Løsningsforslag eksamen S2 høst 2025 oppgave 6 del 2

Oppgavetekst

Ane har en vanlig sekssidet terning. Hun ønsker å finne ut hvor mange ganger hun i gjennomsnitt må kaste terningen for å få det samme antallet øyne i to kast på rad. Hun har laget tabellen nedenfor.

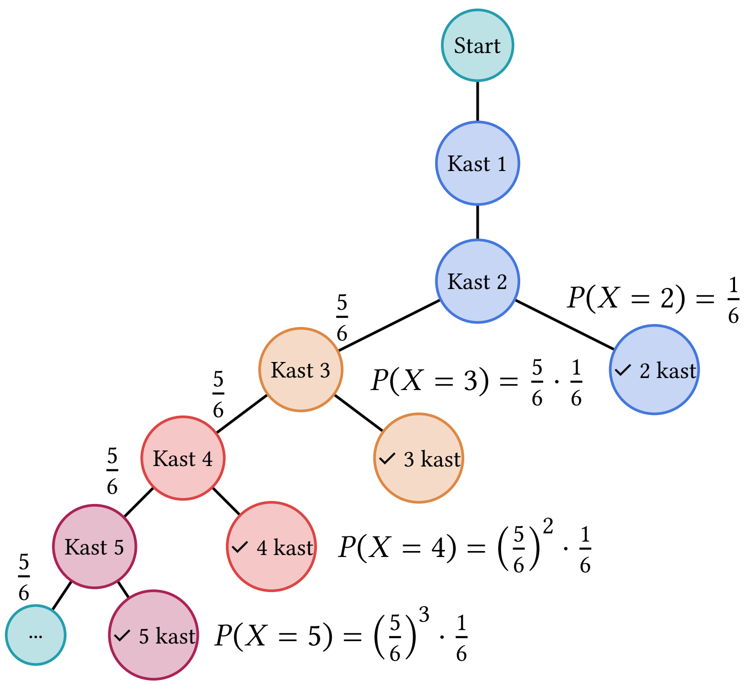
Kast nummer	1	2	3	4	5	6	**...**
Sannsynlighet for at kastet er nødvendig	1	1	$\frac{5}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	...

Forklar at

$$1 + 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \ldots$$

vil gi det forventede antallet kast Ane må gjøre for å få det samme antallet øyne i to kast på rad.

Bestem denne verdien.



Vi lar X være antall kast som trengs før vi har fått 2 like terningkast på rad. Sannsynligheten for å at et terningkast har samme antall øyne som det forrige er $\frac{1}{6}$, og sannsynligheten for at antall øyne er ulikt er $\frac{5}{6}$. Vi kan bruke multiplikasjonsprinsippet og sette opp følgende sannsynlighetsfordeling for X:

x_i	1	2	3	4	5	...	x_n
$P(X = x_i)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$	...	$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{6}$

Forventningsverdien til X vil da være

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) \\
&= 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3\cdot\frac{1}{6} + \dots \\
&= \frac{1}{6}\left(\underbrace{2\left(\frac{5}{6}\right)^0 + 3\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 4\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 5\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots}_{S}\right)
\end{aligned}
$$

Vi kaller alt inni parentesen for S, og omskriver heltallene som står foran $\frac{5}{6}$ som en sum av enere:

$$S = (1+1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 + (1+1+1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + (1+1+1+1)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots$$

Vi deler nå opp denne summen i en rekke delsummer slik at $S = \lim_{n\to\infty} S_1 + S_2 + \dots + S_n$

$$S_1 = 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$S_2 = 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^0 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$S_3 = 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$$

$$S_4 = 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \dots = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2}{\frac{1}{6}} = 6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$S_5 = 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4 + 1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \dots = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{1-\frac{5}{6}} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^3}{\frac{1}{6}} = 6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Forventningsverdien er altså

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{6}S \\
&= \frac{1}{6}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + \dots) \\
&= \frac{1}{6}\left(6 + 6 + 5 + 6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 6\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots\right) \\
&= 1 + 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots \qquad \text{Q.E.D}
\end{aligned}
$$

Beregning av forventningsverdien

Hvis vi ser bort fra det aller første leddet (1), så er dette en uendelig geometrisk rekke med $k = \frac{5}{6}$

$$s = 1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \ldots$$

Vi kan finne summen av rekka s med GeoGebra, eller med formelen for sum av uendelig geometrisk rekke:

$$s = \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 6$$

Til sammen blir altså $\mathbb{E}(X) = 1 + s = 1 + 6 = 7$.

Verdien av rekka er 7.