Eksamen 1T våren 2025

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

Nevneren til f er lik 0 bare hvis $x = -\frac{1}{2}$. For denne x-verdien er telleren til f lik -9, og dermed har vi at $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f = \pm\infty$. Altså er $x = -\frac{1}{2}$ den vertikale asymptoten til f.

Vi kan skrive f som

$$f = \frac{12x - 3}{2x + 1} = \frac{12x - 3 + 6 - 6}{2x + 1} = \frac{12x + 6}{2x + 1} - \frac{9}{2x + 1} = 6 - \frac{9}{2x + 1}$$

Dette betyr at $\lim\limits_{x \to |\infty|} f = 6$. Dermed er $y = 6$ den horisontale asymptoten til f.

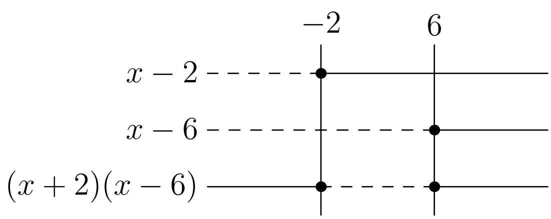
Oppgave 2

Da $2(-6) = -12$ og $2 + (-6) = -4$, er

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$

Alternativ 1

Vi lager et fortegnsskjema:



Altså er $x \in (-2, 6)$.

Alternativ 2

Da uttrykket er et andregradsuttrykk med positivt andregradsledd, vet vi at uttrykket er konvekst. Da vet vi at uttrykket er negativt mellom 0-punktene. Altså er $x \in (-2, 6)$.

Oppgave 3

Gitt

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Hvis f bare har ett nullpunkt, har vi av *abc*-formelen at

$$b^2 - 4ac = 0$$

Videre har vi at

$$f(0) = c = 9$$

Altså er

$$b^2 - 36a = 0$$

Setter vi $a = 1$, kan b være lik 6. Da er

$$f(x) = x^2 + 6 + 9$$

Oppgave 4

a) Vi ser at $x = 1$ er en løsning av ligningen. Vi polynomdividerer uttrykket med $x - 1$:

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 7x^2 - 10x + 16) : (x - 1) = x^2 - 6x - 16 \\
-&\underline{(x^3 - x^2)} \\
&\quad - 6x^2 - 10x + 16 \\
&\quad - \underline{(-6x^2 + 6x)} \\
&\qquad\quad - 16x + 16 \\
&\qquad\quad - \underline{(-16x + 16)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Da $2(-8) = -16$ og $2 + (-8) = 6$, er

$$x^2 - 6x - 16 = (x + 2)(x - 8)$$

Altså er

$$x^3 - 7x^2 - 10x + 16 = (x - 1)(x + 2)(x - 8)$$

Uttrykket over er lik 0 for $x \in -2, 1, 8$.

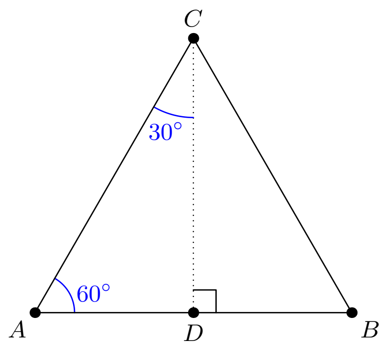
b) Av oppgave a) vet vi at f har to nullpunkt langs den positive siden av x-aksen. Og da tredjegradsutrtrykket er positivt, må f være voksende for store x-verdieer. Det må bety at figur C kan være grafen til f.

Oppgave 5

a) Da $\triangle ABC$ er likeseidet er $\angle A = \angle ACB = \angle B = 60°$. Da er $\angle ACD = 30°$, og i tillegg er $AD = 1$. Dermed har vi at

$$\sin 30° = \sin \angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60° = \cos \angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$$



b) Av arealsetningen, og da $\sin \angle A = \frac{1}{2}$, har vi at

$$\text{arealet til trekanten} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15$$

c) Av cosinussetningen, og da $\cos \angle P = \frac{1}{2}$, har vi at

$$\begin{aligned} QR^2 &= PQ^2 + PR^2 - 2PQ \cdot PR - 2\cos \angle P \\ &= 64 + 9 - 8 \cdot 3 \\ &= 49 \end{aligned}$$

Da $QR > 0$, er $QR = \sqrt{49} = 7$

Oppgave 6

Resultatet i CAS viser at ligningen er sann for alle verdier av x, noe som gjør ligningen til en identitet. En identitet er en ligning som er sann uansett hvilke verdier som gis til variablene som inngår i uttrykket.

Oppgave 7

Progrmammet gir den minste verdien til $f(x) = x^2 + 2x - 15$ for heltalls x på intervallet $[-5, 5]$. Da $5(-3) = -15$ og $5 + (-3) = 2$, er

$$f(x) = (x + 5)(x - 3)$$

Dermed har f ekstremalpunkt på midtpunktet mellom $x = -5$ og $x = 3$, som er $x = -1$. Da andregradsleddet til f er positivt, er f en konveks funksjon, og da er $x = -1$ minimumspunktet til f. Altså vil printet verdi være

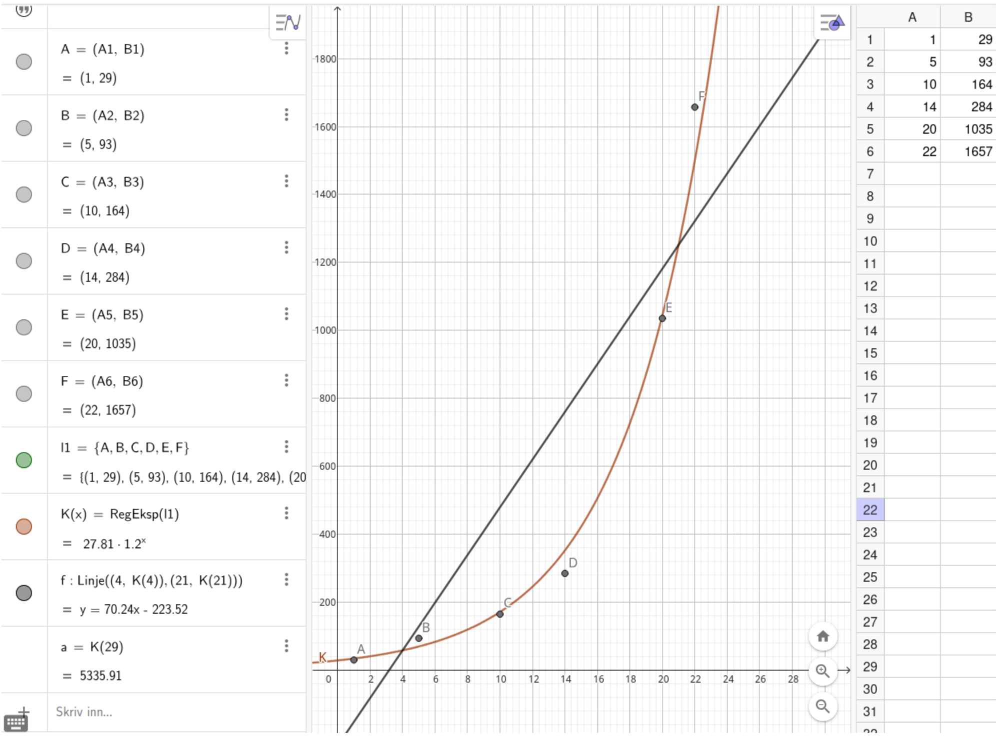
$$f(-1) = -16$$

Oppgave 1

a) Vi skriver tallene inn i GeoGebra, og bruker `RegEks` for regresjon ved en eksponentialfunksjon (linje 8).

b) Stigningstallet til linja gjennom $(4, K(4))$ og $(21, K(21))$ er 70.24 (linje 9). Dette betyr at mellom april i 2024 og september 2025 var den gjennomsnittlige økningen i antall tilfeller lik 70.24 tilfeller per måned.

c) I mai 2025 vil det bli registrert 5336 tilfeller i følge modellen (linje 10).



Oppgave 2

Vi setter antall liten sekk lik x og antall stor sekk lik y, og løser ligningssettet i CAS. Får da at det ble solgt 32 små sekker og 48 store sekker.

1	$x+y = 80$
	$\rightarrow\ \mathbf{x+y=80}$
2	$4.5x+12y = 720$
	$\rightarrow\ \frac{9}{2}x+12y=720$
3	{\$1, \$2}
	Løs: $\{\{x=32, y=48\}\}$

Oppgave 3

a) Arealet til én av de 12 trekantene er gitt i linje 1. Totalt areal lik 120 gir ligningen i linje 2. Dermed er diameteren lik $4\sqrt{10}$.

b) Vi setter den ukjente siden i trekantene lik x. Da trekantene er likebeinte, er x gitt av ligningen i linje 4. Omkretsen er dermed gitt i linje 6.

1	$\frac{1}{2} r^2 \sin(30°)$
	$\rightarrow\ \frac{1}{4} r^2$
2	12 \$1 = 120
	Løs: $\{r=-2\sqrt{10}, r=2\sqrt{10}\}$
3	$r := 2\sqrt{10}$
	$\rightarrow\ r := 2\sqrt{10}$
4	$\frac{1}{2} x = r \sin(15°)$
	Løs: $\{x = 2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}\}$
5	$2\sqrt{15} - 2\sqrt{5}$
	$\rightarrow\ -2\sqrt{5}+2\sqrt{15}$
6	$12 \cdot$ \$5
	$\rightarrow\ -24\sqrt{5}+24\sqrt{15}$

Oppgave 4

a)
```
definer funksjon antall_kvadrat(n) = n**2+2*n+1
for n<21: print antall kvadrat
```

Funksjonen for antall kvadrater kommer av at det er n^2 kvadrat som utgjør et større kvadrat, n kvadrat utgjør et større rektangel, og $n+1$ kvadrat ligger på skrå.

b)

```python
def antall_kvadrat(n):
    return n**2 + 2*n + 1

for n in range(1, 21):
    print( antall_kvadrat(n) )
```

c)

```python
def antall_kvadrat(n):
    return n**2 + 2*n + 1

forrige_sum = 0
ny_sum = 0
n = 0
while ny_sum < 1000000:
    n += 1
    forrige_sum = ny_sum
    ny_sum = forrige_sum + antall_kvadrat(n)

print(1000000-forrige_sum) # kvadrat igjen
print(n-1)  # antall figurer
```

Får at det blir igjen 15017 kvadrat når 142 figurer er lagd.

Oppgave 5

a) Bruker Excel til å fylle ut tabellen.

r	h	O	V
2	35.8	462.6	450
4	9.0	275.2	450
6	4.0	263.0	450
8	2.2	313.5	450

r	h	O	V
2	=450/(3.14*A2*A2)	=3.14*A2*A2+2*3.14*A2*B2	450
4	=450/(3.14*A3*A3)	=3.14*A3*A3+2*3.14*A3*B3	450
6	=450/(3.14*A4*A4)	=3.14*A4*A4+2*3.14*A4*B4	450
8	=450/(3.14*A5*A5)	=3.14*A5*A5+2*3.14*A5*B5	450

b) Vi har at

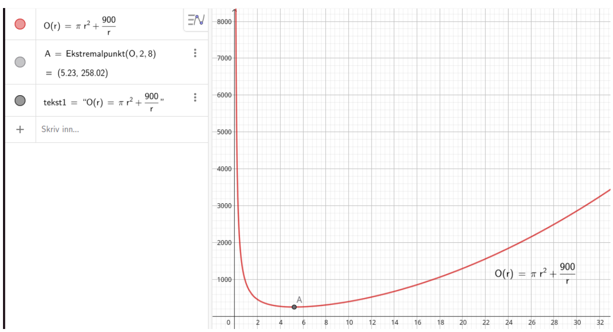
$$h = \frac{450}{\pi r^2}$$

Dermed er

$$O = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{450}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{900}{r}$$

Vi skriver dette utrykket for O inn i GeoGebra (linje 1).

c) Vi ser at O har et bunnpunkt mellom $r = 2$ og $r = 8$, og bruker GeoGebra-kommandoen `Ekstremalpunkt` til å finne at i bunnpunktet er $r \approx 5.2$ og $O \approx 258$ (linje 2). (Ut ifra funksjonsuttrykket er det åpenbart at dette er det eneste bunnpunktet for $r > 0$)



Oppgave 6

For f har vi at

- De vertikale asymptotene ser ut til å ha lik avstand til y-aksen. Velger derfor to faktorer i nevner som går mot 0 når $x = 2$ eller $x = -2$.
- Nullpunktet til f er på positiv side av x-aksen og til venstre for den positive vertikale asymptoten. Prøver derfor med $x - 1$ i teller, som gir rett form på grafen og skjæring med y-aksen på positiv side.
- Bruker GeoGebra-kommandoen `Asymptote` for å bekrefte at asymptotene er riktige (linje 3).

For g har vi at

- Funksjonen har ingen vertikal asymptote. Prøver derfor med $x^2 + 1$ i nevner for å sikre nevner forkskjellig fra 0.
- Funksjonen har et nullpunkt på negativ side av x-aksen. Prøver derfor med $x + 1$ i teller, som gir rett form på grafen og skjæring med y-aksen på positiv side.
- Bruker `Asymptote` for å bekrefte at asymptotene er riktige (linje 4).