Innledning

Sannsynlighet er et ”nytt” fagområder i matematikk. Grunnlaget ble lagt av Fermat og Pascal rundt 1654 og utviklingen har fortsatt til langt ut på 1900 tallet. Sannsynlighet brukes i dag blant annet innen spillteori, forsikring og økonomi, medisin, moderne fysikk, for å nevne noen områder.

Deterministisk eller tilfeldig

Hendelser som kan forutsies kalles **deterministiske**. Hendelser vi ikke kan forutsi, som for eksempel utfallet av et terningkast, kalles tilfeldige forsøk.

Vi skal her befatte oss med hendelser vi ikke kan forutsi, men som vi allikevel prøver å si noe om. På engelsk heter sannsynlighet probability. Derfor bruker man bokstaven P som symbolet for sannsynlighet.

”Sannsynligheten for regn i morgen” skrives P(regn i morgen).

”Sannsynligheten for å få terningkast seks” skrives P(6). Man kan også definer hendelsen for å få seks som A. Sannsynligheten for å få 6 øyner skrives da som P(A).

Utfallsrom

Hvor mange utfall kan et terningkast ha? En terning har seks flater med øyner fra en til seks, det betyr at utfallet vil være blant disse. Vi kaller alle mulige utfall for utfallsrommet. Et enkelt utfall vil være et element i utfallsrommet:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

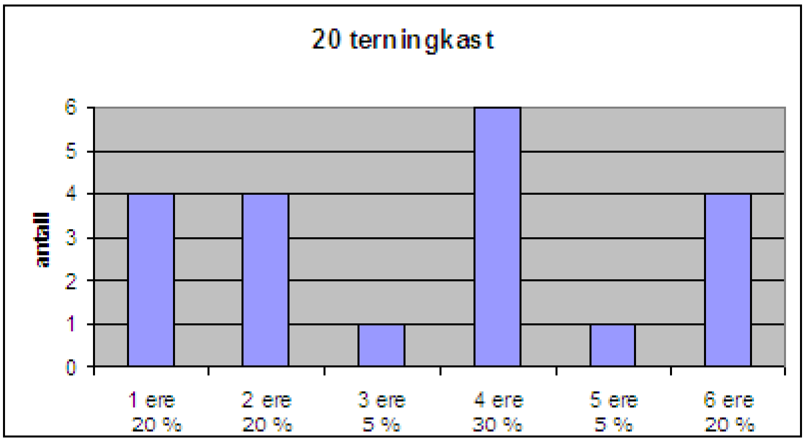
Utfallsrommet ved et myntkast vil være: U = {kron, mynt}

Utfallsrom: Den mengden som inneholder alle hendelser (utfall) et forsøk kan ha

Eksperimentell sannsynlighet - relativ frekvens - hyppighet

Hva er sjansen for å få fire øyner? Vi kan finne det ut på to måter, ved å gjennomføre mange terningkast, eller ved regning.

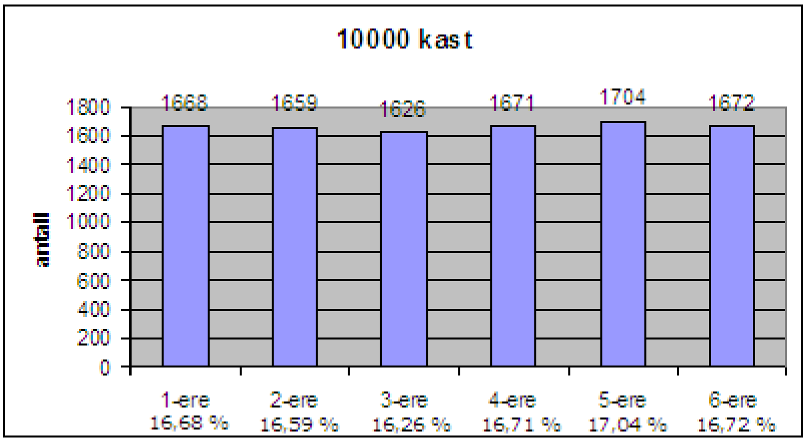
Vi lar datamaskinen kaste terning for oss, det kalles å simulere terningkast. På 20 kast får maskinen 6 firere. Den relative frekvensen for firere etter 20 kast er 6/20 = 0,3 eller 30%. Figur 1. viser fordelingen av øyner.



Figur 1.: *Figuren viser fordelingen av øyner etter 20 terningkast.*

Ut fra erfaring vil man kanskje forvente at sannsynligheten for å få firere skulle være den samme som å få treere eller femmere eller noe annet i utfallsrommet. Etter 20 terningkast kan man ikke trekke en slik konklusjon.

Vi setter maskinen til å kaste en terning 10.000 ganger. Det gir følgende resultat:



Figur 2.: *Figuren viser fordelingen av øyner etter 10000 terningkast.*

Nå ser det ut til at sannsynligheten for fire øyner går mot et tall som ligger rundt 0,16 – 0,17, dvs. 16 – 17%. Man ser at sannsynligheten for å få et annet antall øyner er nesten den samme.

Sannsynligheten er lik den relative frekvens i det lange løp.

Nå er ikke 10.000 det samme som "det lange løp", men tilstrekkelig til å se en tendens som bekreftes når vi behandler problemet teoretisk.

Teoretisk sannsynlighet

Utfallsrommet viser oss at det er seks mulige utfall når vi kaster en terning. Vi er bare interessert i å få en firer. Bare en av seks muligheter gir en firer. Det betyr at sannsynligheten for å få en firer i et kast er $\frac{1}{6}$ eller 0,167 eller 16,7%. Vi kan skrive det slik:

$P(4) = \frac{1}{6} = 0{,}167 = 16{,}7\%$

Sannsynligheten kan altså presenteres som brøk, desimaltall eller prosent. Presentasjonsformene er likeverdige, men det er en god vane å holde seg til den formen som er gitt i oppgaven, dersom noe annet ikke er spesifisert.

Man forutsetter at sannsynligheten for å få et av de seks utfallene er den samme for alle utfall. Når det er slik sier vi at vi har en uniform sannsynlighet.

En sannsynlighetsmodell for et tilfeldig forsøk gir sannsynligheten for hvert enkelt utfall i utfallsrommet. Sannsynligheten for alle utfall i utfallsrommet er til sammen 1. Sannsynligheten for hvert enkelt utfall er mellom 0 og 1. Om våre teoretiske sannsynlighetsmodeller er gode, er det kun utprøving som kan fortelle oss.

Uniform sannsynlighet

Når sannsynligheten er den samme for alle elementer i utfallsrommet sier man at sannsynligheten er uniform – uniform sannsynlighet.

Når vi har en uniform sannsynlighetsmodell, er sannsynligheten for en hendelse A gitt ved:

$$P(A) = \frac{Antall\ gunstige\ utfall\ for\ A}{Antall\ mulige\ utfall}$$

Hva er sannsynligheten for å få en femmer eller en sekser i et terningkast? Sannsynligheten for å få en femmer er $\frac{1}{6}$ og sannsynligheten for å få en sekser er $\frac{1}{6}$. Sannsynligheten for femmer eller sekser blir da:

P(5 eller 6) = P(5) + P(6) = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

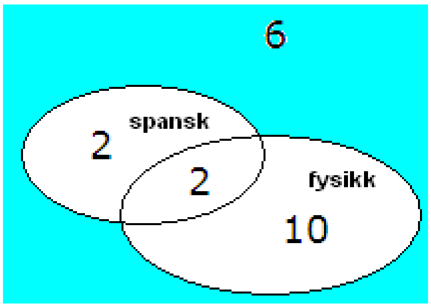
Grafisk presentasjon

Venndiagram

Et venndiagram er en grafisk fremstilling av en eller flere mengder, og eventuelle delmengder. Størrelsen av arealet i diagrammet har ingen matematisk betydning.

Eksempel:

I en klasse på 20 elever har 4 elever spansk og 12 elever fysikk. 2 elever har begge deler. Denne situasjonen kan fremstilles i et Venndiagram:



Et venndiagram kan skape klarhet i situasjonen: 6 elever (blå) har ikke spansk eller fysikk. 2 elever har både fysikk og spansk. 4 (2+2) elever har spansk og 12 elever har fysikk. 10 av disse har ikke spansk. Det totale antall elever er 20. En feil som ofte gjøres er at de elementer som er med i flere mengder (spansk og fysikk) telles to (eller flere) ganger.

Krysstabell

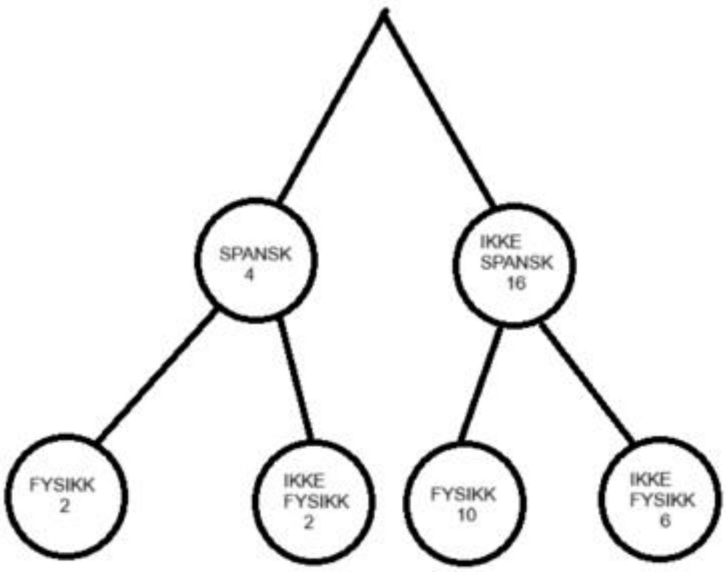
Situasjonen med elever i spansk og fysikk kan også presenteres i form av en krysstabell. Da ser det slik ut:

	spansk	ikke spansk	totalt
fysikk	2	10	12
ikke fysikk	2	6	8
totalt	4	16	20

Poenget med begge presentasjonsformer (og med valgtre som kommer lenger nede på siden) er å systematisere ved utvelgelse, slik at det blir lettere å se hva som er gunstig av antall mulige.

Valgtre

Samme situasjon som over presentert som et valgtre.



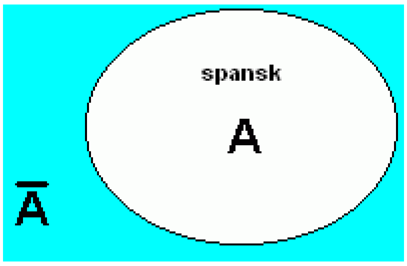
Som du ser er presentasjonsmåtene forskjellige og har sine styrker og svakheter. **Venndiagram** brukes når du ønsker å vise forholdet mellom ulike grupper (mengder) og deres overlapping. Det brukes for å identifisere hva som er felles mellom grupper og hva som er unikt. Det gir en rask visuell forståelse av forholdet mellom grupper og er effektivt for små mengder kategoriske data. **Krysstabeller** brukes for å vise sammenhenger mellom to eller flere kategoriske variabler. De er spesielt nyttige for å finne korrelasjoner og sammenligne frekvensfordeling. De gir detaljert oversikt over data, egnet for kvantitativ analyse og det er lett å beregne sannsynligheter og avhengigheter (f.eks. chi-kvadrat-test). **Valgtre** brukes når man vil vise hendelser som skjer i rekkefølge, særlig når hver hendelse påvirker sannsynligheten for den neste. Det er egnet for å kartlegge mulige utfall og deres konsekvenser.

Komplementære hendelser

I en klasse har noen elever spansk valgfag. Man skal velge ut en elev fra klassen, og definere hendelse A = ”elev har spansk valgfag”. Alle elever som ikke har spansk valgfag vil inngå i mengden som er komplementær til A.

"ikke A" skrives slik: $\bar{A}$

Situasjonen kan se slik ut presentert i et Venndiagram:



I figuren over er $\bar{A}$ antall elever som IKKE har spansk.

Vi har at

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Eks

På en skole er sannsynligheten for at en elev har spansk 0,23. Hva er sannsynligheten for å trekke ut en tilfeldig elev, som ikke har valgt spansk?

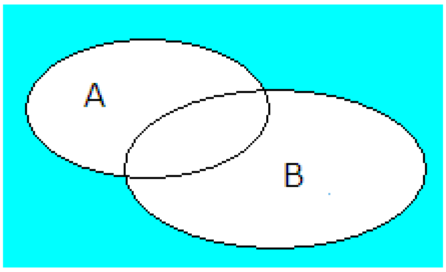
$$P(\overline{spansk}) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$$

Union og snitt

Union og snitt er begreper som kommer fra mengdelæren. Eksempelvis er A alle som liker matematikk og B er de som liker softis.

UNION

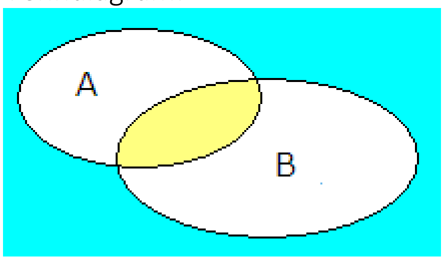
Union mellom A og B er da som liker is ELLER de som liker matematikk ELLER de som liker begge deler. Union symboliseres med U.



De som liker matematikk eller softis eller begge deler befinner seg i venndiagrammets hvite del, A∪B.
Sannsynligheten for å trekke en person som liker softis eller matematikk, eller begge deler blir P(A∪B)

SNITT

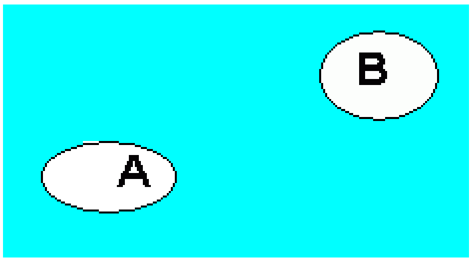
A snitt B er de som liker matematikk OG softis. Symbolet er ∩ og det kan se slik ut i et Venndiagram:



De som liker både matematikk og softis befinner seg i venndiagrammets gule del, A∩B.
Sannsynligheten for å trekke en person som liker softis og matematikk blir P(A∩B)

Disjunkte hendelser

A og B er disjunkte mengder fordi ingen elementer er felles. Dersom A er personer som liker is og B er personer som liker brus er det i denne mengden ingen personer som liker både brus og is. Det er imidlertid en gruppe (blått) som liker verken is eller brus.



Siden A og B ikke har noen felles elementer skriver vi $A \cap B = \emptyset$. Tegnet Ø betyr den tomme mengde.

Addisjonssetningen

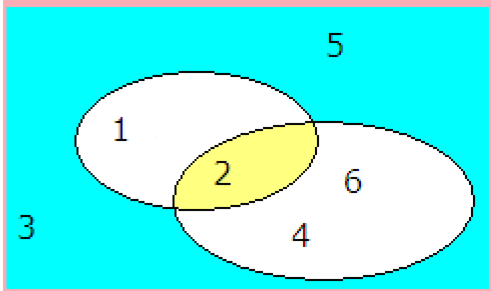
Den generelle addisjonssetningen er gitt som:

P(A∪B) = P(A) + P(B) − P(A∩B)

Eksempel

Vi kaster en terning en gang. Hendelsen øyner mindre eller lik to kaller vi A, A={1,2}. Hendelsen partall kaller vi B, B = {2,4,6}

I et venndiagram ser det slik ut:



Sannsynligheten for A blir P(A) = 2/6 = 1/3 $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Sannsynligheten for B blir $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Sannsynligheten for A ∩ B blir $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, fordi mengden inneholder ett av utfallsrommets seks elementer.

Hva er sannsynligheten for A U B? Vi bruker addisjonssetningen og får:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Man ser, både av venndiagrammet og av addisjonssetningen hvorfor man må trekke fra

P(A ∩ B). Dersom vi ikke hadde gjort det hadde vi regnet med elementet 2 en gang for mye.

Addisjonssetningen for disjunkte hendelser

Disjunkte hendelser mangler noen felles elementer. Derfor blir addisjonssetningen for disjunkte hendelser:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Betinget sannsynlighet

Med betinget sannsynlighet menes sannsynligheten for en hendelse når man har opplysninger om at en annen hendelse allerede har inntruffet.

Sannsynligheten for hendelse A gitt at hendelse B har inntruffet skrives:

$P(A|B)$

Man leser: "sannsynlighet for a gitt b". Vi har $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

Produktsetningen

Dersom hendelsene A og B skal inntreffe må først A inntreffe så må B inntreffe. Dersom sannsynligligheten for B er avhengig av om A inntreffer eller ikke, blir sannsynligheten for at A og B inntreffer:

$$P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B|A)$$

Uavhengige hendelser

To hendelser A og B er uavhengige dersom

$P(A) = P(A|B)$, som fører til uavhengighetskriteriet:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Uavhengige hendelser forveksles av og til med disjunkte hendelser. For disjunkte hendelser gjelder

$$P\ (A \cap B) = \emptyset$$

Produktsetningen for uavhengige hendelser

Dersom man kaster en terning to ganger vil ikke resultatet fra første kast påvirke resultatet i andre kast. Hendelsene er uavhengige. Produktsetningen for uavhengige hendelser er:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Eksempel:

Hva er sannsynligheten for å få tre øyner i første kast og seks øyner i andre kast, når en terning kastes to ganger?

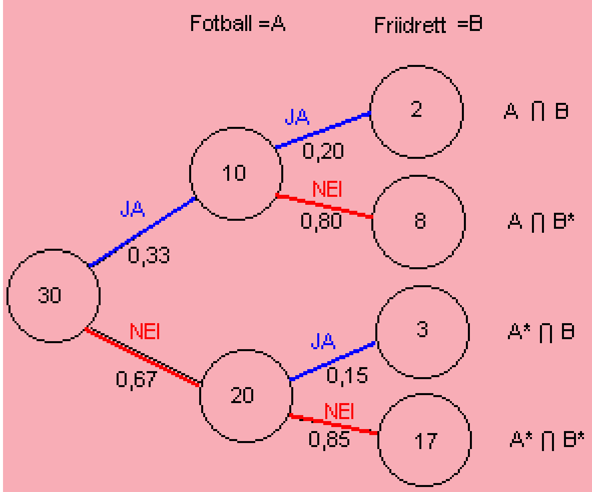
Sannsynligheten blir $P(\ 3 \cap 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Valgtre

Valgtre kan være en fornuftig visualisering når betinget sannsynlighet er innvolvert.

Eks:

I en gruppe på 30 spiller 10 personer fotball (A). I den samme gruppen driver 5 personer friidrett (B). To personer bedriver begge deler. Det leder til følgende valgtre:



Vi finner følgende sannsynligheter:

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev ikke spiller fotball:

$$P(\bar{A}) = \frac{20}{30} = 0{,}67$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev spiller fotball:

$$P(A) = \frac{10}{30} = 0{,}33$$

eller slik:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$$

Her er oversikt over sannsynligheten for hver enkelt gren:

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev spiller fotball og driver friidrett:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}33 \cdot 0{,}2 = 0{,}07$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev spiller fotball, men ikke driver friidrett:

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}|A) = 0{,}33 \cdot 0{,}8 = 0{,}27$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev ikke spiller fotball, men driver friidrett:

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}) = 0{,}67 \cdot 0{,}15 = 0{,}10$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig elev ikke driver med fotball eller friidrett:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = 0{,}67 \cdot 0{,}85 = 0{,}57$$

Man observer at summen av sannsynlighetene på hver enkelt gren av treet blir lik 1.

Tilnærmingen skyldes avrundingen i mellomregningen

Total sannsynlighet

Treet over gir oss sannsynligheten for å velge ut en fotballspiller direkte. Dersom man ønsker å finne sannsynligheten for å trekke ut en friidrettsutøver, uavhengig av fotball, er ikke det fullt så åpenbart.

Sannsynligheten for å velge en person som driver friidrett er på grenene "fotball og friidrett" og "ikke fotball og friidrett". Litt mer matematisk blir sannsynligheten slik:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}07 + 0{,}10 = 0{,}17$$

Dette kalles gjerne den totale sannsynlighet (for B). Legg merke til at dette er summen av de grenene som er positive i forhold til friidrett.

Bayes formel

Friidrett = B og fotball = A. En elev driver friidrett. Hva er sannsynligheten for at eleven også spiller fotball? Vi ønsker å finne P(A | B).

Vi har:

$$P(\,fotball\ og\ friidrett\,) = P\,(friidrett) \cdot P\,(\,fotball\ gitt\ friidrett\,)$$

Litt mer matematisk:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

er også det samme som

$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$ (P(fotball) · P(friidrett gitt fotball))

Setter man de to uttrykkene lik hverandre får man

$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$

som gir:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)} \quad \text{eller} \quad P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)}$$

Man har nå en sammenheng mellom en betinget sannsynlighet og den motsatte betingede sannsynligheten. Relasjonen eller formelen kalles for Bayes setning.

Eks:

tidligere 2MX eksamensoppgave

Livmorkreft er en kreftform som kan ramme voksne kvinner i alle aldere. Celleforandringer i livmorhalsen kan være forstadier til kreft. De kan påvises ved celleprøver. Kreftregisteret anbefaler alle kvinner mellom 25 og 69 år å ta en slik celleprøve hvert tredje år. Resultatene av slike celleprøver er likevel ikke helt sikre. Fra medisinske undersøkelser har en erfart at

-For en kvinne som har celleforandringer i livmorhalsen, vil en celleprøve avsløre det i 75% av tilfellene.

-For kvinner som ikke har celleforandringer i livmorhalsen, vil en celleprøve likevel tyde på

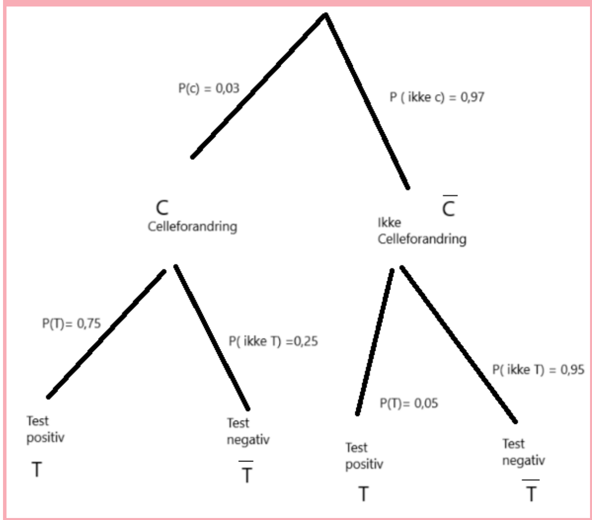
celleforandringer i 5% av tilfellene.
Vi går ut fra at 3% av de kvinner som tar celleprøver, faktisk har celleforandringer i livmorhalsen. Vi tar for oss en kvinne som tar celleprøven og innfører hendingene:
C: " Kvinnen har celleforandringer i livmorhalsen."
T: "Celleprøven tyder på at kvinnen har celleforandringer i livmorhalsen."
Opplysningene over gir disse sannsynlighetene:

$$P(C) = 0{,}03$$

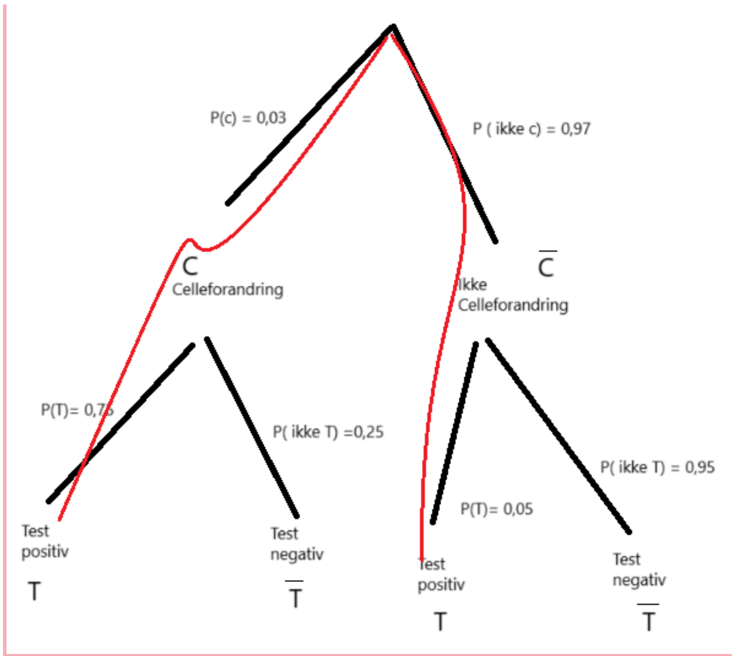
$$P(T|C) = 0{,}75$$

$$P(T \cap \bar{C}) = 0{,}05$$

På bakgrunn av informasjon i oppgaven kan vi tegne følgende valgtre:



a) Finn $P(C \cap T)$ og $P(\bar{C} \cap T)$



Vi skal finne sannsynligheten fir hver av de to røde linjene. Begge gir positiv test, en med celleforandring og en uten.

$P(C \cap T)$ er sannsynligheten for "celleforandring" OG "prøven tyder på celleforandring". Vi får $P(C \ \cap T) = P(C) \cdot P(T|C) = 0.03 \ \cdot 0,75 = 0,0225$ eller 2,25%

$P(\bar{C} \ \cap T)$ er sannsynligheten for "ikke celleforandring " OG "prøven tyder på celleforandring". Vi får : $P(\bar{C} \ \cap T) = P(\bar{C}) \ \cdot P(T|\bar{C}\ ) = 0,97 \cdot 0,05 = 0,0485$ eller 4,85%

b) Vis at P(T) = 0,071

Her spør man om total sannsynlighet for T, altså summen av endepunktene for de to røde strekene. T er hendelsen at prøven tyder på celleforandring. Man må huske på at hendelsen kan inntreffe både ved "celleforandring" og "ikke celleforandring". Man finner den totale sannsynlighet for T ved å summere de to svarene i a:

$$P(T) = P(\bar{C} \cap T) + P(C \cap T) = \ 0,0225 + 0,0485 = 0,07$$

c) Gå ut fra at en celleprøve tyder på at en kvinne har celleforandringer i livmorhalsen. Hva er da sannsynligheten for at det virkelig er tilfelle?
Her spørres det om sannsynligheten for celleendringer når testen indikerer dette, Altså P(C|T). Man observerer at dette er den omvendte betingede sannsynligheten, i forhold til P(T|C) som allerede er kjent. Siden både P(C) og P(T) er kjent kan man anvende Bayes setning og får:

P(C|T)=P(C)·P(T|C)P(T)=0,03·0,750,071=0,32

eller 32%

Man observerer at selv om testen er positiv er det 32% sjanse for at kvinnen er frisk.

Dersom en celleprøve tyder på at en kvinne har celleforandringer i livmorhalsen, vil legen hennes følge opp med flere undersøkelser for å avgjøre om det virkelig er tilfellet. Selv om det viser seg at hun faktisk har celleforandringer, trenger det ikke være så alvorlig.
60% av slike celleforandringer går over av seg selv, mens resten kan behandles med et relativt enkelt inngrep.
Tenk deg at ti kvinner etter grundige undersøkelser har fått bekreftet at de har celleforandringer i livmorhalsen.

d) Hva er sannsynligheten for at celleforandringene går over av seg selv for minst åtte av kvinnene?

$$
\begin{aligned}
&P(X=8)+P(X=9)+P(X=10) \\
&=\binom{10}{8}0{,}6^{8}\cdot 0{,}4^{2}+\binom{10}{9}0{,}6^{9}\cdot 0{,}4^{1}+\binom{10}{10}0{,}6^{10}\cdot 0{,}4^{0} \\
&=0{,}12+0{,}04+0{,}01 \;=0{,}17
\end{aligned}
$$

eller ca. 17%

Kombinatorikk

For å kunne beregne sannsynligheter trenger man en oversikt over mulige utfall og kombinasjoner. I den forbindelse kan det være greit med noen regler for å få klarhet når situasjoner virker uoversiktlige.

Multiplikasjonsregelen

Dersom situasjonen består av flere trinnvise valg mellom flere elementer blir antall kombinasjoner som følger.:

Antall elementer i første valgrunde multiplisert med antall elementer i andre runde osv.

m · n · .....

Eksempel:

Hvor mange antrekk kan du velge dersom du har valget mellom to gensere, fire bukser og tre par sko?

Svar:

2 (gensere) · 4 (bukser) · 3 (par sko) = 24 (antrekk)

Fakultet

På hvor mange måter kan 5 personer plassere seg i en 5 seters sofa? Første person kan velge mellom 5 seter, andre person mellom 4 osv. Det gir følgende antall kombinasjoner

$5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3) \cdot (5-4) = 5!$

n artikler kan arrangeres på:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots\ldots\ldots 1 = n!$$

n! leses ”n fakultet”.

0! defineres lik 1

Eksempel:

$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

Som man observerer blir fakulteter raskt store størrelse.

Eksempel:
På hvor mange måter kan bokstavene a, b, c, d og e arrangeres?

Fem bokstaver kan arrangeres på 5! Måter, altså 5! = 120 måter.

(Første bokstav trekkes blant 5 bokstaver, nummer to blant 4 osv….)

Ordnet utvalg med tilbake legging

Vi har 4 kuler i en urne. Kulene er nummererte fra 1 til 4. Dersom vi trekker en gang har vi fire muligheter. Når vi har trukket legger vi kulen tilbake igjen og trekker på nytt, slik at det blir 4 muligheter i andre trekning også.

Dersom man foretar r trekninger blant n elementer gir det

n^r muligheter.

Rekkefølgen spiller en rolle slik at {1,2,3,3} er forskjellig fra {1,3,2,3}

Eksempel

Denne modellen kan brukes på fotballtipping. Du har en urne med tre kuler; H, U og B. Du trekker 12 ganger (kamper) og legger kulen tilbake i urnen hver gang. Antall mulige måter å fylle ut en rekke på blir da
$3^{12} = \ 531\,441$ måter.

Ordnet utvalg uten tilbake legging

Dersom man har 10 kuler og skal trekke ut tre uten tilbakelegging vil man ha følgende muligheter:

1. trekning: 10 muligheter

2. trekning: 9 muligheter

3. trekning: 8 muligheter

Det gir oss 10 · 9 · 8 = 720 mulige kombinasjoner. Vi snakker om ordnede utvalg slik at {1,2,3} er forskjellig fra {1,3,2}, dvs. rekkefølgen spiller en rolle.

Dersom man trekker r elementer fra mengden n uten tilbakelegging skrives det nPr og kalkulatoren bør ha en funksjon for det. P står for permutasjoner. nPr er gitt som:

$$nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Eksempel:

Bingobakken skole har 6 elever i elevrådet. De fordeler vervene ved loddtrekkning. Den første som trekkes blir leder. Den andre trekningen gir kassereren, det tredje gir sekretæren og resten blir vanlige medlemmer. Her har jo rekkefølgen betydning.

Det er

$$6P3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4 = 120$$

Det er altså 120 mulige kombinasjoner når rekkefølgen har betydning.

Uordnet utvalg uten tilbakelegging

Dersom man skal velge ut to personer til en komité spiller det ingen rolle om man blir valgt som nummer en eller nummer to, enten er man med i komiteen eller så er man det ikke. Situasjonen kalles uordnet utvalg uten tilbakelegging. I slie situasjoner er {Eva, Ivar} identisk med {Ivar, Eva}. Om man tar utgangspunkt i formelen for ordnede utvalg og dividerer på antall muligheter de uttrukne elementene kan kombineres på får man:

$$nCr = \frac{nPr}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Som er formelen for uordnede utvalg uten tilbakelegging eller binominalkoeffisienten. Den skrives også Slik:

$$nCr = \binom{n}{r}$$

Eksempel:

Lottobakken skole har også et elevråd på 6 personer. De har fått et tilbud om å sende tre medlemmer på kurs til Honolulu i en uke. Alle har lyst til å dra, og det blir enige om å trekke ut tre heldige vinnere. Her har jo rekkefølgen ingen betydning, enten er du med, eller så er du det ikke:

$$6C3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

(abc), (acb), (bac), (bca), (cab) og (cba) teller som en kombinasjon fordi alle seks permuteringene sender de samme tre elevene på kurs.

Sannsynlighetsfordelinger

Her behandles binomisk fordeling og hypergeometrisk fordeling. Det finnes mange flere.

Binomisk fordeling

En binomisk sannsynlighetsmodell kan brukes dersom følgende tre kriterier er oppfylt:

- Et forsøk består i om en hendelse inntreffer eller ikke, altså kun to mulige utfall.
- Sannsynligheten p for at hendelsen skal inntreffe er den samme i alle forsøk
- Forsøkene er uavhengige av hverandre slik at resultatet fra et forsøk ikke virker inn på det neste.

Vi kaller dette en binomisk forsøksrekke. Dersom X er antall utfall i en binomisk forsøksrekke der hendelsen inntreffer er X en diskret stokastisk variabel med følgende sannsynlighetsfordeling:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$$

n er antall forsøk.

Forventningsverdien til X er:

$$E(X) = np$$

Variansen til X er:

$$Var\ (X) = np(1 - p)$$

Eksempel 1:
Spireevnen til en type frø er 85%. Ti frø blir plantet. Hva er sannsynligheten for at 8 frø spirer?

$$P(X = 8) = \binom{10}{8}\ 0{,}85^8 \cdot 0{,}15^2 = 0{,}28$$

Hypergeometrisk fordeling

Hypergeometrisk fordeling ligner på binomisk fordeling, men har følgende karakteristiske trekk:

- En populasjon med N elementer inneholder a elementer med en spesiell egenskap.
- Man foretar n trekninger UTEN tilbakelegging (sannsynligheten endrer seg).
- x er antall enheter med den bestemte egenskapen.

Sannsynligheten for at x av elementene som trekkes har egenskapen a er:

$$P(X = x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Eksempel 2:
En skuff består av 10 kniver med sort skaft og 5 kniver med rødt skaft. Man trekker 4 kniver uten tilbakelegging. Hva er sannsynligheten for at 3 av knivene som trekkes tilfeldig har rødt skaft?

$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{10}{1}}{\binom{15}{4}} = 0{,}073$$

Test deg selv

binomisk vs. hypergeometrisk fordeling

Den hypergeometriske fordelingen ligner på den binomiske, med den forskjell at sannsynligheten i delforsøkene IKKE er den samme.

Den hypergeometriske modellen brukes når populasjonen er liten og man trekker ut en betydelig del av den.

Dersom populasjonen er stor vil den hypergeometriske modellen nærme seg den binomiske og man bruker da den binomiske fordi den er lettest å arbeide med da den har færre parametere.

Dersom populasjonen er stor i forhold til utvalget (N > 10n) gjelder:

Hypergeometrisk fordeling (N,a,n) ≈ Binomisk fordeling (n,p)

$$p = a \cdot N$$

Hvorfor er det slik?

Tenk deg en urne med et 50 kuler av to typer. Dersom du trekker ut 20 kuler uten tilbakelegging, altså en stor andel av det totale antall kuler i urnen, vil sannsynligheten endre seg betydelig for hvert trekk. Dette er en hypergeometrisk situasjon.

Eksempel 3:

I en urne finnes 40 kuler av type A og 10 kuler av type B. Man trekker ut 20 kuler uten tilbake legging. Hva er sannsynligheten for å trekke 5 kuler av type B? Ved å regne hypergeometrisk får man

$$P(X=5)=\frac{\binom{10}{5}\binom{40}{15}}{\binom{50}{20}}=0{,}22$$

Dersom man regner binomisk får man

$$P(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^{15}=0{,}17$$

Man observerer at det er stor forskjell på de to svarene, det første er riktig.

Dersom man har en urne med 1000 kuler og trekker ut 20 kuler uten tilbakelegging vil endringen i sannsynlighet være neglisjerbar. Dette er også en hypergeometrisk situasjon, men siden endringen i sannsynlighet er neglisjerbar kan man regne binomisk da det gir enklere regning.

Eksempel 4:

I en urne finnes 800 kuler av type A og 200 kuler av type B. Man trekker ut 20 kuler uten tilbakelegging. Hva er sannsynligheten for å trekke 5 kuler av type B? Ved å regne hypergeometrisk får man

$$P(X=5)=\frac{\binom{200}{5}\binom{800}{15}}{\binom{1000}{20}}=0{,}176$$

Dersom man regner binomisk får man

$$P(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^{15}=0{,}17$$

Man observerer at fordelingene nærmer seg hverandre når populasjonen er stor i forhold til det antall man trekker ut.