier er 0.

c)

Bruker kommandoen **Ekstremalpunkt[f(x),a,b]** for å finne ekstremalpunktet på $f(x)$ mellom a og b.

$$\sin(2x)=\pm1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{N}^0$$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx-15$, altså $x=\frac{\pi}{4}$ er et toppunkt.

Toppunkter på f:$(0.7,3.9),(3.84,1.37),(6.99,0.48)$

Bunnpunkter på f:$(2.27,-2.31),(5.42,-0.81),(8.56,-0.28)$

d)

Bruker GeoGebra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\approx3.87$$

Oppgave 2

1	LøsODE[9 y''+6 y'+37 y=0,(0,0),(0,10)] → $y=5e^{-\frac{x}{3}}\sin(2x)$
2	9*Derivert[5e^((-x) / 3) sin(2x),x,2]+6*Derivert[5e^((-x) / 3) sin(2x)]+37* (5e^((-x) / 3) sin(2x)) → 0
3	Dermed er f(x) = 5e^((-x) / 3) sin(2x) en løsning av difflikninga i oppgave 2

Oppgave 3

a)

$$a_1=0, a_2=\frac{\pi}{2}, a_3=\pi,\dots, d=\frac{\pi}{2}, a_{20}=\frac{19\pi}{2}$$

b)

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=b_1=5e^{-\frac{\pi}{12}}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=b_2=5e^{-\frac{5\pi}{12}}\Rightarrow k=\frac{b_1}{b_2}=e^{-\frac{\pi}{3}}, b_5=5e^{-\frac{\pi}{12}}\cdot e^{-\frac{4\pi}{3}}=5e^{-\frac{17}{12}}$$

c)

$$s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{5e^{-\frac{\pi}{12}}}{1-e^{-\frac{\pi}{3}}} \approx 5.93$$

Oppgave 4

$$K: (x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 21$$

$$\overrightarrow{AB} = [8, -2{,}4] = 2[4, -1{,}2]$$

$$\vec{r_l} = [4, -1{,}2]$$

$$l: \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = -2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$$

$$(7 + 4t + 1)^2 + (-2 - t)^2 + (5 + 2t - 1)^2 = 21$$

$$\left(4(2+t)\right)^2 + \left(-(2+t)\right)^2 + \left(2(2+t)\right)^2 = 21$$

$$21(2+t)^2 = 21$$

$$t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3}}{2} = -2 \pm 1$$

$$t_1 = -1, t_2 = -3$$

Altså enten $(7-4, -2+1{,}5-2) = (3, -1{,}3)$ eller $(7-12, -2+3{,}5-6) = (-5{,}1, -1)$

Oppgave 5

a)

Nevneren er negativ og dermed på P, som er den venstre løsningen, velge positiv fortegn foran rottegnet. X-koordinatene til punktene er løsningen til andregradspolynomer, altså abc-formelen.

bcd)

Se neste side, CAS.

1	f(x):=a x^2+b x+c	$\rightarrow\ f(x) := a\,x^2 + b\,x + c$
2	Løs[Derivert[f(x)]=0]	$\rightarrow\ \left\{x = -\frac{b}{2\,a}\right\}$
3	f(-b/(2a))	$\rightarrow\ \frac{-b^2 + 4\,a\,c}{4\,a}$
4	R:(-b/(2a),f(-b/(2a)))	$\rightarrow\ R := \left(-\frac{b}{2\,a}, \frac{4\,a\,c - b^2}{4\,a}\right)$
5	P:((-b+sqrt(b^2-4 a c))/(2a),0)	$\rightarrow\ P := \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}, 0\right)$
6	Q:((-b - sqrt(b² - 4a c)) / (2a), 0)	$\rightarrow\ Q := \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}, 0\right)$
7	Avstand mellom P og Q er x(Q)-x(P)	
8	x(Q)-x(P)	$\rightarrow\ -\frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{a}$
9	Areal av trekant er 1/2 * grunnlinje * høyde	
10	1 / 2 $8 $3	$\rightarrow\ \frac{1}{8}\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} \cdot \frac{b^2 - 4\,a\,c}{a^2}$
11	Integral[f(x),x,x(P),x(Q)]	$\rightarrow\ \left(-4\,a\,c + b^2\right) \cdot \frac{\sqrt{-4\,a\,c + b^2}}{6\,a^2}$
12	$10 / $11	$\rightarrow\ \frac{3}{4}$