REA3062 – Matematikk S2 H24 – Løsningsforslag

Del 1

Oppgave 1

a) Bruker delvis integrasjon,

$$\int u' \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v' \, dx$$

Setter:

$$u' = x^2 \Rightarrow u = \frac{1}{3}x^3$$

$$v = \ln x \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$$

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \boldsymbol{\frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C}$$

b) Regner ut

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t) dt$$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (3t^2 - 1) \, dt = x^3 - x - \left((-1)^3 - (-1)\right) = x^3 - x$$

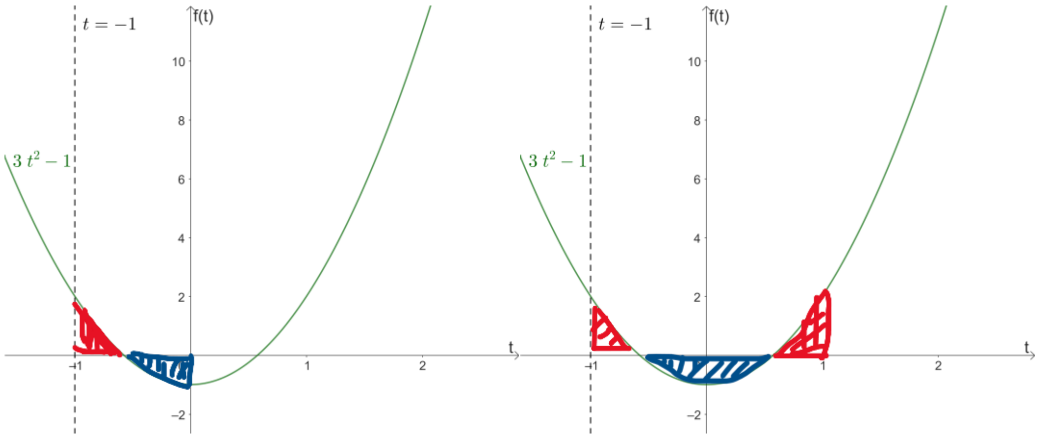
Løser deretter likningen

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1,0,1\}$$

Ettersom $x > -1$ er det to løsninger i definisjonsområdet for likningen:

$$\boldsymbol{x = 0 \lor x = 1}$$

c) Skisserer grafen til funksjonen $3t^2 - 1$



Ettersom integralet kan brukes til å finne arealet mellom en funksjon og x −aksen, avgrenset av verdier for x, viser svarene fra b) de to situasjonene som er skissert ovenfor:

1) Figuren til venstre viser situasjonen når vi finner første løsning, $x = 0$. Her er arealet over x −aksen i rødt like stort som arealet under x −aksen i blått. Da vil integralet være lik 0, siden arealet under x-aksen bidrar negativt.
2) Figuren til høyre viser situasjonen når vi finner andre løsning, $x = 1$. Her er arealet i de to røde områdene til sammen like stort som arealet av det blå området.

Siden funksjonen $f(t)$ er symmetrisk om y −aksen er også løsningene her symmetriske.

Oppgave 2

a) Leser av differansen $d = 4$, første ledd $a_1 = 3$ og siste ledd $a_n = 399$. Regner deretter ut antall ledd i rekken:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
$$399 = 3 + (n-1) \cdot 4$$
$$396 = 4n - 4$$
$$n = 100$$

Deretter kan man regne ut summen av rekken ved summeformelen for aritmetisk rekke:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \frac{3 + 399}{2} \cdot 100 = \mathbf{20100}$$

Summen av den aritmetiske rekken er 20 100.

b) Summen av en uendelig geometrisk rekke som konvergerer:

$$s = \frac{a_1}{1-k} \Leftrightarrow k = 1 - \frac{a_1}{s}$$

Setter inn fra oppgaven:

$$\boldsymbol{k} = 1 - \frac{12}{18} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

For den rekken som er beskrevet er $\boldsymbol{k} = \mathbf{\frac{1}{3}}$.

c) 0,7575757575... kan skrives som $0{,}75 + 0{,}75 \cdot \frac{1}{100} + 0{,}75 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots$

Dermed er dette en geometrisk rekke med $a_1 = 0{,}75 = \frac{3}{4}, k = \frac{1}{100}$

Summen av en uendelig geometrisk rekke kan skrives som

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$

Dermed kan summen av denne uendelige geometriske rekken skrives som

$$0{,}75757575 \ldots = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{99}{100}} = \frac{75}{99} = \frac{25}{33}$$

For å vise sammenhengen i oppgaven holder det nå å legge til 1 på begge sider av likheten:

$$1{,}75757575 \ldots = 1 + \frac{25}{33} = \frac{33+25}{33} = \mathbf{\frac{58}{33}}$$

Oppgave 3

Lager en likning ved hjelp av forventningsverdien:

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}30 + 1 \cdot 0{,}40 + 4 \cdot 0{,}10 + b \cdot 0{,}20 = 2$$

$$0{,}20 \cdot b = 2 - 0{,}80 = 1{,}20 \Rightarrow \boldsymbol{b = 6}$$

Regner ut variansen:

$$\boldsymbol{Var(X)} = (0-2)^2 \cdot 0{,}30 + (1-2)^2 \cdot 0{,}40 + (4-2)^2 \cdot 0{,}10 + (6-2)^2 \cdot 0{,}20$$

$$= 4 \cdot 0{,}30 + 0{,}40 + 4 \cdot 0{,}10 + 16 \cdot 0{,}20 = 1{,}20 + 0{,}40 + 0{,}40 + 3{,}20 = \mathbf{5{,}20}$$

Oppgave 4

a) Her kan frøene modelleres binomisk, slik at vi kan regne ut

$$\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}70 = 700$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}30} = \sqrt{210}$$

Ettersom standardavviket er mellom 14 og 15, og normalfordelingskurven vil ha 70% sannsynligheten for at et utfall ligger i intervallet $x = \mu \pm \sigma$.

Dermed er det Figur 2 som viser sannsynlighetstettheten til antall frø som spirer. (Dessuten kan det ikke spire mer enn 1000 frø, så figur 1 er åpenbart urimelig).

b) Av samme grunn som resonnementet i a), er det her **Figur 3** hvor arealet mellom 40 og 60 er ca. 70% av det totale arealet. I Figur 4 kan man gjette at det er rundt 95% av arealet, som skulle tilsvare et standardavvik på 5, som altså ikke passer med denne oppgaven.

Oppgave 5

a) Finner enhetskostnaden, $G(x)$, og grensekostnaden og løser likningen

$$G(x) = \frac{K(x)}{x} = 0{,}3x + 10 + \frac{3000}{x}$$

$$K'(x) = 0{,}6x + 10$$

$$G(x) = K'(x) \Leftrightarrow 0{,}3x + 10 + \frac{3000}{x} = 0{,}6x + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{3000}{x} = 0{,}3x \Leftrightarrow x^2 = 10\,000 \Rightarrow \boldsymbol{x = 100}$$

Siden det ikke kan produseres og selges et negativt antall enheter, finner vi at grensekostnaden er lik enhetskostnaden når det produseres 100 enheter per uke.

Det vil si at ved denne produksjonen er kostnaden ved å produsere en enhet det samme som kostnadsøkningen ved å produsere en ekstra enhet.

I praksis gir dette laveste mulige enhetskostnad, eller den *kostnadsoptimale produksjonsmengden*.

b) Lager en inntektsfunksjon ved å la inntekt være pris multiplisert med antall solgte enheter:

$$I(x) = 400x$$

Vinningsoptimal produksjonsmengde får vi nå grenseinntekt er lik grensekostnad:

$$I'(x) = K'(x)$$

$$400 = 0{,}6x + 10 \Leftrightarrow 390 = 0{,}6x \Leftrightarrow x = \frac{390}{\frac{3}{5}} = 130 \cdot 5 = \mathbf{650}$$

Bedriften må produsere og selge 650 enheter for at overskuddet skal bli størst mulig.

Del 2

Oppgave 1

a) Bruker regresjon og velger en logistisk modell. Dette er et rimelig valg, fordi man kan se for seg at Marco etter hvert når en ukentlig løpemengde som han anser som tilstrekkelig for målet om å løpe maraton. Det er ikke mulig å fortsette å øke løpemengde over en hver terskel fordi det er begrenset med tid, man skal ha restitusjon mellom øktene, og man skal prøve å unngå overbelastning og skader. Det er også naturlig at det er mulig å øke mengden ganske effektivt i starten (eksponentiell fase), jevnt i en periode (lineær fase), men at det etter hvert blir vanskeligere å øke, og stigningen vil flate ut.
Gjennomførte regresjon ved å skrive av tabellverdiene i GeoGebra og bruke regresjonsanalyseverktøyet

	A	B	C	D	E
1	1	5	10	15	20
2	14	32	80	115	145

Regresjonsmodell

Logistisk

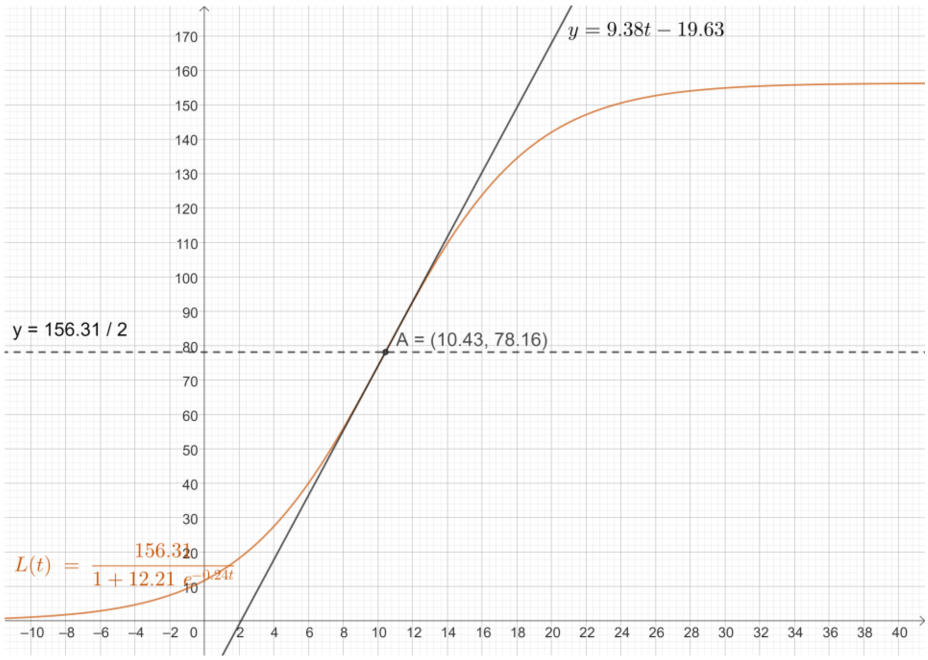
$$y = \frac{156.31}{1 + 12.21\, e^{-0.24x}}$$

Dermed kan vi skrive om variabelen til t for tid, og gi funksjonen navnet L:

$$\boldsymbol{L(t) = \frac{156,31}{1 + 12,21e^{-0,24t}}}$$

Som var modellen man skulle argumentere for i oppgaven.

b) Finner vendetangenten ved å bruke antisymmetrien til den logistiske funksjonen om vendepunktet. Vist i figuren nedenfor.
Finner skjæringspunktet ($A(10,43, 78,16)$) mellom L og linja $y = \frac{156,31}{2}$. Dette er vendepunktet.
Den høyeste økningen i løpemengde inntreffer den 11. uken.
Stigningstallet til vendetangenten er den høyeste momentane veksten til modellen. **Den høyeste økningen er på 9,4 km per uke.**



c) Den totale løpemengden blir arealet under grafen for ukentlig løping.
Bruker CAS til å finne ut når den totale løpemengden blir 500. Løser likningen

$$\int_0^T L(t)dt = 500$$

1

$$L(t) := \frac{156.31}{1 + 12.21\, e^{-0.24t}}$$

$$\rightarrow \; L(t) := \frac{15631}{1221\, e^{\frac{-6}{25}t} + 100}$$

2

$$\text{Nløs}(\text{Integral}(L(t), 0, T) = 500, T)$$

$$\rightarrow \; \{T = 11.62\}$$

Ser at Marco hadde trent i 12 uker når han fikk seg nye sko.
Gjennomsnittlig løpelengde:

3

$$\frac{1}{12} \int_0^{12} L\, dx$$

$$\approx \; 44.56$$

Marco har da løpt 44,6 km i gjennomsnitt per uke.

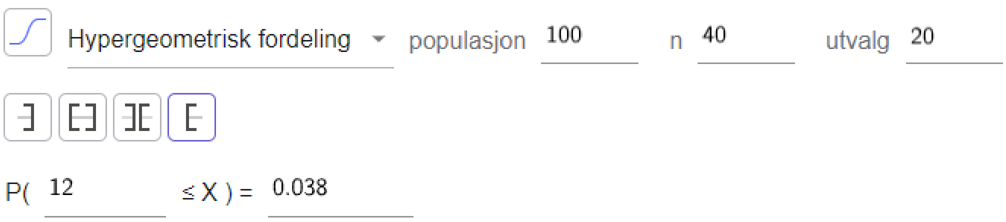
Oppgave 2

a) H_0: De har valgt 20 søkere tilfeldig.
H_1: De prioriterer å kalle inn menn til intervjuet.

Fordi det er så få kandidater som søker, vil sannsynligheten for å trekke ut en kvinne eller en mann påvirkes av tidligere utvalg, dermed har vi ikke uavhengige forsøk med konstant sannsynlighet og kan ikke regne binomisk.

Det er to grupper med søkere, og man skal finne sannsynligheten for å velge ut 12 fra den minste gruppen og 8 fra den største gruppen når man tilfeldig trekker 20 totalt. Dette problemet lar seg løse med hypergeometrisk sannsynlighet.

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra, og finner sannsynligheten for at man velger ut 12 eller flere menn når man trekker 20 kandidater tilfeldig.



Ser at sannsynligheten er 3,8%. Dermed er P-verdien lavere enn signifikansnivået.
Det er grunnlag for å si at ledelsen bevisst velger menn.

Oppgave 3

a) Dersom $x = \frac{1}{e}$ har vi kvotienten $\ln x - 1 = \ln\frac{1}{e} - 1 = -1 - 1 = -2$.
Da konvergerer ikke rekka. **Påstanden er feil.**

b) Finner først skjæringspunktene mellom funksjonene:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - ax = -x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - (a+1)x = 0$$

$$x = 0 \lor x^2 = a + 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a+1}$$

Siden $a > -1$ har vi symmetriske skjæringspunkter.
Differansen mellom funksjonene kan faktoriseres som

$$x(x - \sqrt{a+1})(x + \sqrt{a+1})$$

Dette er en tredjegradsfunksjon som er antisymmetrisk om origo, og dermed ser vi at de to avgrensede områdene er like store.

$$\left| \int_{-\sqrt{a+1}}^{0} x\left(x - \sqrt{a+1}\right)\left(x + \sqrt{a+1}\right)dx \right| = \left| \int_{0}^{\sqrt{a+1}} x\left(x - \sqrt{a+1}\right)\left(x + \sqrt{a+1}\right)dx \right|$$

Oppgave 4

a) Ser at differansen mellom hvert av leddene er et kvadrattall. Dermed har tallfølgen den rekursive formelen

$$a_{n+1} = a_n + n^2$$

```
n = 30  #Antall ledd
a = 1  #Første ledd

s = a  #Første delsum
for i in range(1,n):  #Første gjennomkjøring: a = a + 1^2, gir a_2. Siste gjennomkjøring a = a + 29^2 gir a_30
    a = a + i**2  #Den rekursive formelen fra a)
    s = s + a  #Regner neste delsum ved å legge til det nye leddet
print(s)  #Skriver ut siste delsum
```

b)

```
67455
```

Oppgave 5

a) Summen av nåverdiene av terminbeløpene skal tilsvare lånesummen.

Setter opp en likning i CAS og løser denne med hensyn på T.

1

$$\text{NLøs}\left(799273 = \text{Sum}\left(\frac{T}{1.05242^n}, n, 1, 30\right)\right)$$

$$\rightarrow \{T = 53436.8983\}$$

Terminbeløpene Ole må betale blir 53 437 kr, som var det som skulle vises.

b) Vi endrer likningen, setter tilsvarende terminbeløp som vi fant i a), endrer sluttverdi fra 30 til 25, og lar vekstfaktoren stå som ukjent.

2

$$\text{NLøs}\left(799273 = \text{Sum}\left(\frac{53437}{k^n}, n, 1, 25\right)\right)$$

$$\rightarrow \{k = 1.0442\}$$

Dersom Ole skal klare dette må den nye renten være på 4,42%.

c) Setter opp en ny likning, hvor summen av nåverdier regnes i to omganger, en for de første 12 terminene. Det er uklart hvilke renter som kan forventes i denne oppgaven, men antar for enkelhets skyld at den forespeilede rentenedgangen ikke kommer og bruke renten fra a):

3

$$\text{NLøs}\left(799273 = \sum_{n=1}^{12} \frac{53437}{1.05242^n} + \sum_{n=13}^{x} \frac{53437 \cdot 1.05^{n-12}}{1.05242^n}\right)$$

$$\rightarrow \{x = 23.6394\}$$

Ser at med denne nedbetalingsplanen vil Ole klare å betale ned lånet på 24 år.

Alternativ fremgangsmåte:

Regner ut restlånets verdi etter 12 år. Kan da la termintallet starte på 1 igjen, som kanskje kommuniserer bedre.

4

$$799273 - \sum_{n=1}^{12} \frac{53437}{1.05242^n}$$

$$\approx 332045.9897$$

5

$$332045.9896828 \cdot 1.05242^{12}$$

$$\approx 613009.708$$

6

$$\text{Nløs}\left(613010 = \text{Sum}\left(53437 \cdot \frac{1.05^n}{1.05242^n}, n, 1, x\right)\right)$$

$$\approx \{x = 11.6394\}$$

Ser at etter 12 år kan restlånet betales ned i løpet av ytterligere 12 perioder.

Da klarer Ole å betale ned hele lånet på 24 år.

Oppgave 6

a) Definerer etterspørselsfunksjonen i CAS og regner ut etterspørsel dersom prisen per enhet er 30 kr.

1 $E(p) := 300\ e^{-0.01p}$

$\approx$ $\mathbf{E(p) := 300\ e^{-0.01p}}$

2 $E(30)$

$\approx$ $\mathbf{222.25}$

Svaret forteller oss at dersom varen koster 30 kr per enhet, vil bedriften selge 222 av denne varen.

b) Inntekten kan uttrykkes som funksjon av antall solgte enheter x som:

$$I(x) = p \cdot x = p(x) \cdot x$$

Regner ut pris som funksjon av etterspørsel ($E(p) = x$):

3 Løs$(E(p) = x,\ p)$

$\rightarrow$ $\left\{\mathbf{p = -100\ \ln\left(\frac{x}{300}\right)}\right\}$

Dermed blir inntektsfunksjonen

$$\boldsymbol{I(x) = -100x \cdot \ln\left(\frac{x}{300}\right)}$$