

Eksamen R2 vår 2026, løsningsforslag

Oppgave 1

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^2 (e^{2x} + x) dx &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 + \frac{1}{2} \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \\ &= \frac{1}{2} e^4 + 2 - \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} e^4 + \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} (e^4 + 3)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx & \quad \begin{cases} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{cases} \\ &= \int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \int \sin(u) \cdot \frac{du}{dx} dx = \int \sin(u) du = -\cos(u) + C \\ &= \underline{\underline{-\cos(\ln x) + C}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

- f definert for $x > 0$
- $f'(x) = \frac{2}{x^2}$
- grafen til f gjennom $(2, 2)$

a) Bestemme $f(x)$:

• For en gitt C er $f(x) = \int f'(x) dx$

$$\begin{aligned} \int f'(x) dx &= \int \frac{2}{x^2} dx = \int 2x^{-2} dx = -2x^{-1} + C \\ &= \underline{\underline{-\frac{2}{x} + C}} \end{aligned}$$

• Bestemmer C ved å bruke $(2, 2)$:

$$f(2) = -\frac{2}{2} + c = 2$$

$$-1 + c = 2$$

$$c = 3$$

◦ Dermed er $f(x) = -\frac{2}{x} + 3, x > 0$

b) $g(x) = x$ og $h(x) = -\frac{3}{x} + 4, x > 0$

◦ Finne areal avgrenset av grafene til g og h :

◦ Skjæringspunkter gitt ved

$$g(x) = h(x)$$

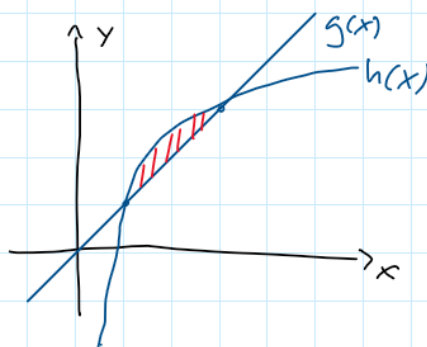
$$x = -\frac{3}{x} + 4$$

$$x^2 = -3 + 4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\underline{x=1 \vee x=3}$$



◦ Arealet blir $\int_1^3 (h(x) - g(x)) dx = \int_1^3 \left(-\frac{3}{x} + 4 - x\right) dx$

$$= \left[-3 \ln x + 4x - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3$$

$$= -3 \ln 3 + 12 - \frac{1}{2} \cdot 9 - \left(-3 \ln 1 + 4 - \frac{1}{2} \right)$$

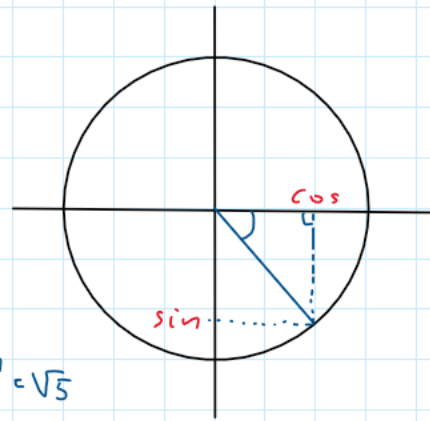
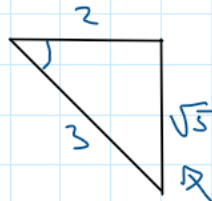
$$= -3 \ln 3 + 12 - \frac{9}{2} - 0 - 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \underline{\underline{-3 \ln 3 + 4}}$$

Oppgave 3

a) $\cos v = \frac{2}{3}$, v i 4. kvadrant:

• Formlik med



• Det gir

$$\sin v = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

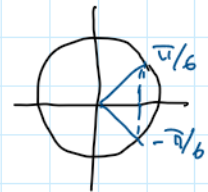
$$\tan v = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

b) $2 \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \sqrt{3}$, $x \in \langle 0, 10 \rangle$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{3}x = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$



$$x = \frac{1}{2} + k \cdot 6 \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2} + k \cdot 6$$

Gir $\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{11}{2}, \frac{13}{2} \right\}$

Oppgave 4

$$f(x) = A \cdot \sin(cx + \varphi) + d$$

$$A = 2 \text{ (leser av amplituden)}$$

$$d = -1 \text{ (leser av likevektslinja)}$$

$$c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ (leser av perioden } T = \pi)$$

Finner φ ved å bruke at $f(0) = -3$:

$$2 \cdot \sin(2 \cdot 0 + \varphi) - 1 = -3$$

$$\sin(\varphi) = -1$$

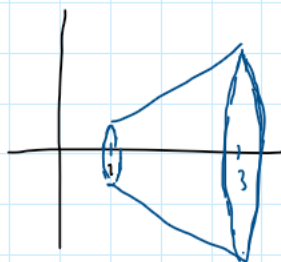
$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Dermed er $f(x) = \underline{\underline{2 \sin(2x - \frac{\pi}{2}) - 1}}$

Oppgave 5

$$f(x) = 2x - 1$$

$$V = \int_1^3 \pi \cdot f(x)^2 dx$$



$$= \pi \int_1^3 (2x - 1)^2 dx = \pi \int_1^3 (4x^2 - 4x + 1) dx$$

$$= \pi \left[\frac{4}{3} x^3 - 2x^2 + x \right]_1^3 = \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 27 - 2 \cdot 9 + 3 - \frac{4}{3} + 2 - 1 \right)$$

$$= \pi \left(36 - 18 + 4 - \frac{4}{3} \right) = \pi \left(22 - \frac{4}{3} \right) = \pi \cdot \frac{62}{3} = \underline{\underline{\frac{62}{3} \pi}}$$

Oppgave b

a) Selma:



Aritmetisk rekke: $5 + 4,9 + 4,8 + \dots + (5 - 0,1(n-1))$
 $a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$$a_n = 5 - 0,1(n-1) = 5,1 - 0,1n$$

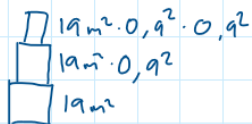
Den siste triplaten har lengde 0,1m. Antallet blir da

gitt ved $5,1 - 0,1n = 0,1$

$$0,1n = 5,0$$

$$\underline{\underline{n = 50}}$$

b) Vilfred:



Geometrisk rekke: $19 + 19 \cdot 0,9^2 + 19 \cdot 0,9^4 + 19 \cdot 0,9^6 + \dots + 19 \cdot (0,9^2)^{n-1}$

$$a_n = 19 \cdot (0,9^2)^{n-1} = 19 \cdot \underbrace{0,81^{n-1}}_k$$

Konvergerer siden $|k| < 1$. Summen er

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{19}{1-0,81} = \frac{19}{0,19} = \underline{\underline{100}}$$

Det samlede arealet blir maksimalt $100\text{m}^2 //$

Oppgave 7

$$\alpha: 2x - 5y + 4z = -4$$

$A(1, 2, 1)$, $B(2, 0, -2)$ og $C(-1, 2, 2)$ i planet.

a) Er $D(3, 1, -1)$ i α ? Setter inn og sjekker:

$$2 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 6 - 5 - 4 = \underline{-3}, \text{ altså ikke } -4.$$

Dermed er D ikke i planet α //

b) Vis at $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ er en normalvektor til planet:

Har at $\vec{AB} \times \vec{AC}$ lager en normalvektor:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 1 - (-3) \cdot 0 \\ -3 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ser at $\vec{AB} \times \vec{AC} \parallel \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$, så sistnevnte er også
(siden $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$) en normalvektor //

c) Kuleflate tangerer α i P.

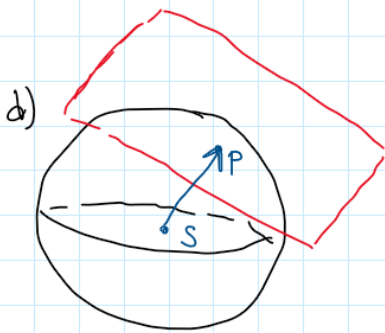
Kulelikning $x^2 + y^2 + z^2 - 18y + 2z + k = 0$

Skriver om med fullstendig kvadrat for y finne sentrum:

$$x^2 + y^2 - 18y + 81 + z^2 + 2z + 1 = -k + 81 + 1$$

$$x^2 + (y - 9)^2 + (z + 1)^2 = -k + 82$$

Gir sentrum i $(0, 9, -1)$



\vec{SP} er parallell med normalvektoren.

Linjas retningsvektor kan da settes lik normalvektoren.

Det gir

$$L: \begin{cases} x = 2t \\ y = 9 - 5t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

e) Bestemmer k ved å først finne radius til kula.

Den er lik $|\vec{SP}|$, som er lik avstanden fra S til planet.

$$\text{Det gir } |\vec{SP}| = \frac{|2 \cdot 0 - 5 \cdot 9 + 4 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \frac{|0 - 45 - 4 + 4|}{\sqrt{4 + 25 + 16}}$$

$$= \frac{45}{\sqrt{45}} = \sqrt{45}$$

Høyreside av kulelikningen, $-k + 82$, er lik r^2 :

$$-k + 82 = \sqrt{45}^2$$

$$-k + 82 = 45$$

$$\underline{\underline{k = 37}}$$

Oppgave 8

Påstand: Dersom $\vec{p} \perp \vec{q}$, er $|\vec{p} + \vec{q}|^2 = |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2$

a) Elevens bevis er ikke gyldig fordi den kun tester ett spesialtilfelle, ikke beviser påstanden generelt.

b) Bevis:

① Antar $\vec{p} \perp \vec{q}$

② Da er $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ og $\vec{q} \cdot \vec{p} = 0$

③ Bruker at for en generell vektor \vec{a} er $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$
Det gir

$$|\vec{p} + \vec{q}|^2 = (\vec{p} + \vec{q}) \cdot (\vec{p} + \vec{q})$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{p} + \underbrace{\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q} \cdot \vec{p}}_{=0, \text{ fra } ②} + \vec{q} \cdot \vec{q}$$

$$= \vec{p} \cdot \vec{p} + \vec{q} \cdot \vec{q}$$

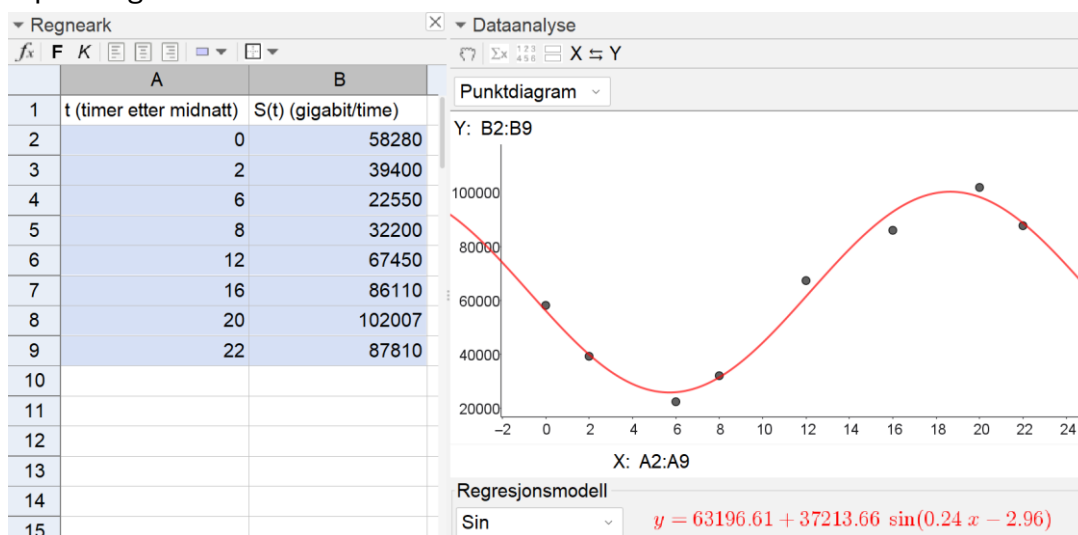
$$= \underline{\underline{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2}}$$

QED.

Eksamen R2 vår 2026, løsning Del 2

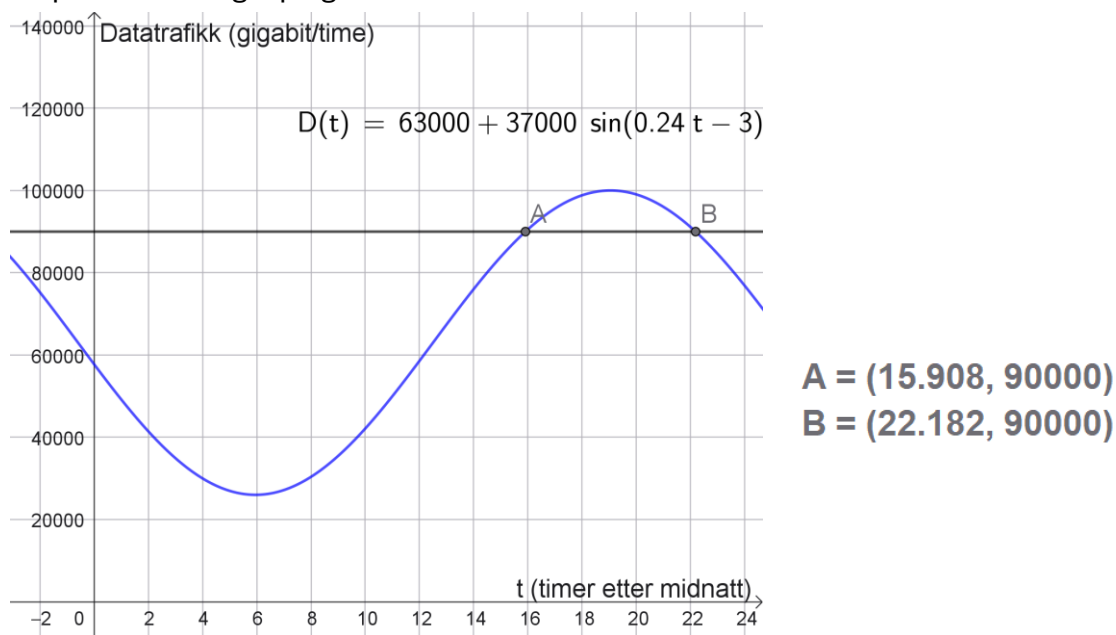
Oppgave 1

- a) Bruker Regneark og Regresjonsanalyse i GeoGebra, velger en sinus-modell som tilpasning:



Ser at modellen blir $S(t) = 63197 + 37214 \cdot \sin(0,24t - 2,96)$.

- b) Bruker graftegner i GeoGebra, legger inn linjen $y = 90000$ og tar skjæringspunkt. Se punktene A og B på grafen:



Ser at datatrafikken var mer enn 90000 gigabit/time omtrent mellom kl. 16 og kl. 22 dette døgnet.

- c) Datatrafikken økte raskest i vendepunktet, som er der den dobbeltderiverte er null. Finner at det var kl. 12:30, og økningen var da på 8880 (gigabit/time)/time.

1	$D''(t) = 0, t=12$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = 12.5\}$
2	$D'(12.5)$
<input type="radio"/>	≈ 8880

- d) Kan finne en tilnæringsverdi til den totale datamengden som ble overført mellom kl. 8 og kl. 16 ved å regne integralet av $D(t)$ i dette tidsrommet:

3	$\text{Integral}(D(t), 8, 16)$
<input type="radio"/>	≈ 473762.604

Ser at de overførte omtrent 474 terabit med data i dette tidsrommet.

Deler på den totale datamengden dette døgnet for å finne andelen:

4	$\text{Integral}(D(t), 8, 16) / \text{Integral}(D(t), 0, 24)$
<input type="radio"/>	≈ 0.315

Ser at datamengden overført mellom kl. 8 og kl. 16 var omtrent 32 % av totalen.

Oppgave 2

- a) Programkoden og resultatet:

```
1 a = 5 #startverdi
2
3 for n in range(1, 7):
4     print(n, a)
5     a = (a-1)**2
6
```

Shell ×

```
>>> %Run -c $EDITOR_CONTENT
1 5
2 16
3 225
4 50176
5 2517530625
6 6337960442777829376
```

b) Hvis rekken skal konvergere, er leddene nødt til å gå mot 0 ettersom $n \rightarrow \infty$. (selv da er det ikke gitt at rekken konvergerer, men det er iallefall et minstekrav). Om vi ser på definisjonen, $a_n = (a_{n-1} - 1)^2$, kan vi teste med litt ulike startverdier.

- Dersom $a_1 = 0$, får vi $a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1, a_5 = 0$, osv. Denne konvergerer altså ikke. Tilsvarende vil skje dersom $a_1 = 1$, da får vi $a_2 = 0, a_3 = 1$ osv.:

1	0	1	1
2	1	2	0
3	0	3	1
4	1	4	0
5	0	5	1
6	1	6	0

- Dersom $a_1 = 2$, får vi $a_2 = 1$, og så igjen $a_3 = 0, a_4 = 1$ osv.:

1	2
2	1
3	0
4	1
5	0
6	1

- Dersom $a_1 = 3$, får vi $a_2 = (3 - 1)^2 = 4$, så $a_3 = (4 - 1)^2 = 9$, osv., med stadig økende verdier. Det betyr at rekken ikke vil konvergere. Tilsvarende vil skje for alle $a_1 \geq 3$, at verdiene blir stadig økende:

1	3	1	4
2	4	2	9
3	9	3	64
4	64	4	3969
5	3969	5	15745024
6	15745024	6	247905749270529

- Dersom a_1 er negativ, blir a_2 alltid et positivt heltall. Og da faller vi inn under en av situasjonene over. Så rekken konvergerer ikke da heller.
- **Konklusjon: Denne rekken vil aldri konvergere, uansett verdi på a_1 .**
- Over er dette argumentert for dersom a_1 er heltall, som var begrensningen i oppgaveteksten. Man kan argumentere for at den aldri vil konvergere uansett, selv for desimaltall:
Dersom det skulle finnes en a_1 som gjorde at et ledd a_n til slutt nærmet seg 0, ser vi fra definisjonen at neste ledd blir $a_{n+1} \approx (0 - 1)^2 = 1$. Og da ender vi med den alternerende formen, 0 - 1 - 0 - 1 osv., som ikke konvergerer.

Oppgave 3

a) Høyden over bakken angis av z -koordinaten. Etter 4 sekunder er høyden 18 m.

1	$r(t) := (30t - t^2, 8 \sin(\pi/10 t), 50(1-t/10)^2)$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow r(t) := \left(30t - t^2, 8 \sin\left(\frac{\pi}{10} t\right), 50 \left(1 - \frac{t}{10}\right)^2 \right)$
2	$r(4)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow (104, 2\sqrt{2\sqrt{5} + 10}, 18)$

b) Flyet lander når z -koordinaten er 0. Finner dette tidspunktet, og så banefarten ved denne tiden:

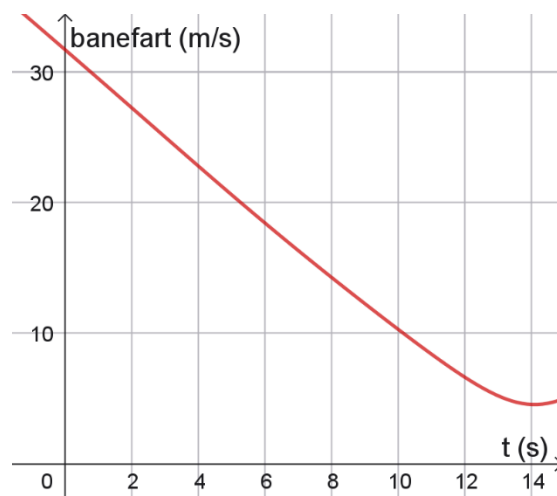
3	$50(1-t/10)^2 = 0$
<input type="radio"/>	Løs: $\{t = 10\}$
4	$\text{abs}(r'(10))$
<input type="radio"/>	≈ 10.311

Ser at banefarten da var ca. 10,3 m/s.

c) Lager en funksjon over banefarten, og finner når denne blir 14,3 m/s:

5	$v(t) := \text{abs}(r'(t))$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow v(t) := \frac{1}{5} \sqrt{16 \pi^2 \cos^2\left(\frac{1}{10} t \pi\right) + 125 t^2 - 3500 t + 25000}$
6	$v(t) = 14.3, t=1$
<input type="radio"/>	NLøs: $\{t = 7.994\}$

Ser at det er etter omtrent 8,0 s. Kontrollerer grafisk at dette kun inntreffer én gang i løpet av de første 10 sekundene:



d) Dersom fuglen skal treffe flyet, må de ha samme posisjon til samme tid. Finner først ved hvilket tidspunkt flyet er i krysningspunktet:

5	A := (131, 67, 23) <input checked="" type="radio"/> $\approx \mathbf{A := (131, 67, 23)}$
6	B := (125, 8, 25/2) <input checked="" type="radio"/> $\rightarrow \mathbf{B := \left(125, 8, \frac{25}{2}\right)}$
7	r(t) = B <input type="radio"/> Løs: $\{\mathbf{t = 5}\}$

Det er altså ved 5 sekunder. Da må fuglen være der samtidig. Lager en vektor fra A til B, og finner lengden av den. Siden fuglen flyr i 12 m/s må denne lengden i løpet av 5 sekunder være 60 m:

8	abs(Vektor(A, B)) <input type="radio"/> $\approx \mathbf{60.227}$
---	--

Lengden er akkurat ikke 60 m, så rent matematisk treffer ikke fuglen flyet. Men siden begge har en utstrekning og ikke er punkter, er det rimelig å anta at fuglen treffer flyet likevel.

Oppgave 4

Om vi legger vasen på siden, kan formen følge en sinus-funksjon, med vendepunkt i starten. Hvor stor amplitude denne funksjonen kan ha er ikke tydelig fra bildet, men vi kan f.eks. anta en amplitude på $A = 1$ cm og en likevektslinje på $d = 4,5$ cm (da blir vasen litt mer enn halvparten så «bred» som den er «lang», som kan passe med figuren). Det ser også ut som vasens form starter i vendepunktet til sinus-funksjonen, som vil gi en $\varphi = 0$.

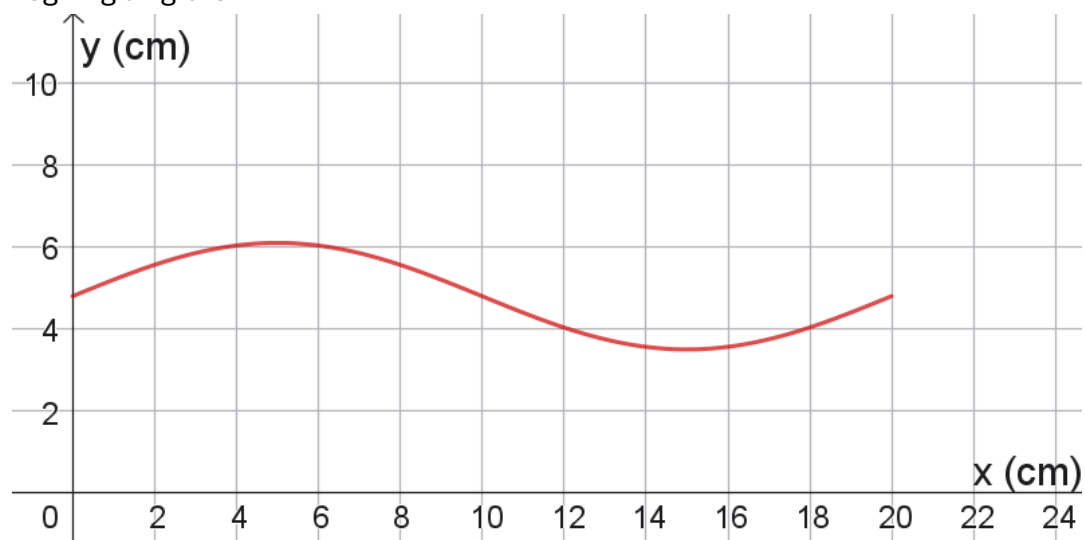
Vasen går ca. én periode i løpet av 20 cm. Det gir $c = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$.

Disse verdiene gir ikke riktig volum av vasen, så justerer noe på amplituden og likevektslinja for å få riktig volum:

1	c := pi/10 <input type="radio"/> $\approx \mathbf{c := 0.314}$
2	f(x) := 1.3*sin(c*x) + 4.8 <input checked="" type="radio"/> $\approx \mathbf{f(x) := 1.3 \sin(0.314 x) + 4.8}$
3	Integral(pi*f**2, 0, 20) <input type="radio"/> $\approx \mathbf{1500.739}$

Med amplitude på 1,3 cm og likevektslinje på 4,8 cm får vi et korrekt volum.

Tegning av grafen:



Denne er nok litt bredere i starten enn den skal være, men passer tålelig greit med opplysningene.