Utdanningsdirektoratet

Eksamen

27.11.2015

REA3024 Matematikk R2

Ny eksamensordning

Del 1:
3 timar (utan hjelpemiddel) /
3 timer (uten hjelpemidler)

Del 2:
2 timar (med hjelpemiddel) /
2 timer (med hjelpemidler)

Minstekrav til digitale verktøy på datamaskin:

- Grafteiknar/Graftegner
- CAS

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 5 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (4 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 5 \cdot \cos(2x)$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$

c) $h(x) = 5e^{-x} \cdot \sin(2x)$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Bestem integrala

a) $\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx$

Oppgåve 3 (3 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} \quad , \quad x \in [0, \ln 3]$$

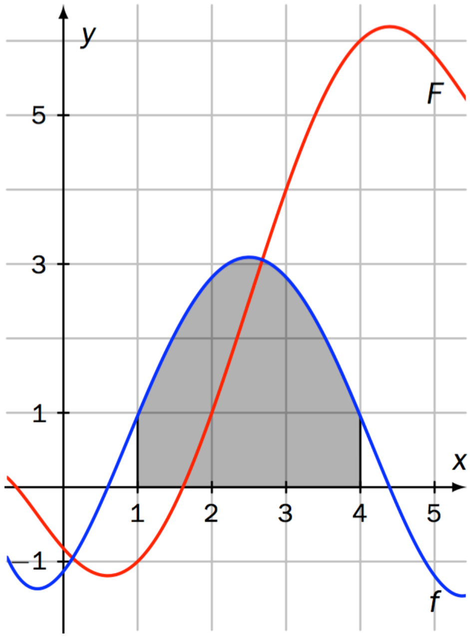
Vi roterer grafen til f $360°$ om x-aksen.

Vis at volumet V av omdreiingslekamen blir $V = \frac{8}{3}\pi$

Oppgåve 4 (4 poeng)

Figuren viser grafane til funksjonane F og f .

Det er gitt at $F'(x) = f(x)$



a) Bruk figuren til å bestemme $F'(4)$.

b) Bruk figuren til å bestemme arealet av det markerte flatestykket.

Oppgåve 5 (5 poeng)

Ei kuleflate er gitt ved likninga

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

a) Vis at punktet $P(4, 1, 2)$ ligg på kuleflata.

b) Bestem sentrum og radius til kula.

c) Bestem ei likning for tangentplanet til kula i punktet P.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Desse formlane er gitt:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

a) Bruk formlane ovanfor til å uttrykkje $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$ ved $\sin x$ og $\cos x$.

b) Vis at $\sin(3x) = 3\sin x - 4(\sin x)^3$

Oppgåve 7 (6 poeng)

Punkta $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, 4)$ og $C(-2, 3, 1)$ er gitt.

a) Bestem ved rekning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Forklar at C ikkje ligg på linja gjennom A og B.

c) Bestem ei likning for planet α gjennom A, B og C.

d) Avgjer om punktet $D(2, 2, 3)$ ligg i α.

Oppgåve 8 (3 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y^2 \cdot y' = x \qquad , \qquad y(0) = 2$$

Oppgåve 9 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n):\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x) \quad , \quad x \in [0, \rightarrow\rangle$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f for $x \in [0, 3\pi]$.

b) Bestem nullpunkta til f i intervallet $[0, 3\pi]$.

c) Bestem topp- og botnpunkta på grafen til f i intervallet $\langle 0, 3\pi \rangle$.

d) Bestem arealet avgrensa av grafen til f og x-aksen mellom $x = 0$ og $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Oppgåve 2 (3 poeng)

Vis at $y = 5e^{-\frac{x}{3}} \cdot \sin(2x)$ er ei løysing av differensiallikninga

$$9y'' + 6y' + 37y = 0 \qquad , \qquad y(0) = 0 \;\text{ og }\; y'(0) = 10$$

Oppgåve 3 (6 poeng)

Vi skal i denne oppgåva studere nærmare $f(x)$ som er gitt i oppgåve 1 i Del 2.

a) Vis at nullpunkta til f i oppgåve 1 dannar ei aritmetisk talfølgje $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Bestem a_{20}.

b) Vis at maksimalverdiane til f i oppgåve 1 dannar ei geometrisk talfølgje $b_1, b_2, b_3, \ldots$
Bestem b_5.

c) Grunngi at den uendelege rekkja $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ konvergerer. Bestem summen av rekkja.

Oppgåve 4 (3 poeng)

Ei kule K har sentrum i $S(-1, 0, 1)$ og radius $\sqrt{21}$.

Ei linje ℓ går gjennom punkta $A(7, -2, 5)$ og $B(15, -4, 9)$.

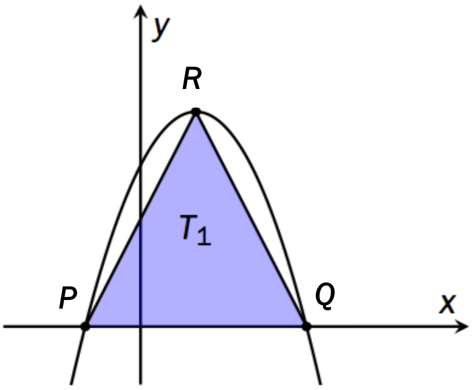
Bestem skjeringspunkta mellom linja ℓ og kula K.

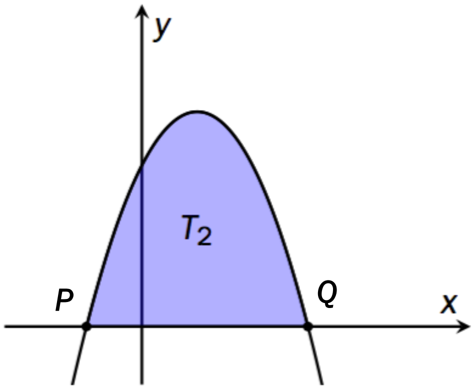
Oppgåve 5 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a < 0 \quad \text{og} \quad c > 0$$

Grafen har toppunkt i R. Sjå skissa nedanfor.





a) Forklar at grafen til f skjer x-aksen i punkta

$$P\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right) \quad \text{og} \quad Q\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$$

der P ligg til venstre for Q.

b) Bruk CAS til å vise at arealet T_1 til $\triangle PQR$ er gitt ved

$$T_1 = \frac{(b^2-4ac)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$$

c) Bestem arealet T_2 mellom grafen til f og x-aksen.

d) Bestem forholdet $\frac{T_1}{T_2}$.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (4 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 5 \cdot \cos(2x)$

b) $g(x) = x \cdot \sin x$

c) $h(x) = 5e^{-x} \cdot \sin(2x)$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_0^2 (x^2 - 2x + 1)\,dx$

b) $\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx$

Oppgave 3 (3 poeng)

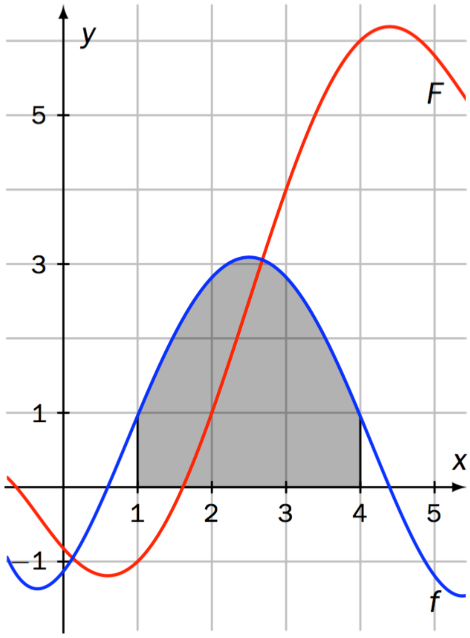
Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x} \quad , \quad x \in [0, \ln 3]$$

Vi roterer grafen til f $360°$ om x-aksen.

Vis at volumet V av omdreiningslegemet blir $V = \frac{8}{3}\pi$

Oppgave 4 (4 poeng)



Figuren viser grafene til funksjonene F og f .

Det er gitt at $F'(x) = f(x)$

a) Bruk figuren til å bestemme $F'(4)$

b) Bruk figuren til å bestemme arealet av det markerte flatestykket.

Oppgave 5 (5 poeng)

En kuleflate er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 4z - 11 = 0$$

a) Vis at punktet $P(4, 1, 2)$ ligger på kuleflaten.

b) Bestem sentrum og radius til kulen.

c) Bestem en likning for tangentplanet til kulen i punktet P.

Oppgave 6 (4 poeng)

Følgende formler er gitt:

$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

a) Bruk formlene ovenfor til å uttrykke $\sin(2x)$ og $\cos(2x)$ ved $\sin x$ og $\cos x$.

b) Vis at $\sin(3x) = 3\sin x - 4(\sin x)^3$

Oppgave 7 (6 poeng)

Punktene $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, 4)$ og $C(-2, 3, 1)$ er gitt.

a) Bestem ved regning vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

b) Forklar at C ikke ligger på linjen gjennom A og B.

c) Bestem en likning for planet α gjennom A, B og C.

d) Avgjør om punktet $D(2, 2, 3)$ ligger i α.

Oppgave 8 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y^2 \cdot y' = x \qquad , \qquad y(0) = 2$$

Oppgave 9 (3 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden

$$P(n):\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x)=5e^{-\frac{x}{3}}\cdot\sin(2x) \quad , \quad x\in\left[0,\rightarrow\right\rangle$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f for $x\in\left[0,\,3\pi\right]$.

b) Bestem nullpunktene til f i intervallet $\left[0,\,3\pi\right]$.

c) Bestem topp- og bunnpunktene på grafen til f i intervallet $\left\langle 0,\,3\pi\right\rangle$.

d) Bestem arealet begrenset av grafen til f og x-aksen mellom $x=0$ og $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Oppgave 2 (3 poeng)

Vis at $f(x)=5e^{-\frac{x}{3}}\cdot\sin(2x)$ er en løsning av differensiallikningen

$$9y''+6y'+37y=0 \quad , \quad y(0)=0 \;\text{ og }\; y'(0)=10$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Vi skal i denne oppgaven studere nærmere $f(x)$ som er gitt i oppgave 1 i Del 2.

a) Vis at nullpunktene til f i oppgave 1 danner en aritmetisk tallfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$
Bestem a_{20}.

b) Vis at maksimalverdiene til f i oppgave 1 danner en geometrisk tallfølge $b_1, b_2, b_3, \ldots$
Bestem b_5.

c) Begrunn at den uendelige rekken $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ konvergerer. Bestem summen av rekken.

Oppgave 4 (3 poeng)

En kule K har sentrum i $S(-1, 0, 1)$ og radius $\sqrt{21}$.

En linje ℓ går gjennom punktene $A(7, -2, 5)$ og $B(15, -4, 9)$.

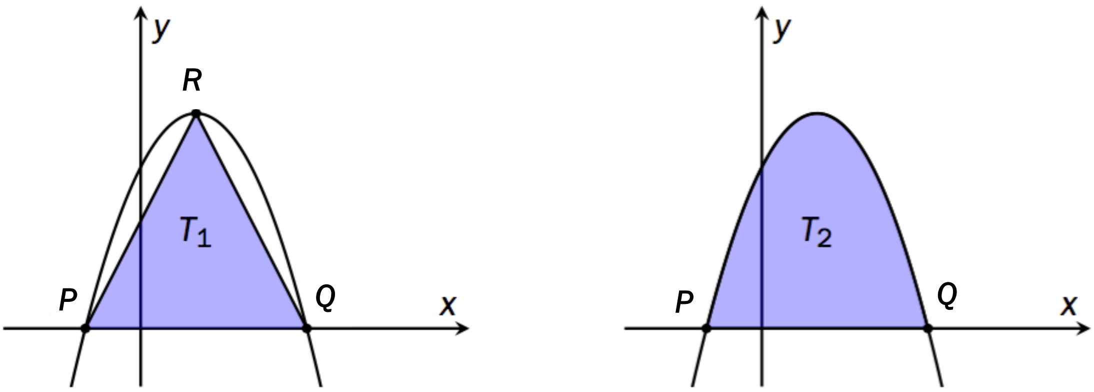
Bestem skjæringspunktene mellom linjen ℓ og kulen K.

Oppgave 5 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a < 0 \quad \text{og} \quad c > 0$$

Grafen har toppunkt i R. Se skissen nedenfor.



a) Forklar at grafen til f skjærer x-aksen i punktene

$$P\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\, 0\right) \quad \text{og} \quad Q\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\, 0\right)$$

der P ligger til venstre for Q.

b) Bruk CAS til å vise at arealet T_1 til $\triangle PQR$ er gitt ved

$$T_1 = \frac{(b^2-4ac)\cdot\sqrt{b^2-4ac}}{8a^2}$$

c) Bestem arealet T_2 mellom grafen til f og x-aksen.

d) Bestem forholdet $\frac{T_1}{T_2}$.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet