

**Del 1: uten hjelpemidler 3 timer  
(9:00 – 12:00)**

### Oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{2x} + x \, dx &= \left[ \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} [(e^{2(2)} + 2^2) - (e^{2(0)} + 0^2)] \\ &= \frac{1}{2} [e^4 + 4 - 1] = \frac{1}{2} (e^4 + 3)\end{aligned}$$

Vi vet at  $e = 2,178$

$$\frac{1}{2} (2^4 + 3) < I < \frac{1}{2} (3^4 + 3) \Leftrightarrow 9,5 < I < 41,5$$

b)

$$\int \frac{\sin(\ln(x))}{x} \cdot dx$$

Vi bruker variabelskifte (u-substisjon)

$$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

Som gir  $dx = x \cdot du$

Insetting i integralet:

$$\int \frac{\sin(u)}{x} \cdot x \, du = \int \sin(u) \, du = -\cos(u) + C = -\cos(\ln x) + C$$

### Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) \, dx = \int 2 \cdot x^{-2} \, dx \\ &= 2 \cdot \left( \frac{1}{-1} \right) \cdot x^{-1} + C = -\frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

Bruker punktet (2, 2) for å finne C:

$$f(2) = 2 \Rightarrow -\frac{2}{2} + C = 2$$

$$-1 + C = 2 \Rightarrow C = 3$$

Funksjonsuttrykket blir:  $f(x) = -\frac{2}{x} + 3$

**b)**

Finner skjæringspunktene mellom grafene:

$$g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} - 4 = 0$$

Multipliserer med x:

$$x^2 + 3 - 4x = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

Faktorisering (sum = -4, produkt = 3):

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x = 1 \text{ eller } x = 3$$

Vi ser at h er over g for x mellom 1 og 3 ved å sjekke

$$g(2) = 2 \text{ og } h(2) = -\frac{3}{2} + 4 = 2,5$$

Beregner arealet ved integrasjon:

$$\text{Areal} = \int_1^3 h(x) - g(x) dx = \int_1^3 -\frac{3}{x} + 4 - x dx = \left[ -3 \ln(x) + 4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3$$

$$= \left( -3 \ln(3) + 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 \right) - \left( -3 \ln(1) + 4 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right)$$

$$= \left( -3 \ln(3) + 12 - \frac{9}{2} \right) - \left( -0 + 4 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -3 \ln(3) + 12 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - 4 = -3 \ln(3) + 12 - 4 - 4 = 4 - 3 \ln(3)$$

$$\approx 4 - 3 \ln(e) = 4 - 3 = 1$$

### Oppgave 3

**a)**

Vi bruker enhetsformelen til å finne sin(v)

$$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$$

$$\sin^2 v + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 v = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin v = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

Siden v er i 4. kvadrant, er sin v negativ:

$$\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Beregning av tan v:

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

**b)**

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dette gir grunnløsningene:

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \vee \quad \frac{\pi}{3}x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi \cdot k$$

$$x = \frac{1}{2} + 6k \quad \text{eller} \quad x = -\frac{1}{2} + 6k$$

Verdier i intervallet  $< 0, 10 >$ :

$$k = 0 \text{ i (1): } x = \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \text{ i (1): } x = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2} = 6,5$$

$$k = 1 \text{ i (2): } x = -\frac{1}{2} + 6 = \frac{11}{2} = 5,5$$

Løsninger e:  $x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right\}$

## Oppgave 4

**a)** Fra grafen ser vi:

- Amplitude  $A = \frac{y_{maks} - y_{min}}{2} = \frac{1 - (-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2$
- Likevektslinje  $d = \frac{y_{maks} + y_{min}}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$
- Periode: Avstanden mellom to etterfølgende topper eller bunner.

$$P = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{så} \quad c = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

- Første skjæring med likevektslinje på vei oppover etter  $y=0$  er

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \phi = -cx_0 = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(x) = A \sin(cx + \varphi) + d = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 2 \cos(x) - 1$$

## Oppgave 5

Formelen for volumet av et omdreininglegeme om x-aksen er:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 f^2 dx = \pi \int_1^3 (2x - 1)^2 dx = \pi \int_1^3 4x^2 - 4x + 1 dx = \\ &= \pi \cdot \left( \left[ \frac{4}{3} \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + x \right]_1^3 \right) \\ &= \pi \cdot \left( \left[ \frac{4}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \right] - \left[ \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 1 \right] \right) \\ &= \pi \cdot \left( [4 \cdot 9 - 18 + 3] - \left[ \frac{4}{3} - 2 + 1 \right] \right) \\ &= \pi \cdot \left( [36 - 18 + 3] - \left[ \frac{4}{3} - 1 \right] \right) = \pi \cdot \left( 21 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \pi \cdot \left( \frac{63}{3} - \frac{1}{3} \right) = \pi \cdot \frac{62}{3} \approx 62 \end{aligned}$$

i passende måleenhet

Man kan bekrefte svaret ved å bruke formelen for volumet av ei kjeGLE

Stor kjeGLE:

$$H = 3 - 0,5 = 2,5 = \frac{5}{2} \text{ og } r = 5$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{125\pi}{6}$$

Liten kjeGLE (som går fra  $x = 0,5$  til  $x = 1$ ) har

høyde  $h = 1 - 0,5 = 0,5$  og

radius  $r = f(1) - f(0,5) = 1 - 0 = 1$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Volum} = \frac{125\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{126\pi}{6} = \frac{62\pi}{3}$$

## Oppgave 6

a)

Selma bygger et tårn av kvadratiske treplater. Første plate har sidelengde 5 m. Hver ny plate er 0,1 m kortere enn platen under.

Dette er en aritmetisk rekke med første ledd  $a_1 = 5,0$

Og differanse  $d = -0,1$

$$5 + 4,9 + 4,8 + \dots + 0$$

Maksimalt antall plater:

Sidelengden kan ikke være negativ eller null. Vi finner  $n$  når  $a_n > 0$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$5 + (n - 1)(-0,1) > 0$$

$$5 - 0,1n + 0,1 > 0$$

$$5,1 > 0,1n$$

$$n < \frac{5,1}{0,1} = 51$$

Det kan maksimalt bli 50 treplater i tårnet (den 51. platen ville hatt sidelengde 0).

b)

Sidelengdene representerer en uendelig geometrisk rekke med første ledd  $L_1 = \sqrt{19}$

Og kvotient  $k = 100\% - 10\% = 90\% = 0,9$

Arealet til platene vil også danne en uendelig geometrisk rekke med første ledd  $A_1 = 19m^2$

$$\text{Og kvotient } k = \frac{L_2^2}{L_1^2} = \frac{(0,9 \cdot L_1)^2}{(L_1)^2} = 0,9^2 = 0,81$$

Siden  $|k| < 1$ , konvergerer rekken:

$$S = \frac{A_1}{1 - k} = \frac{19}{1 - 0,81} = \frac{19}{0,19} = 100$$

Det samlede arealet av platene i tårnet til Vilfred kan maksimalt bli 100 m<sup>2</sup>.

## Oppgave 7

Gitt et plan  $\alpha$  ved likningen:  $2x - 5y + 4z = -4$

Punktene  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(2, 0, -2)$  og  $C(-1, 2, 2)$  ligger i planet.

a) Vi setter koordinatene til D inn i planlikningen:

$$2(3) - 5(1) + 4(-1) = -4$$

$$6 - 5 - 4 = -4$$

$$-3 = -4$$

Siden begge sidene er ikke like, ligger punktet D ikke i planet  $\alpha$ .

b) Vi finner to vektorer i planet:

$$\overrightarrow{AB} = [2 - 1, 0 - 2, -2 - 1] = [1, -2, -3]$$

$$\overrightarrow{AC} = [-1 - 1, 2 - 2, 2 - 1] = [-2, 0, 1]$$

Kryssproduktet  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ :

+	-	+
$e_x$	$e_y$	$e_z$
1	-2	-3
-2	0	1

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{e_x}(-2 - 0) - \overrightarrow{e_y}(1 - 6) + \overrightarrow{e_z}(0 - 4)$$

$$= -2\overrightarrow{e_x} + 5\overrightarrow{e_y} - 4\overrightarrow{e_z} = [-2, 5, -4]$$

Siden vektoren  $[-2, 5, -4]$  en parallell vektor til  $[2, -5, 4]$  (bare motsatt retning), er  $[2, -5, 4]$  en normalvektor. Alle vektorer som er parallelle med en normalvektor til et plan er også normalvektorer til planet.

c) Likningen for kuleflaten:  $x^2 + y^2 + z^2 - 18y + 2z + k = 0$

Bruke fullending kvadratmetode for å gjøre om uttrykkene til fullstendige kvadrater:

$$x^2 + (y^2 - 18y + \left(\frac{18}{2}\right)^2 - \left(\frac{18}{2}\right)^2) + (z^2 + 2z + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2) + k = 0$$

$$x^2 + (y - 9)^2 + (z + 1)^2 - 81 - 1 + k = 0$$

$$x^2 + (y - 9)^2 + (z + 1)^2 = 82 - k$$

Sentrum er  $(0, 9, -1)$ .

**d)** Linjen går gjennom sentrum  $S(0, 9, -1)$  og står vinkelrett på planet  $\alpha$  (siden den tangerer i P).

Retningsvektoren til linjen er normalvektoren til planet:  $\vec{r} = [2, -5, 4]$ .

Parametrfremstilling:

$$x = 0 + 2t = 2t$$

$$y = 9 - 5t$$

$$z = -1 + 4t$$

**e)**

Punktet P er skjæringspunktet mellom linjen og planet.

Setter parameteruttrykkene inn i planlikningen:

$$2(2t) - 5(9 - 5t) + 4(-1 + 4t) = -4$$

$$4t - 45 + 25t - 4 + 16t = -4$$

$$45t - 49 = -4 \Rightarrow 45t = 45 \Rightarrow t = 1$$

Koordinatene til P (sett  $t=1$  i parameterfremstilling til linjen):

$$x = 2t = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y = 9 - 5t = 9 - 5 \cdot 1 = 4$$

$$z = -1 + 4t = -1 + 4 \cdot 1 = 3$$

$$P = (2, 4, 3)$$

Punktet P ligger også på kuleflaten da kan vi sette den i kulelikningen for å finne k

$$x^2 + (y - 9)^2 + (z + 1)^2 = 82 - k$$

$$2^2 + (4 - 9)^2 + (3 + 1)^2 = 82 - k$$

$$4 + 25 + 16 = 82 - k$$

$$45 = 82 - k \Rightarrow k = 82 - 45 = 37$$

Eller slik

Avstanden fra  $S(0, 9, -1)$  til  $P(2, 4, 3)$  er radius r:  $\overline{SP} = [2 - 0, 4 - 9, 3 - (-1)] = [2, -5, 4]$

$$r^2 = |\overline{SP}|^2 = 2^2 + (-5)^2 + 4^2 = 4 + 25 + 16 = 45$$

Fra kulelikningen i (c) har vi  $r^2 = 82 - k$ .

$$45 = 82 - k \Rightarrow k = 37$$

## Oppgave 8

- f) Elevens bevis er ikke gyldig fordi eleven beviser at påstanden gjelder for et spesifikt eksempel med to gitte vektorer. Et matematisk bevis for en generell påstand må vise at sammenhengen gjelder for alle mulige ortogonale vektorer, ikke bare ett enkelt tilfelle.

Selv om påstanden stemte for vektorene  $[4, 0, 0]$  og  $[0, 0, 3]$ , men det utelukker ikke at det finnes andre vektorer der påstanden kanskje ikke gjelder.

g)

Vi bruker definisjonen av lengden til en vektor

$$\begin{aligned} |\vec{p} + \vec{q}|^2 &= (\vec{p} + \vec{q})^2 = (\vec{p} + \vec{q}) \cdot (\vec{p} + \vec{q}) = \\ &= (\vec{p})^2 + (\vec{q})^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} = (|\vec{p}|)^2 + (|\vec{q}|)^2 + 2 \cdot \vec{p} \cdot \vec{q} \end{aligned}$$

Siden vektorene  $p$  og  $q$  er ortogonale (vinkelrette på hverandre), er skalarproduktet

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$$

Vi setter dette inn i uttrykket:

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = (|\vec{p}|)^2 + (|\vec{q}|)^2 + 0 = (|\vec{p}|)^2 + (|\vec{q}|)^2$$

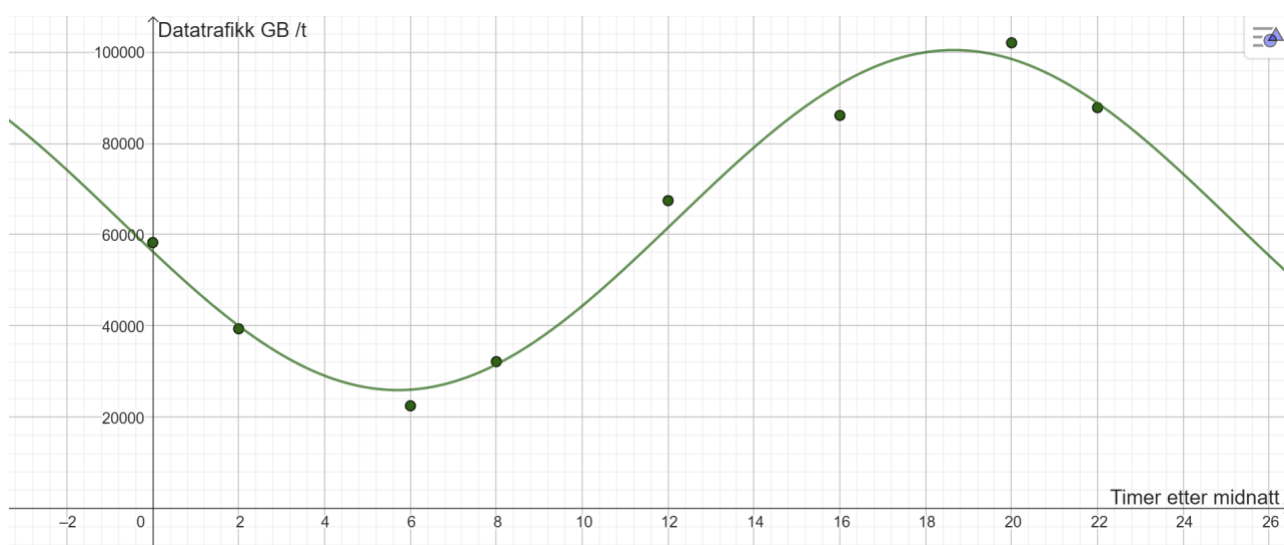
Hvilket skulle bevises.

## Del 2: Med hjelpemidler 2 timer (12:00 – 14:00)

### Oppgave 1

a) Vi løser oppgaven i algebrafelt i GeoGebra. Vi lager liste med punkter og bruker trigonometrisk regresjon. Modellen S er gitt nedenfor

<input checked="" type="radio"/>	$l1 = \{(0, 58280), (2, 39400), (6, 22550), (8, 32200), (12, 67450), (16, 86110), (20, 102007), (22, 87810)\}$
<input checked="" type="radio"/>	a)
<input checked="" type="radio"/>	$S(x) = \text{RegSin}(l1)$ $= 63196.6079 + 37213.6566 \sin(0.2426 x - 2.9556)$



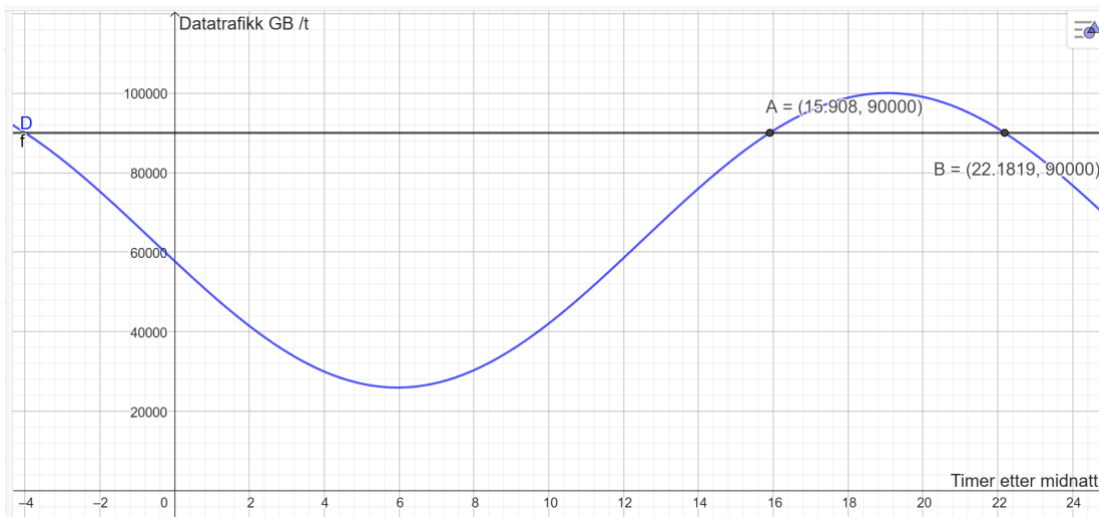
Vi ser at modellen passer godt til datasettet.

b) Vi løser oppgaven via algebrafelt og graftegner

vi tegner linjen  $y=90000$  og finner skjæring mellom den og grafen til D.

Datatrafikken er over 90000 gb/t mellom omtrent 16 og 22 timer etter midnatt (kl 15 og  $0,908 \cdot 60 = 55 \text{ min}$  og kl 22 og  $0,1819 \cdot 60 = 11 \text{ min}$ )

<input checked="" type="radio"/>	b)
<input checked="" type="radio"/>	$D(t) = 63000 + 37000 \sin(0.24 t - 3)$
<input checked="" type="radio"/>	$f: y = 90000$
<input checked="" type="radio"/>	$A = \text{Skjæring}(D, f, (15.908, 90000))$ $= (15.908, 90000)$
<input checked="" type="radio"/>	$B = \text{Skjæring}(D, f, (22.1819, 90000))$ $= (22.1819, 90000)$



c) Vi bruker CAS til å løse oppgaven. Datatrafikken er øker størst i vendepunktet (dobbelderivert=0)

Datatrafikken øker raskest ved 12,5 timer etter midnatt og den øker da med 8880 (gb/t) /t (altså gigabit per time per time)

```

/ D(t)
1 → 37000 sin(6/25 t - 3) + 63000
2
3 {D''(t) = 0, t > 0, t < 24}
4 Løs: {t = 25/2}
5 $3
6 ≈ {t = 12.5}
7 D'(12.5)
8 → 8880

```

Vi kan løse oppgaven også i algebrfelt ved å finne toppunktet til den deriverte (punkt E på grafen).

99 c)

$D'(t) = D'(t)$

$= 8880 \cos\left(\frac{6}{25} t - 3\right)$

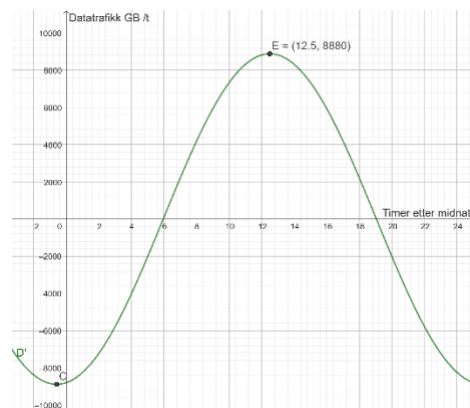
Ekstremalpunkt( $D'(t)$ , -3.3372, 25.349)

$= C = (-0.59, -8880)$

$E = (12.5, 8880)$

$a = D(12.5)$

$= 63000$



d) Vi finner totalmengden av data som ble overført ved å integrere  $D(t)$  mellom 0 og 24 (rad 6). Vi finner også totalmengden som ble overført mellom kl 8 og 16 på samme måte (rad 7). Vi finner prosenten i rad 8

31,5 % av total datamengden som ble overført i løpet av døgnet ble overført i løpet av arbeidsdagen.

6	$\int_0^{24} D(t) dt$	$\approx 1502454.0329$
7	$\int_8^{16} D(t) dt$	$\approx 473762.6038$
8	$\frac{473762.6038}{1502454.0329} \cdot 100$	$\approx 31.5326$

## Oppgave 2

a) Her er en kode som skriver ut de første 6 leddene i rekken med 5 som første ledd

```

: a = 5
  N = 6
  for i in range(1,N+1):
    print(a)
    a = (a-1)**2
5
16
225
50176
2517530625
6337960442777829376

```

Vi ser at leddene vokser og vokser. Noe som tyder på at rekken konvergerer ikke for  $a_1 = 5$

b) Vi lager et Python-program som gir oss n ledd og summen av de n første leddene for forskjellige verdier for første ledd

```

for a1 in range(-5,6):
    N = 6
    a = a1
    S = 0
    print(f"\nRekke med a1 = {a1}:")

    for i in range(1, N+1):
        S = S + a
        print(a, end=", ")
        a = (a - 1)**2

    print(f"\nSummen av de {N} første leddene er {S}")

```

Rekke med  $a_1 = -5$ :  
-5, 36, 1225, 1498176, 2244528330625, 5037907426973760256229376,  
Summen av de 6 første leddene er 5037907426976004786059433

Rekke med  $a_1 = -4$ :  
-4, 25, 576, 330625, 109312229376, 11949163490932612890625,  
Summen av de 6 første leddene er 11949163491041925451223

Rekke med  $a_1 = -3$ :  
-3, 16, 225, 50176, 2517530625, 6337960442777829376,  
Summen av de 6 første leddene er 6337960445295410415

Rekke med  $a_1 = -2$ :  
-2, 9, 64, 3969, 15745024, 247905749270529,  
Summen av de 6 første leddene er 247905765019593

Rekke med  $a_1 = -1$ :  
-1, 4, 9, 64, 3969, 15745024,  
Summen av de 6 første leddene er 15749069

Rekke med  $a_1 = 0$ :  
0, 1, 0, 1, 0, 1,  
Summen av de 6 første leddene er 3

Rekke med  $a_1 = 1$ :  
1, 0, 1, 0, 1, 0,  
Summen av de 6 første leddene er 3

Rekke med  $a_1 = 2$ :  
2, 1, 0, 1, 0, 1,  
Summen av de 6 første leddene er 5

Rekke med  $a_1 = 3$ :  
3, 4, 9, 64, 3969, 15745024,  
Summen av de 6 første leddene er 15749073

Rekke med  $a_1 = 4$ :  
4, 9, 64, 3969, 15745024, 247905749270529,  
Summen av de 6 første leddene er 247905765019599

Rekke med  $a_1 = 5$ :  
5, 16, 225, 50176, 2517530625, 6337960442777829376,  
Summen av de 6 første leddene er 6337960445295410423

Fra output til koden ser vi at rekken er alternerende og divergent for  $a_1 = 0, 1, 2$

Og leddene vokser mot uendelig for andre verdier av  $a_1$  både positiv og negative noe som betyr at rekken er divergent.

Det finnes ingen heltall verdi for  $a_1$  som gjør at rekken blir konvergent

### Oppgave 3

a) Vi bruker CAS til å løse oppgaven.

18:05 Thu 14 May

=  ≈  ✓  <sup>15</sup>/<sub>3.5</sub>  (( ))  <sup>7</sup>/<sub>□</sub>  x =  x ≈  f'  ∫

1  $r(t) := \left( 30t - t^2, 8 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right), 50\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2 \right)$

→  $r(t) := \left( 30t - t^2, 8 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right), 50\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2 \right)$

2 a)

3  $r(4)$

→  $(104, 2\sqrt{2\sqrt{5} + 10}, 18)$

Vi finner posisjonen etter 4 sekunder og ser at z verdien er 18 m. Flyet er 18 m over motorveien etter at nødlandingen startet.

b) Første finner vi tidspunktet for landingen som er  $t=10$  sekunder (rad 5). Vi definerer banefart som lengden av fartsvektoren

4 b)

5  $z(r(t)) = 0$

Løs:  $\{t = 10\}$

6  $v(t) := |r'(t)|$

→  $v(t) := \frac{1}{5} \sqrt{16\pi^2 \cos^2\left(\frac{1}{10}t\pi\right) + 125t^2 - 3500t + 25000}$

7  $v(10)$

≈ **10.311**

Flyet har fart på 10 m/s i det det lander på motorveien

c) Vi løser likningen  $v(t) = 14,3$  i CAS

Banefarten er 14,3 m/s ca. 8 sekunder etter nødlandingen startet

8 c)

9  $v(t) = 14.3, t = 1$

NLøs:  $\{t = 7.994\}$



## Oppgave 4

a)

- Vi plasserer vassen i et koordinatsystem horisontalt slik at x-aksen går i midten da vil  $f(x)$  gi avstanden fra midtaksen og ut til innsiden av vassen. Dette er altså den indre radiusen i vassen.
- Vi utleder en generell modell for vassen der vi uttrykker parameterne ved hjelp av indre radius i bunnen ( $r_1$ ) og største indre radius ( $r_2$ ).
- Parametere:

Likevektslinje (d): Gjennomsnittet av radier.  $d = \frac{r_2 + r_1}{2}$

Amplitude (A): Avviket fra midten.  $A = \frac{r_2 - r_1}{2}$

Periode (c): For en vase på 20 cm med én sving, settes  $c = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ .

Fase ( $\varphi$ ): For at vassen skal starte bredt ( $r_2$ ) ved bunnen ( $x=0$ ), settes  $\varphi = \pi/2$ .

Generelt funksjonsuttrykk:

$$f(x) = \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10}x + \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{10}x\right) + \left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)$$

- Vi ønsker et volum på  $1500 \text{ cm}^3$ . Vi kan bruke glidere i GeoGebra for å finne  $r_1$  og  $r_2$  som oppfylle kravet
- Hvis vi velger en bunndiameter på 8 cm ( $r_1 = 4 \text{ cm}$ ), en størst diameter på 12 cm ( $r_2 = 6 \text{ cm}$ ) får vi et volum på  $1522 \text{ cm}^3$  som er da omtrent 1,5 L.

17:35 Thu 14 May

GeoGebra interface showing sliders for  $r_1$  and  $r_2$ , and a function input field with the derived formula and its integral result.

Sliders:

- $r_1 = 4$  (range -5 to 5)
- $r_2 = 6$  (range -5 to 10)

Function input field:

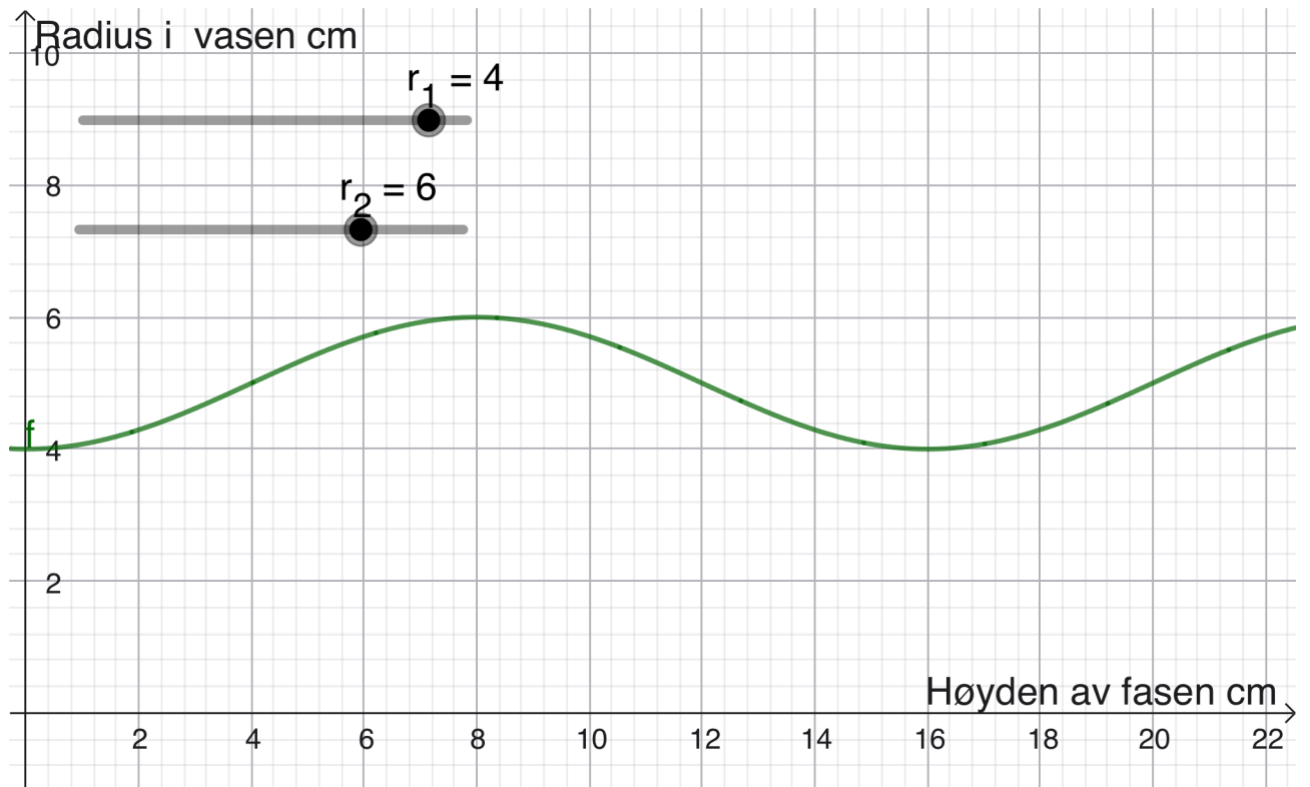
$$f(x) = \frac{r_2 - r_1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{r_2 + r_1}{2}$$

$$= \frac{6 - 4}{2} \sin\left(\frac{\pi}{8}x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{6 + 4}{2}$$

Integral result:

$$V = \pi \int_0^{20} (f(x))^2 dx$$

$$= 1522.212$$



Vi kan vise vassen i 3D ved å bruke overflate kommando i GeoGebra

$n = 359^\circ$

$0^\circ$   $360^\circ$

$a = \text{Overflate}(f, n, x\text{Akse})$

$$= \left( \begin{array}{c} \left( \frac{6-4}{2} \sin\left(\frac{\pi}{8} u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{6+4}{2} \right) \cos(v) \\ \left( \frac{6-4}{2} \sin\left(\frac{\pi}{8} u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{6+4}{2} \right) \sin(v) \end{array} \right)$$
