Løsningsskisse

REA3022 – Matematikk R1

29.05.2013

DEL 1

Oppgave 1 (2 poeng)

$$A'(r) = 2\pi r$$

som er omkretsen til en sirkel

$$V'(r) = 4\pi r^2$$

som er overflata til ei kule.

Oppgave 2 (3 poeng)

a

$$g'(x) = 3 \cdot (\ln u)' \cdot u'$$

der $u = x^2 - 1$ er kjernen.

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \frac{6x}{x^2 - 1}$$

b

$$h'(x) = \frac{(2x^2)' \cdot e^x - (2x^2) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}$$

som er regelen for den deriverte av en funksjon som kan skrives som en brøk.

$$h'(x) = \frac{e^x \cdot 4x - e^x \cdot 2x^2}{e^{2x}} = 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = 2xe^{-x}(2 - x)$$

Oppgave 3 (5 poeng)

a Regner ut $P(1)$:

$$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$$

som skulle vises.

b

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$$
$$\underline{-(x^3 - x^2)}$$
$$-5x^2 + 11x$$
$$\underline{-(-5x^2 + 5x)}$$
$$6x - 6$$
$$\underline{-(6x - 6)}$$
$$0$$

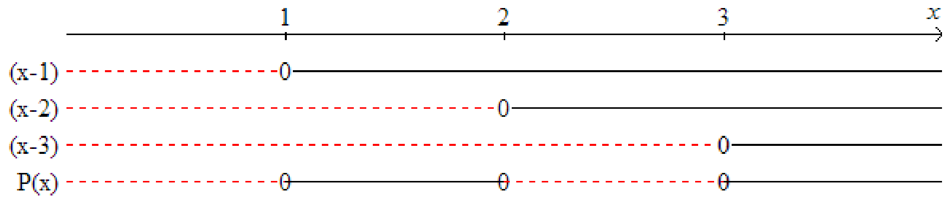
Vi ser at

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Slik at $P(x)$:

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

c



$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$$

$$\mathcal{L} = <\leftarrow, 1> \cup <2, 3>$$

Oppgave 4 (2 poeng)

$$\ln(a^2 \cdot b) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 2\ln a + \ln b - 2\ln a - (\ln 1 - \ln b) = 2\ln b \text{ eller } \ln b^2$$

Oppgave 5 (2 poeng)

Kontinuerlig for D_f.

Deriverbar for $D_f \setminus \{2\}$.

Oppgave 6 (3 poeng)

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$
$$f''(x) = 6x + 12$$

Bestemmer $f''(x) = 0$ for å bestemme vendepunktet:

$$6x + 12 = 0$$
$$x = -2$$

Vendepunktet blir da: $\big(-2, f(-2)\big)$.

Vendetangenten:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Siden $a = -2$ må vi bestemme:

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) = 12 - 24 = -12$$
$$f(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 2 = 14$$

og vi får at vendetangenten har likning:

$$y = -12\big(x - (-2)\big) + 14 = -12x - 24 + 14$$
$$y = -12x - 10$$

som var det som skulle vises.

Oppgave 7 (3 poeng)

a

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [2,3] \cdot [-6,4] = 2 \cdot (-6) + 3 \cdot 4 = 0$$

siden $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ er $\vec{a} \perp \vec{b}$

b

$$[3,11] = k \cdot [2,3] + t \cdot [-6,4]$$

Det gir følgende likningssett:

$$2k - 6t = 3$$
$$3k + 4t = 11$$

Løses ved f.eks. ved å finne t fra den første likningen og sette inn for t i den andre likningen:

$$6t = 2k - 3$$
$$t = \frac{1}{3}k - \frac{1}{2}$$

Innsatt i den andre likningen:

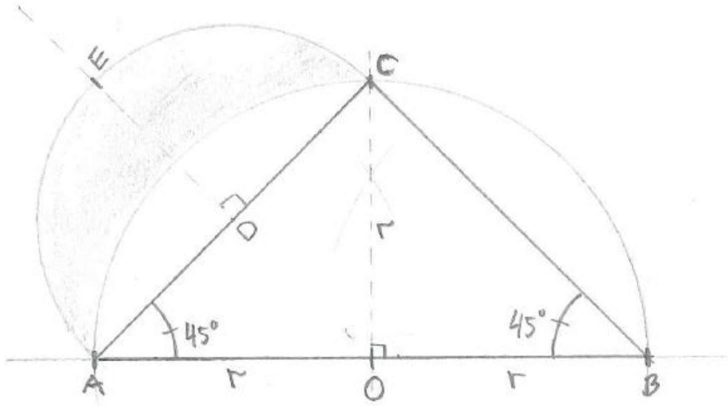
$$3k + 4\left(\frac{1}{3}k - \frac{1}{2}\right) = 11$$
$$\frac{13}{3}k = 13$$
$$k = 3$$

og som gir:

$$t = \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Oppgave 8 (4 poeng)

a



① Avsetter O på et linjestykke.

② Slår en sirkel om O med radius 5 cm. Avsetter A og B der sirkelen skjærer linjestykke.

③ Oppreiser en normal i O. Normalen skjærer sirkelen i C.

④ Oppreiser en normal i midtpunket D på AC.

⑤ Slår en sirkel om D med radius DA = DC.

⑥ Normalen på AC gjennom D skjærer sirkelen om D i E.

b

$$A_H = \frac{1}{2}A_{sirkel_D} - \frac{1}{4}A_{sirkel_O} + A_{\Delta AOC}$$

Vi ser at det er nok å vise:

$$\frac{1}{2}A_{sirkel_D} = \frac{1}{4}A_{sirkel_O}$$

fordi da vil:

$$A_H = A_{\Delta AOC}$$

Vi må bestemme radius i sirkelen om D $r_D = AD$:

$$r_D = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 + r^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}r$$

$$\frac{1}{2}A_{sirkel_D} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$$

og

$$\frac{1}{4}A_{sirkel_O} = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Med andre ord:

$$A_H = A_{\Delta AOC}$$

DEL 2

Oppgave 1 (7 poeng)

a Fordi $f(x)$ har nullpunkt for $x = -1, x = 1$ og $x = 3$ kan vi skrive

$$f(x) = a(x-1)(x+1)(x-3) = a(x^2-1)(x-3)$$

Bestemmer a når $(0, 12)$ ligger på grafen til $f(x)$

$$a(-1)(-3) = 12$$
$$a = 4$$

b Likningen til tangenten i punktet $(0, 12)$kan vi finne ved å bruke $f'(0)$:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x - 4$$
$$f'(0) = -4$$

Likningen til tangenten finner vi å sette inn i ett-punktsformelen:

$$y = -4(x-0) + 12$$
$$y = -4x + 12$$

c Vi kan løse likningen:

$$4(x^2-1)(x-3) = -4(x-3)$$
$$(x^2-1)(x-3) = -(x-3)$$
$$(x^2-1)(x-3) + (x-3) = 0$$
$$(x-3)\big((x^2-1)+1\big) = 0$$
$$(x-3)(x^2) = 0$$
$$x = 0 \ \vee x = 3$$

Så punktet er:

$$\big(3, f(3)\big) = (3, 0)$$

Oppgave 2 (6 poeng)

a Midtpunktsetningen gir oss:

$$M_1 = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

Tilsvarende for de andre midtpunktene:

$$M_2 = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4, 3)$$
$$M_3 = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(2, \frac{5}{2}\right)$$

b Parameterframstilling for linja gjennom AM_2 har retningsvektor $\overrightarrow{r_\ell} = [4-1, 3-1] = [3,2]$

$$\ell: \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 1 + 2s \end{cases}$$

Tilsvarende for linja mellom CM_1, som har retningsvektor $\overrightarrow{r_m} = \left[3-3, \frac{3}{2}-4\right] = \left[0, -\frac{5}{2}\right] = -\frac{5}{2}[0,1]$

$$m: \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 + t \end{cases}$$

c Kan bestemmes ved å finne skjæringspunktet mellom ℓ og m:

Bestemmer verdien til s fra x koordinaten:

$$1 + 3s = 3$$

$$s = \frac{2}{3}$$

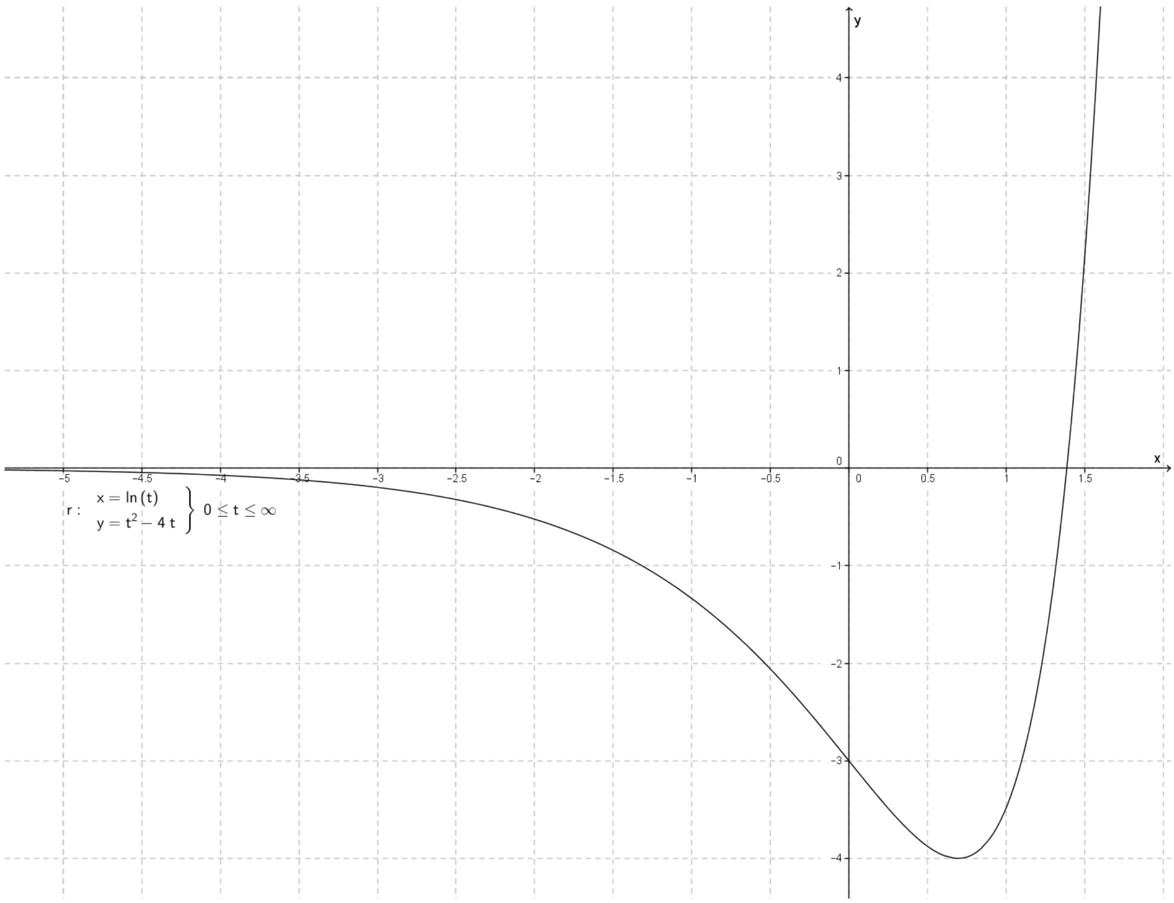
Siden m bare har x verdi 3, regner vi ut tilhørende verdi for y:

$$y = 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$$

Punktet T har koordinater: $\left(3, \frac{7}{3}\right)$.

Oppgave 3 (7 poeng)

a



Skjæring med x-aksen når $y = 0$:

$$t^2 - 4t = 0$$

$$t(t-4) = 0$$

$$t = 4$$

siden $t > 0$. Det gir skjæring med x-aksen for:

$$x = \ln 4$$

Skjæring med y-aksen når $x = 0$:

$$\ln t = 0$$

$$t = e^0$$

$$t = 1$$

Som gir skjæring med y-aksen for:

$$y = 1^2 - 4 \cdot 1 = 3$$

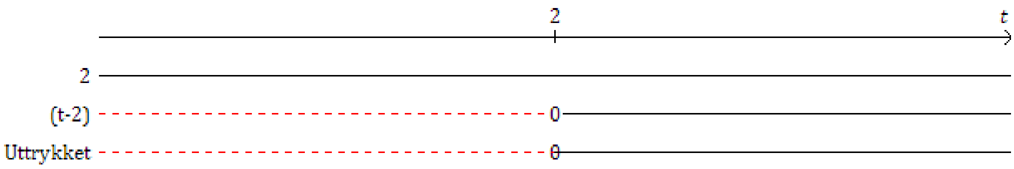
b

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[\frac{1}{t}, 2t - 4\right]$$

Nullpunkt når y-koordinaten er lik 0:

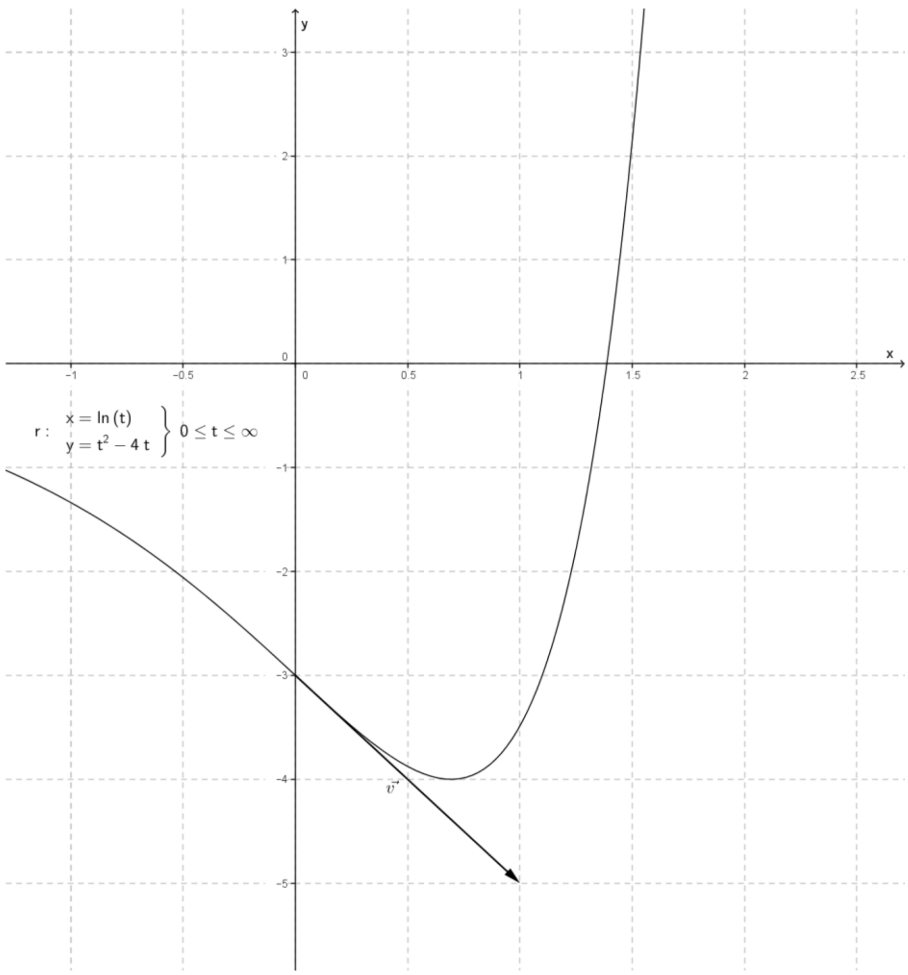
$$2t - 4 = 0$$

$$t = 2$$



$t = 2$ er parameter for bunnpunkt. Vi har bunnpunkt for $\vec{r}(2)$:

$$(\ln 2, -4)$$



c

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \left[-\frac{1}{t^2}, 2\right]$$

Grenseverdien til $\vec{a}(t)$ når $t \to \infty$ blir:

$$\lim_{t\to\infty} \vec{a}(t) = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{t^2}, 2\right] \to [0, 2]$$

Partikkelen vil til slutt få kun akselerasjon i positiv y-retning med størrelse 2.

Oppgave 4 (8 poeng)

a Vi ser først at ved hjelp av pytagoras har vi følgende uttrykk for y:

$$y^2 = 5^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{25 - x^2}$$

Arealet T til rektanglet:

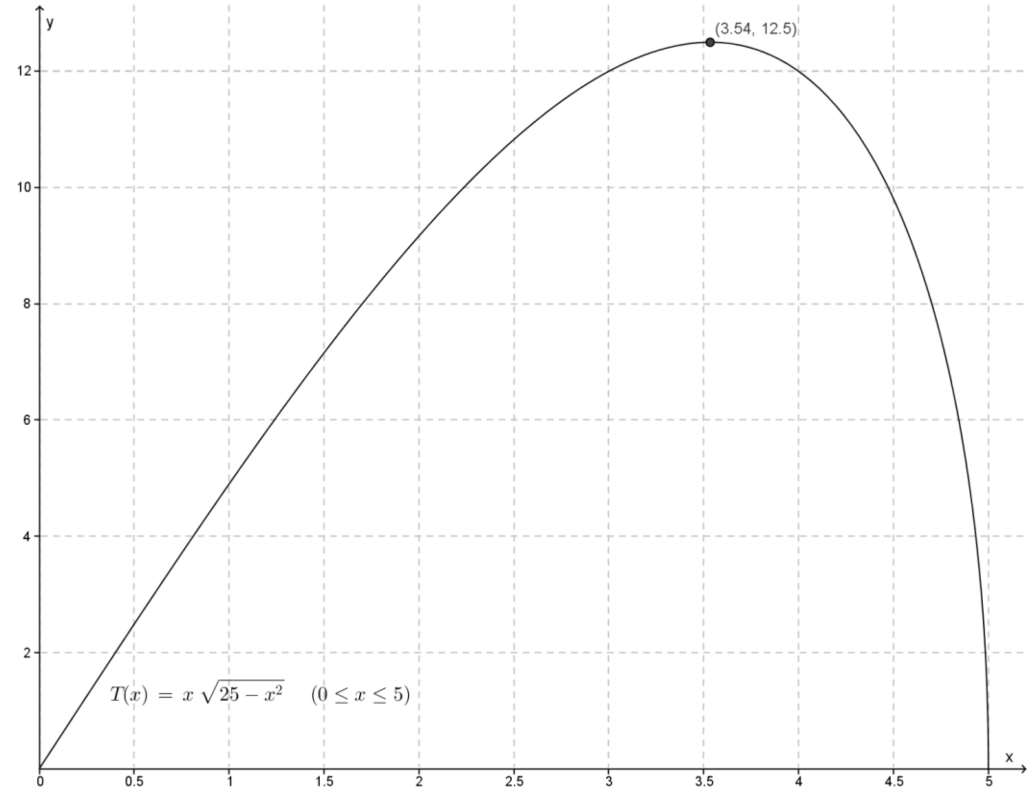
$$T(x) = x \cdot y$$

$$T(x) = x \cdot \sqrt{25 - x^2}$$

som skulle vises.

Verdien til $x \in [0, 5]$, siden lengden må være positiv og ikke lengre en radius i sirkelen.

b Tegner grafen til $T(x)$ og bestemmer ekstremalpunkt med Geogebra:



Eventuelt kan vi finne $T'(x)$, og bestemme for hvilke x vi har $T'(x) = 0$ for $x \in [0, 5]$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3.54$$

Vi finner verdien for y ved Pytagoras (fra oppgave a):

$$y = \sqrt{25 - \frac{5}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{50 - 25}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Vi ser at når arealet er størst er $x = y$, når rektangelet er et kvadrat.

c Omkretsen finner vi ved å bestemme:

$$O(x) = 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2x + 2\sqrt{25 - x^2}$$

som var det som skulle vises.

Ved hjelp av Geogebra bestemmer vi $O'(x)$:

$$O'(x) = \frac{2\sqrt{25 - x^2} - 2x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Videre bestemmer vi nullpunktene til $O'(x)$. Geogebra gir oss

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

Den største omkretsen har rektangelet når $x = y = \frac{5}{\sqrt{2}}$, altså det er et kvadrat.

Oppgave 5 (6 poeng)

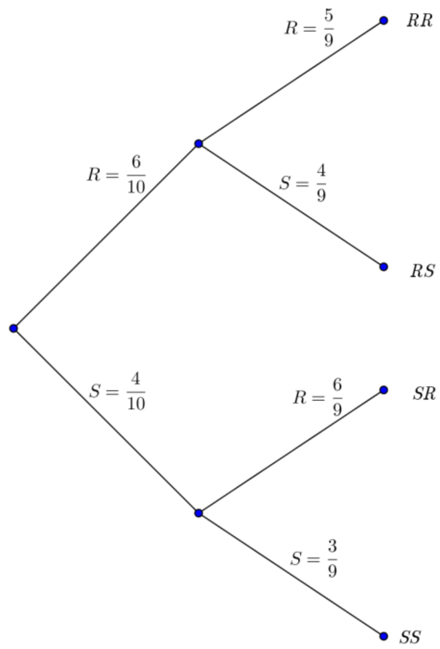
Illusterer med et valgtre, vist til høyre.

Observerer at:

$A = \{RS, SR\}$

$B = \{RR, SS\}$

$B = \bar{A}$



a

$$P(A) = P(RS) + P(SR) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

b Siden A og B er komplementære hendelser kan $P(B)$ bestemmes slik:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

c Setter antall svarte kuler lik x, og vet samtidig at $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ skal være oppfylt. Det gir følgende likning:

$$\frac{6}{(x+6)} \cdot \frac{x}{(x+5)} + \frac{x}{(x+6)} \cdot \frac{6}{(x+5)} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 + 11x + 30 = 24x$$

$$x^2 - 13x + 30 = 0$$

$$(x-3)(x-10) = 0$$

Likningen har løsningene:

$$x = 3 \vee \quad x = 10$$

Det kan være 3 eller 10 svarte kuler i esken.

Oppgave 6 (2 poeng)

Omformer til:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Som gir to tilfeller:

① $x \neq n$, som gir oss løsningen:

$$\lg x = 2$$

$$x = 100$$

② $x = n$ som er løsning for $x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$

Likningen har derfor løsningene:

$$x = 100 \;\vee\; x = n \quad , \qquad n \in \mathcal{N}$$