Eksamen R1 høst 2015 løsning

Del 1, ingen hjelpemidler

Oppgave 1

a) Derivasjonsregelen for polynomer: $f'(x) = 3 \cdot 2x + 5 \cdot 1 - 0 = \underline{\underline{6x + 5}}$

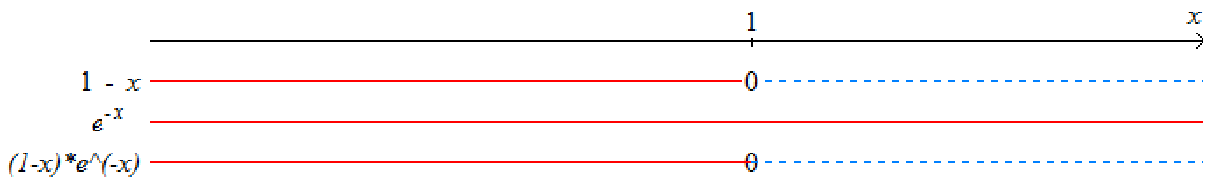
b) Kjerneregelen: $g'(x) = 3 \cdot [u^4]' \cdot [x^2 - 2]' = 3 \cdot 4u^3 \cdot 2x = \underline{\underline{24x \cdot (x^2 - 2)^3}}$

c) Delutregning med kjerneregelen: $[\ln(x^2 + 3)]' = [\ln u]' \cdot [x^2 + 3]' = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$
Så produktregelen:

$$h'(x) = [x]' \cdot \ln(x^2 + 3) + x \cdot [\ln(x^2 + 3)]' = 1 \cdot \ln(x^2 + 3) + x \cdot \frac{2x}{x^2 + 3}$$
$$= \underline{\underline{\ln(x^2 + 3) + \frac{2x^2}{x^2 + 3}}}$$

Oppgave 2

$$f'(x) = [x]' \cdot e^{-x} + x \cdot [e^{-x}]' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$$



Oppgave 3

a) Hvis $f(x)$: $(x - 1)$ skal gå opp, må $f(1) = 0$

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - k \cdot 1 + 6 = 0$$
$$\underline{\underline{k = 5}}$$

b) Polynomdividerer først med $(x - 1)$, siden jeg så i a) at dette går opp:

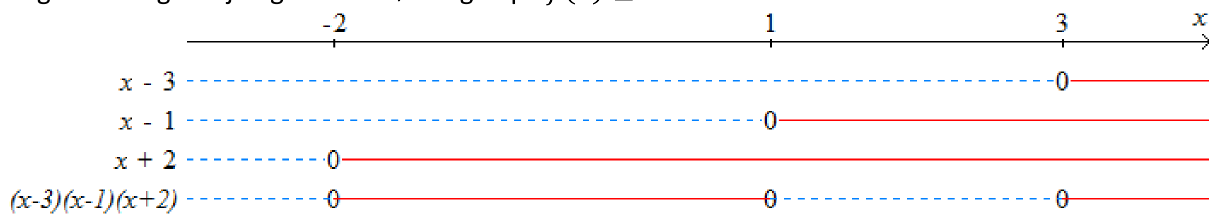
$$\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\qquad -x^2 - 5x + 6 \\
\underline{\qquad -(-x^2 + x)} \\
\qquad\qquad -6x + 6 \\
\underline{\qquad\qquad -(-6x + 6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Kan nå bruke abc-formelen, men jeg bruker at $-1 = -3 + 2$ og $-6 = -3 \cdot 2$ og faktoriserer:

$$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$$

Endelig lineær faktorisering blir $f(x) = \underline{\underline{(x - 3)(x - 1)(x + 2)}}$

c) Tegner fortegnslinje og leser av løsningen på $f(x) \geq 0$:



$$\underline{\underline{x \in [-2, 1] \cup [3, \rightarrow\rangle}}$$

Oppgave 4

Denne kan løses på to hovedmåter:

Trekke sammen:

$$\lg(a^2b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right) = \lg(a^2b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) + \lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg\left(a^2b^3 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{a}{b}\right) = \underline{\underline{\lg(a^3)}}$$

Løse opp:

$$\lg(a^2b^3) + \lg\left(\frac{1}{b^2}\right) - \lg\left(\frac{b}{a}\right) = \lg(a^2) + \lg(b^3) - \lg(b^2) - (\lg b - \lg a)$$

$$= 2\lg a + 3\lg b - 2\lg b - \lg b + \lg a = \underline{\underline{3\lg a}}$$

Oppgave 5

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 \quad , \quad x \in \langle -2, 4\rangle$$

a) Faktoriserer og løser med $a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee b = 0$

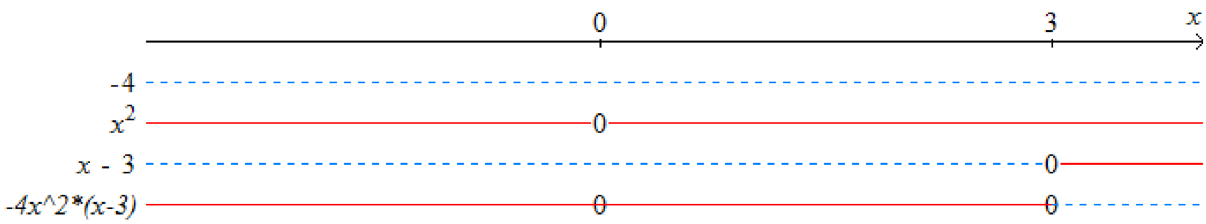
$$-x^4 + 4x^3 = 0$$
$$x^3(4 - x) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

Men $x = 4$ er utenfor definisjonsområdet, så $\underline{f(x) \text{ har et nullpunkt i } (0, 0)}$

b) Finner ekstremalpunktene der den deriverte er lik 0:

$$f'(x) = 0$$
$$-4x^3 + 4 \cdot 3x^2 = 0$$
$$-4x^2(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

Tegner fortegnsskjema for å se hva som er toppunkt og bunnpunkt:



Ser at det er et terrassepunkt ved $x = 0$ og et toppunkt ved $x = 3$.

Finner $f(3) = -3^4 + 4 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot (-3+4) = 27 \cdot 1 = \underline{27}$

Svar: $\underline{f(x) \text{ har et toppunkt i } (3, 27)}$

c) Finner vendepunkt der den dobbeltderiverte er lik 0

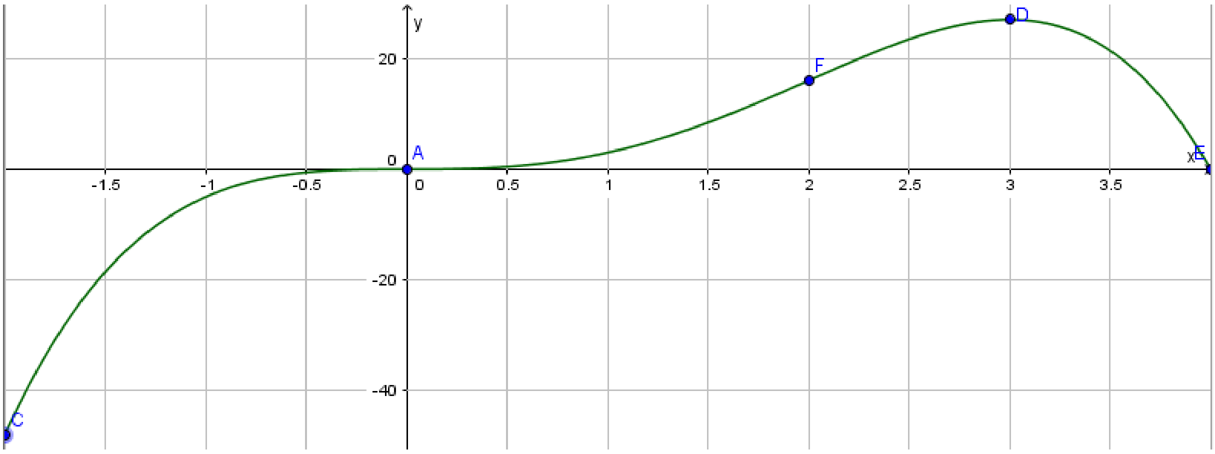
$$f''(x) = 0$$
$$-4 \cdot 3x^2 + 12 \cdot 2x = 0$$
$$-12x(x-2) = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

Har $f(0) = 0$, og regner $f(2) = -2^4 + 4 \cdot 2^3 = 2^3(-2+4) = 8 \cdot 2 = 16$

Svar: $\underline{f(x) \text{ har vendepunkter i } (0, 0) \text{ og } (2, 16)}$

d) Finner $f(-2) = -(-2)^4 + 4 \cdot (-2)^3 = (-2)^3 \cdot (2+4) = -8 \cdot 6 = -48$

Markerer grensene, toppunktet og vendepunktene og skisserer:



Oppgave 6

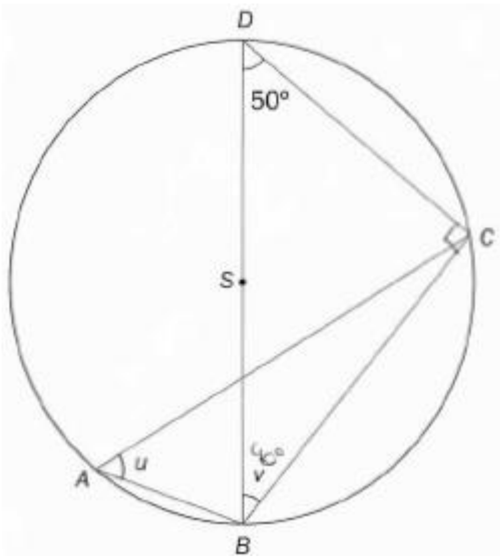
$\angle CDB$ og $\angle CAB$ er periferivinkler til den samme sentralvinkelen, altså er $\angle CAB = \angle CDB$

$$\underline{\underline{u = 50°}}$$

Siden BD er diameteren i sirkelen forteller Thales' setning at $\angle BCD = 90°$, som betyr at den siste vinkelen i trekant BCD er $\angle CBD = 180° - 90° - 50° = 40°$

$$\underline{\underline{v = 40°}}$$

(Kan også tenke at $\angle BCD$ er periferivinkelen til sentralvinkelen $\angle BSD = 180°$)



Oppgave 7

Har fra oppgaven at $P(J) = 0{,}60$, som betyr at $P(G) = 0{,}40$, der J står for jente og G for gutt.

Har også de betingede sannsynlighetene for blå øyne, B: $P(B|J) = 0{,}70$ og $P(B|G) = 0{,}55$.

a) $P(B) = P(B \cap J) + P(B \cap G) = P(B|J) \cdot P(J) + P(B|G) \cdot P(G) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}55 \cdot 0{,}4 = \underline{\underline{0{,}64}}$
Svar: Sannsynligheten for at en tilfeldig elev har blå øyne er 64%

b) $P(\bar{B}|G) = 1 - P(B|G) = 0{,}45$ og $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0{,}36$. Bruker Bayes' regel:

$$P(G|\bar{B}) = \frac{P(\bar{B}|G) \cdot P(G)}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}40}{0{,}36} = \underline{\underline{0{,}50}}$$

Svar: Sannsynligheten for at en elev som ikke har blå øyne er en gutt er 50%.

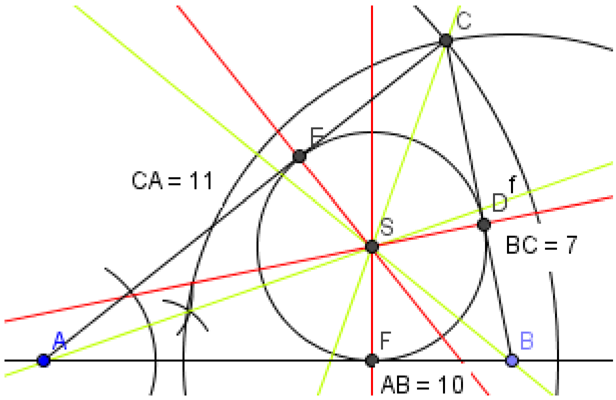
Oppgaven kan løses på flere måter, f.eks. med en krysstabell. 70% av 60% betyr at 42% av elevene er jenter med blå øyne, mens 55% av 40% betyr at 22% av elevene er gutter med blå øyne. Resten er enkel aritmetikk. Fyller ut:

	Blå	Ikke blå	Sum
Gutt	22%	18%	40%
Jente	42%	18%	60%
Sum	64%	36%	100%

a) Leser av krysstabellen at sannsynligheten for at en tilfeldig elev har blå øyne er 64%

b) $P(G|\bar{B}) = \frac{P(G \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{18\%}{36\%} = \underline{\underline{0{,}50}}$

Oppgave 8



a) Tegner ei rett linje, markerer et punkt A på linja, slår $10{,}0cm$ langs linja med en passer og markerer punkt B. Lager en halvsirkel over linja med $r = 11{,}0cm$ ut fra punkt A, og en halvsirkel over linja med $r = 7{,}0cm$ ut fra punkt B, og der halvsirklene møtes finner jeg punkt C.

b) Konstruerer halveringslinjene ved å trekke en bue som krysser vinkelbeina fra hvert hjørne, og slå to nye buer med samme avstand fra punktene der den første buen skjærer vinkelbeina (vist ved vinkel A). Halveringslinjene er grønne. Ser at de møtes i ett punkt, S.

c) Konstruerer normaler ned fra S til sidene i trekanten. Normalene er røde. De treffer sidene i punktene D, E og F.

d) Fordi punkt S ligger på halveringslinja mellom AB og AC ligger punktet like langt fra de to sidene. På samme måte ligger S like langt fra AB og BC. S ligger altså like langt fra alle de tre sidene i trekanten, og dermed må $\underline{\underline{SD = SE = SF}}$
Dermed vet jeg også at de tre punktene D, E og F ligger på omkretsen av sirkelen, og jeg konstruerer den innskrevne sirkelen ved å plassere passerspissen i S og blyet i D og trekke opp sirkelen.

Oppgave 9

$$\lg(x+2)^2 = \lg x^4$$
$$10^{\lg(x+2)^2} = 10^{\lg x^4}$$
$$(x+2)^2 = x^4$$
$$x+2 = \pm x^2$$

Først den negative muligheten:

$$x+2 = -x^2$$
$$x^2 + x + 2 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

Det ga ingen reelle løsninger. Så den positive muligheten:

$$x+2 = x^2$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Det ga de to løsningene $\underline{\underline{x_1 = -1}}$ og $\underline{\underline{x_2 = 2}}$

En rask prøve på svaret:

$$\lg(-1+2)^2 = \lg(-1)^4$$
$$\lg 1 = \lg 1$$

$$\lg(2+2)^2 = \lg 2^4$$
$$\lg 16 = \lg 16$$

Det stemmer!

Del 2, alle hjelpemidler, GeoGebra er brukt

Oppgave 1

a) I 1960 er $x = 0$ og $f(0) = 3$, og i 2013 er $x = 53$ og $f(53) = 7{,}1$. Løser ligningssettet:

1 Løs[{c*exp(0k)=3,c*exp(53k)=7.1},{c,k}]
$\approx \{\{c = 3, k = 0.02\}\}$

2 {{c = 3, k = 0.01625438670527}}

Runder av og får at $\underline{\underline{c = 3}}$ og $\underline{\underline{k \approx 0{,}016}}$

b) Setter inn konstantene og løser:

3 Løs[3*exp(0.016t)=10,t]
$\approx \{t = 75.25\}$

Svar: I følge modellen passerer folketallet 10 milliarder i år 2035.

c) Funksjonen er en konstant multiplisert med et tall opphøyd i tiden, altså en eksponentialfunksjon. For hver økning i tid multipliseres verdien med den samme vekstfaktoren.
Omskriver $c \cdot e^{kt} = c \cdot \left(e^{k}\right)^{t}$, altså er vekstfaktoren gitt ved e^{k} og prosenten ved $100e^{k} - 100$:

4 exp(0.016)
≈ 1.02

5 1.016128685406*100-100
≈ 1.61

Svar: Den årlige økningen er på ca. 1,6%.

Oppgave 2

Bruker i denne oppgaven Inntastingsfeltet og Algebrafeltet i GeoGebra. Definerer først de oppgitte punktene med $A = (-1,0)$ osv.

Punkt
A = (-1, 0)
B = (7, -1)
C = (5, 8)

a) Finner vektorene med kommandoen Vektor[startpunkt, sluttpunkt] og vinkelen med kommandoen Vinkel[vektor, vektor].
$\angle ACB$ er vinkelen mellom vektorene $\overrightarrow{CB}$ og $\overrightarrow{CA}$.
Svar: $\overrightarrow{CB} = [2,-9]$ og $\overrightarrow{CA} = [-6,-8]$ og $\angle ACB = 49{,}4°$

Vektor
$CA = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix}$
$CB = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix}$
Vinkel
ABC = 49.4°

b) Bruker kommandoen Areal[A,B,C] for å finne arealet av trekanten spent ut av de tre punktene, og får som svar $\underline{\underline{T_{\Delta ABC} = 35}}$

c) For at $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$ må skalarproduktet $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
Her må jeg bruke CAS for å kunne jobbe med vektorer med variabler.
Et punkt E på x-aksen må ha $y = 0$, så jeg lar $E(x, 0)$ og definerer punktet og vektorene:

2 E(x):=(x,0)
$\rightarrow E(x) := (x, 0)$

3 CE:=Vektor[C, E]
$\rightarrow CE := \begin{pmatrix} x - 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

4 AB:=Vektor[A, B]
$\rightarrow AB := \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$

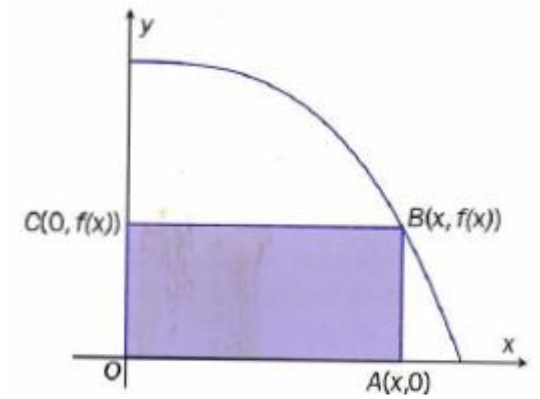
Løser vektorligningen for å finne når skalarproduktet er lik null:

5 Løs[CE*AB=0]
$\rightarrow \{x = 4\}$

Svar: Punktet E på x-aksen som er slik at $\overrightarrow{CE} \perp \overrightarrow{AB}$ er $E(4, 0)$.

Oppgave 3

$$f(x) = 4 - 0{,}125x^3 \quad , \quad 0 < x < 2\sqrt[3]{4}$$



a) Rektangelet har bredde x og høyde $f(x)$, så arealet kan skrives som:

$G = x \cdot f(x) = x(4 - 0{,}125x^3) = \underline{\underline{4x - 0{,}125x^4}}$

Definerer funksjonen i GeoGebra:

6 G(x):=4x-0.125x^4

$\rightarrow \; G(x) := -\frac{1}{8}x^4 + 4x$

7 Løs[G(x)=5]

b) $\rightarrow \; \{x = 1.36, x = 2.53\}$

Svar: <u>Rektangelet har areal 5,0 når $x \approx 1{,}4$ eller $x \approx 2{,}5.$</u>

9 Ekstremalpunkt[G(x), 0, 2*nrot(4, 3)]

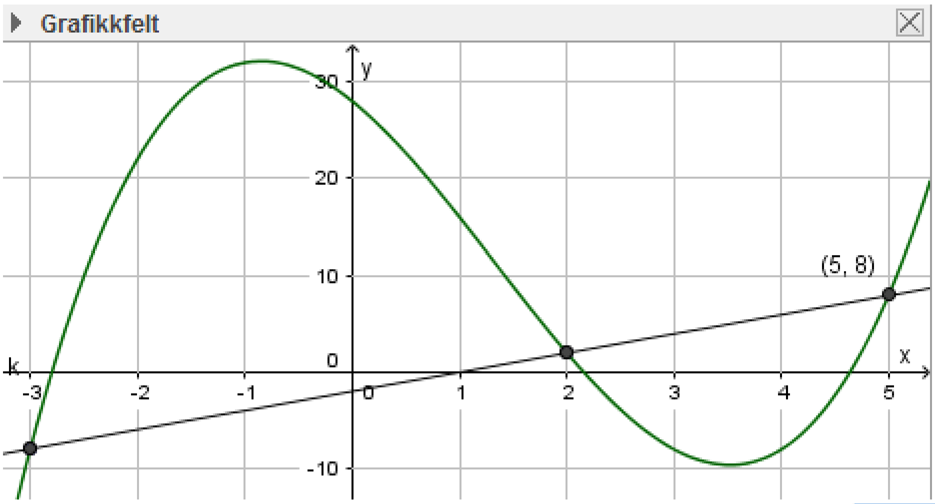
c) $\approx \; (2, 6)$

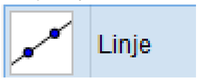
Siden arealet av ekstremalpunktet er større enn arealet i b) antar jeg at det er et toppunkt.

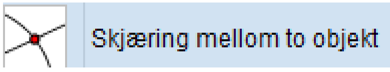
Svar: <u>Det største arealet rektangelet kan ha er 6,0</u>

Oppgave 4

a) Definerer funksjonen i GeoGebra CAS med $f(x) \coloneqq x^3 - 4x^2 - 9x + 28$.
Grafen tegnes automatisk, og jeg stiller aksene og rutenettverket:



b) Markerer punktene $(-3, -8)$ og $(2, 2)$, tegner linja gjennom dem med 

og bruker 

for å finne det tredje skjæringspunktet, $(5, 8)$.

$-3 + 2 + 5 = 4$
Svar: Det tredje skjæringspunktet mellom grafen til f og linja er $(5, 8)$ og summen av x-koordinatene til de tre skjæringspunktene er 4

c) *(OBS: Her fikk jeg et problem fordi linja fra b) var definert med navn a, så jeg kunne ikke bruke a i formelen for $g(x)$. Jeg ga linja et annet navn, så gikk det.)*
Definerer funksjonen i CAS, og bruker kommandoen for å finne linja mellom to punkter:

2	g(x):=x^3+a*x^2+b*x+c → $g(x) := x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$
3	l:=Linje[(s, g(s)),(t,g(t))] → $\ell:\ y = -s\,t^2 + x\,(s^2 + t^2 + a\,s + a\,t + s\,t + b) - s^2\,t - a\,s\,t + c$

Svar: Linja har ligning $y = -st^2 + x(s^2 + t^2 + as + at + st + b) - s^2t - ast + c$

d) Her har jeg kuttet av deler av y-koordinaten, siden bildet ble for stort:

4	Skjæring[l,g(x)] → $\{(s, a\,s^2 + b\,s + c + s^3), (t, a\,t^2 + b\,t + c + t^3), (-a - s - t, -a^2\,s$
5	s+t+(-a-s-t) → $-a$

Svar: Det siste skjæringspunktet har $x = -a - s - t$, og summen av x.koordinatene er $-a$.