# MATEMATIK R2 – HØST 2024

# LØSNINGSFORLSAG

Svarene på alle deloppgavene er markert med mørkerød farge.

## DEL 1

### Oppgave 1

**a)** Vi skal her løse integralet:

$$\int x^2 \cdot \ln x \ \mathrm{dx}$$

Bruker her delvis integrasjon. Vi setter $u' = x^2$ og $v = \ln x$. Da får vi at $u = \frac{1}{3}x^3$ og $v' = 1/x$. Dette gir oss:

$$\int x^2 \cdot \ln x \ \mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \ \mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} \mathrm{dx} = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Løsningen blir dermed:

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

**b)** Vi skal her løse for $x$ i følgende bestemte integral:

$$\int_0^x \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{dt} = 0\,, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle$$

Løser først det ubestemte integralet:

$$\int \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{dt}$$

Bruker her variabelskifte med $u = \pi t + \frac{\pi}{4}$. Det gir:

$$\frac{du}{dt} = \pi$$

$$dt = \frac{du}{\pi}$$

Vi får da for integralet:

$$\int \sin(u)\frac{du}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\cos(u) + C = -\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

Løser så det bestemte integralet:

$$\int_0^x \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x = -\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi \cdot 0 + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

Løser til slutt for $x$:

$$-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = 0$$

$$-\frac{1}{\pi}\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$$

Multipliserer begge sider med $-\pi$ og får:

$$\cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vi får dermed:

$$\pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \pi x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + n \cdot 2\pi, \quad n \in Z$$

$$\pi x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \pi x = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + n \cdot 2 \quad \vee \quad x = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} + n \cdot 2$$

$$x = n \cdot 2 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} + n \cdot 2$$

Vi skal kun se på løsninger for $x \in \langle 0, \pi \rangle$. Dersom vi setter $n = 0$, får vi:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$$

Den første løsningen ligger her under definisjonsmengden, men den andre løsningen ser vi ligger i definisjonsmengden. Dersom vi setter $n = 1$ får vi:

$$x = 2 \quad \vee \quad x = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

Her ligger den første løsningen i definisjonsmengden, mens den andre løsningen ligger over definisjonsmengden. Vi har derfor følgende to løsninger på likningen:

$$x = \frac{3}{2} \quad \vee \quad x = 2$$

**c)** Svaret i Oppgave b) forteller oss at dersom vi setter $x$ lik $\frac{3}{2}$ eller 2 som øvre grense for det bestemte integralet, så vil det samlede arealet over og under $x$-aksen innenfor den oppgitte definisjonsmengden være like stort.

**Oppgave 2**

**a)** Gitt den aritmetiske rekken $3 + 7 + 11 + 15 + \cdots + 399$

Vi har $a_1 = 3, d = 4$ og siste ledd er 399. Finner først antall ledd:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$399 = 3 + (n-1)4$$

$$399 = 3 + 4n - 4$$

$$399 = 4n - 1$$

$$399 + 1 = 4n$$

$$400 = 4n$$

$$n = 100$$

Bruker så sumformelen for aritmetiske rekker til å finne summen:

$$s_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$s_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100$$

$$s_{100} = \frac{3 + 399}{2} \cdot 100$$

$$s_{100} = \frac{402}{2} \cdot 100$$

$$s_{100} = 201 \cdot 100$$

$$s_{100} = 20100$$

Summen av den aritmetiske rekken er lik 20100.

**b)** Gitt en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = 12$ og sum $s = 18$. For å finne kvotienten, $k$, bruker vi sumformelen for uendelige geometriske rekker som konvergerer:

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$

$$18 = \frac{12}{1-k}$$

$$18(1-k) = 12$$

$$18 - 18k = 12$$

$$18 - 12 = 18k$$

$$6 = 18k$$

$$k = \frac{6}{18}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

Kvotienten til rekken har verdien $k = \frac{1}{3}$.

**c)** Tallet $0{,}75757575$ ... kan skrives som $0{,}75 + 0{,}0075 + 0{,}000075 + \cdots$

Dette gjenkjenner vi som en uendelig geometrisk rekke med $a_1 = 0{,}75 = \frac{3}{4}$ og $k = 0{,}01 = \frac{1}{100}$. Vi finner summen av rekken ved å bruke samme formel som i b):

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$

$$s = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$s = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{99}{100}}$$

$$s = \frac{3 \cdot 100}{4 \cdot 99}$$

Her ser vi at $\frac{3}{99} = \frac{1}{33}$ og $\frac{100}{4} = 25$. Vi får dermed:

$$s = \frac{25}{33}$$

Tallet 1,75757575.. blir derfor lik $1 + \frac{25}{33} = \frac{33}{33} + \frac{25}{33} = \frac{58}{33}$.

Dette var det vi skulle vise.

**Oppgave 3**

**a)** Gitt de tre punktene $A(0,0,0), B(3,1,2)$ og $C(-1,3,1)$. Arealet av bunnen av teltet er gitt ved:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Vi har:

$$\overrightarrow{AB} = [3-0, 1-0, 2-0] = [3,1,2]$$

$$\overrightarrow{AC} = [-1-0, 3-0, 1-0] = [-1,3,1]$$

Regner så ut vektorproduktet $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right] = [-5,-5,10]$$

Vi får da:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25+25+100} = \frac{1}{2}\sqrt{150} = \frac{1}{2}\sqrt{25 \cdot 6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$$

Arealet av bunnen av teltet er lik $\frac{5}{2}\sqrt{6}$.

**b)** La $T(x, y, z)$ være det ukjente punktet $T$. Vektoren $\overrightarrow{CT}$ er da gitt ved:

$$\overrightarrow{CT} = [x - (-1), y - 3, z - 1] = [x + 1, y - 3, z - 1]$$

Videre vet vi at $\left|\overrightarrow{CT}\right| = \sqrt{17}$. Altså må:

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2} = \sqrt{17}$$

Vi vet også at punktet $T$ ligger på linjen $l$ med parameterframstillingen:

$$l: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

Dermed må:

$$\sqrt{(t + 1)^2 + (t - 3)^2 + (4t - 1)^2} = \sqrt{17}$$

Vi kan nå løse følgende likning for $t$:

$$(t + 1)^2 + (t - 3)^2 + (4t - 1)^2 = 17$$

Vi får da:

$$t^2 + 2t + 1 + t^2 - 6t + 9 + 16t^2 - 8t + 1 = 17$$

$$18t^2 - 12t + 11 = 17$$

$$18t^2 - 12t + 11 - 17 = 0$$

$$18t^2 - 12t - 6 = 0$$

Deler med 6 på begge sider og får:

$$3t^2 - 2t - 1 = 0$$

Bruker $abc$-formelen:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6}$$

$$t = \frac{2 \pm 4}{6}$$

Dette gir løsningene:

$$t = \frac{2-4}{6} \quad \vee \quad t = \frac{2+4}{6}$$

$$t = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad t = 1$$

Vi antar her, basert på figuren i oppgaven, at toppunktet til teltet må ligge over $xy$-planet. Vi ser derfor bort fra løsningen $t = -\frac{1}{3}$. For $t = 1$ får vi, basert på parameterframstillingen til linjen $l$, koordinatene:

$$x = 1$$
$$y = 1$$
$$z = 4 \cdot 1 = 4$$

Punktet $T$ har derfor koordinatene $T(1, 1, 4)$.

**Oppgave 4**

**a)** Anta at vi har en vinkel og slår en sirkelbue om vinkelen. Forholdet mellom lengden på sirkelbuen vinkelen er en del av og radius i sirkelen gir oss det absolutte vinkelmålet (radianer). Så dersom $b$ er lengden av sirkelbuen og $r$ er radius i sirkelen, blir det absolutte vinkelmålet, $v$, lik:

$$v = \frac{b}{r}.$$

For å konvertere en vinkel på $n$ grader til radianer, kan vi bruke formelen:

$$v = \frac{\pi \cdot n°}{180°}$$

En vinkel på 80° har derfor radianverdien:

$$v = \frac{\pi \cdot 80°}{180°}$$

Forkorter brøken ved å dele på 20 både i teller og nevner, og vi får da som endelig svar:

$$v = \frac{4}{9}\pi$$

**b)** Gitt $\sin v = -\frac{1}{4}$ og $v \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. For å finne den eksakte verdien til $\cos v$, kan vi bruke enhetsformelen:

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$\cos^2 v + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2 v + \frac{1}{16} = 1$$

$$\cos^2 v = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\cos^2 v = \frac{15}{16}$$

$$\cos v = \pm\sqrt{\frac{15}{16}}$$

$$\cos v = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Her beholder vi kun den negative løsningen ettersom $v \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (3. kvadrant). Vi har dermed at:

$$\cos v = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

Vi kan så, til slutt, finne $\tan v$:

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

Vi har derfor:

$$\tan v = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

**Oppgave 5**

**a)** Fra den gitte sinusfunksjonen har vi allerede verdiene for $A, c$ og $d$ som vi kan anvende i cosinusfunksjonen. Vi har at $A = 2, c = \frac{\pi}{4}$ og $d = -1$.

For å finne verdien for $\phi$ i cosinusfunksjonen kan vi velge en $x$-verdi hvor vi har toppunkt. Der må $cx + \phi = 0$. Vi ser at dette inntreffer når $x = 4$. Dersom vi setter dette inn får vi:

$$\frac{\pi}{4} \cdot 4 + \phi = 0$$

$$\pi + \phi = 0$$

$$\phi = -\pi$$

En funksjon på formen $g(x) = A \cdot \cos(cx + \phi) + d$ som passer til grafen er dermed gitt ved:

$$g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) - 1$$

Alternativt kan man her løse oppgaven ved å bruke prinsippet om at man kan gjøre en sinusfunksjon om til en cosinusfunksjon ved å trekke fra $\frac{\pi}{2}$ i sinusuttrykket. Ettersom sinusuttrykket er gitt ved $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ må da:

$$g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

$$g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) - 1$$

Vi ser altså at begge fremgangsmåtene gir samme svar.

**b)** Gitt likningen $\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$ der $x \in [0, 3\pi]$. Vi løser likningen som følger:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{4}x - \pi = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{4}x - \pi = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi, \qquad n \in Z$$

$$\frac{\pi}{4}x = \frac{\pi}{3} + \pi + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{4}x = \frac{5\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4}x = \frac{4\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{8\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Multipliserer alle leddene med $\frac{4}{\pi}$ og får:

$$x = \frac{16}{3} + 8n \quad \vee \quad x = \frac{32}{3} + 8n$$

Vi skal kun se på løsninger for $x \in [0,3\pi]$. Dersom vi setter $n = -1$ får vi:

$$x = \frac{16}{3} - 8 \quad \vee \quad x = \frac{32}{3} - 8$$

$$x = \frac{16}{3} - \frac{24}{3} \quad \vee \quad x = \frac{32}{3} - \frac{24}{3}$$

$$x = -\frac{8}{3} \quad \vee \quad x = \frac{8}{3}$$

Den første løsningen ligger her under definisjonsmengden, men den andre løsningen ser vi ligger i definisjonsmengden. Dersom vi setter $n = 0$ får vi:

$$x = \frac{16}{3} \quad \vee \quad x = \frac{32}{3}$$

Her ligger den første løsningen i definisjonsmengden, mens den andre løsningen ligger over definisjonsmengden. Vi har derfor følgende to løsninger på likningen:

$$x = \frac{8}{3} \quad \vee \quad x = \frac{16}{3}$$

Dersom vi tar utgangspunkt i cosinusfunksjonen $g(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) - 1$ ser vi at vi får likningen vi nettopp løste om vi forsøker å finne nullpunktene til funksjonen:

$$g(x) = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) - 1 = 0$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) = \frac{1}{2}$$

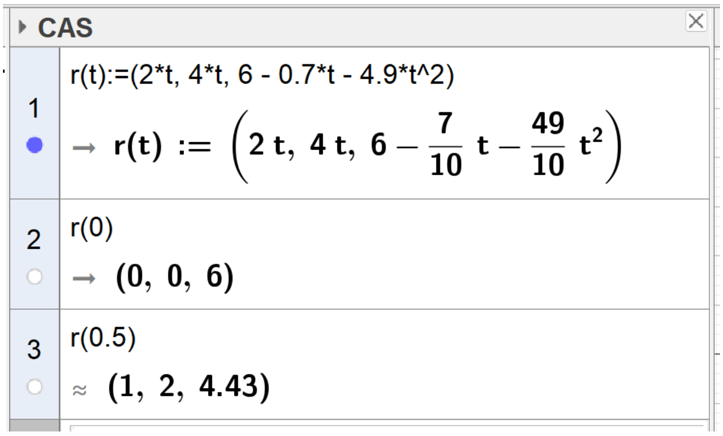
Det vi altså fant når vi løste likningen var alle nullpunktene til funksjonen i intervallet $x \in [0, 3\pi]$. Nullpunktet som ligger lengst til høyre på figuren er utenfor denne definisjonsmengden. De to løsningene vi fant $(x = \frac{8}{3}, x = \frac{16}{3})$ ligger derfor på de to første punktene hvor grafen krysser $x$-aksen.

# DEL 2

## Oppgave 1

Løser her alle deloppgavene i CAS.

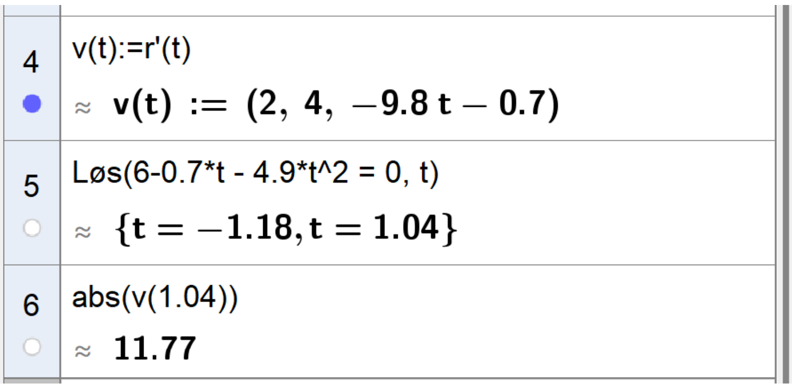
**a)**




Definerer først vektorfunksjonen i første linje. I linje 2 finner vi posisjonen ved $t = 0$, og i linje 3 finner vi posisjonen ved tid $t = 0{,}5$.

Vi ser av dette at kanten på taket er 6 meter over bakken, og at etter 0,5 sekunder var ballen i posisjonen $(1, 2, 4.43)$. Altså har ballen beveget seg 1 meter fremover i $x$-retning, 2 meter i $y$-retning, samt at den har falt nedover til høyden 4,43 meter over bakken.

**b)**




Begynner først med å definere fartsvektoren i linje 4 ved å derivere posisjonsvektoren. I linje 5 løser vi for når $z$-koordinaten til posisjonsvektoren er lik 0. Vi forkaster den negative verdien, og ser dermed at ballen treffer bakken etter 1,04 sekunder. Finner så, i linje 6, banefarten til ballen på dette tidspunktet. Vi ser av dette at når ballen treffer bakken har den en fart på $11{,}77 \text{ m/s}$.

**c)**

7 Løs(abs(v(t)) = 10, t)

$\approx \{t = -0.98, t = 0.84\}$

For å finne ut når farten til ballen er 10 m/s, kan vi sette opp en likning i CAS som vist over.
Vi ser av dette at farten til ballen er 10 m/s etter 0,84 sekunder.

## Oppgave 2

**a) Påstand:** Likningen til et plan kan bestemmes av 3 punkter i planet.

Påstanden er feil. Dersom de 3 punktene ligger langs en rett linje, vil de nemlig ikke kunne gi et entydig plan. La oss for eksempel anta at vi har punktene $A, B$ og $C$ som ligger langs en rett linje. Hvis vi definerer vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ og så forsøker å finne normalvektoren til planet via vektorproduktet $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, vil vi kun få ut nullvektoren ettersom vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle og dermed spenner over et parallellogram med areal lik 0. Vi kan derfor ikke finne likningen til planet.

**b)** En uendelig geometrisk rekke er gitt ved $1 + (\ln x - 1) + (\ln x - 1)^2 + \cdots$.

**Påstand:** Dersom $x = \frac{1}{e}$ vil summen av rekken være $\frac{1}{3}$.

Vi begynner her med å finner konvergensområdet til rekken. Rekken har kvotient $k = (\ln x - 1)$. Vi får da:

$$-1 < k < 1$$

$$-1 < \ln x - 1 < 1$$

$$0 < \ln x < 2$$

$$e^0 < e^{\ln x} < e^2$$

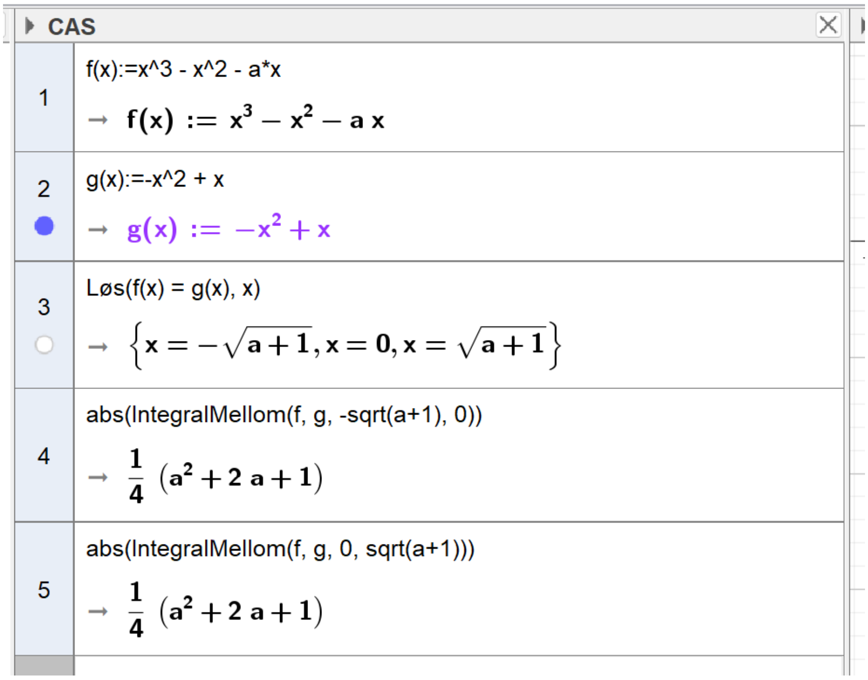
$$1 < x < e^2$$

Vi ser at den oppgitte $x$-verdien $(x = \frac{1}{e})$ ligger utenfor konvergensområdet. Påstanden er dermed feil.

**c)** To funksjoner er gitt ved $f(x) = x^3 - x^2 - ax$, der $a \in \mathbb{R}$ og $g(x) = -x^2 + x$.

**Påstand:** Grafene til $f$ og $g$ avgrenser to områder som er like store når $a > -1$.

Vi tester denne påstanden i CAS:




I linje 3 finner jeg skjæringspunktene mellom de to funksjonene. Vi ser at det er tre skjæringspunkter totalt. Altså vil grafene avgrense et område mellom $x = -\sqrt{a+1}$ og $x = 0$, samt at grafene vil avgrense et annet område mellom $x = 0$ og $x = \sqrt{a+1}$.

I linjene 4 og 5 finner vi arealet mellom de to grafene for begge de to intervallene. Vi ser at vi får ut akkurat samme verdi. Påstanden er derfor sann.

## Oppgave 3

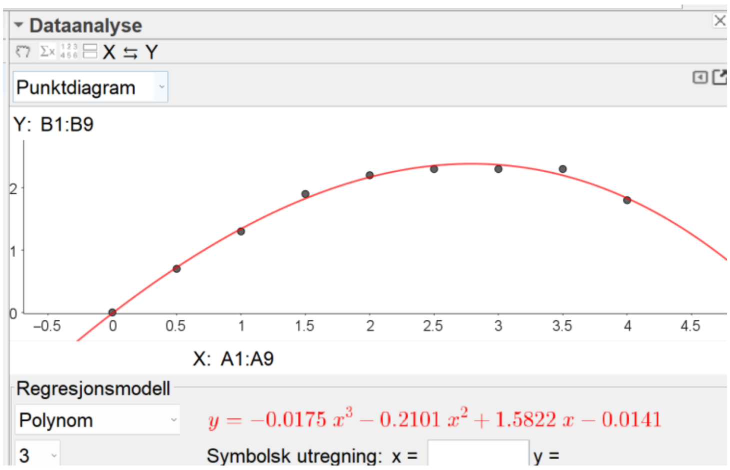
Velger her å definere $x$-aksen som en horisontal linje tvers gjennom midten av jordbæret. Dette tilsvarer omtrent der hvor vi har verdien 2 på den oppgitte målestokken. «Bunnen» av jordbæret plasserer vi i origo. Vi kan så forsøke, ved hjelp av en linjal, å definere punkter som ligger langs den øvre kanten av jordbæret. Det er vanskelig å være helt eksakt her, så verdiene vi får er omtrentlige. Etter å ha definert en del punkter, kan vi så bruke regresjon til å finne et funksjonsuttrykk som fanger opp punktene som ligger langs den øvre kanten. Til slutt kan vi så bruke formelen for volum av omdreiningslegeme til å finne en omtrentlig verdi for volumet av jordbæret.

I regnearket under er det lagt inn et forslag til punkter som ligger langs den øvre kanten av jordbæret. I kolonne A ligger $x$-verdiene, og i kolonne $B$ ligger de tilhørende $y$-verdiene i centimeter.

Løsningsforslag laget av Lektor Kristian Jensen

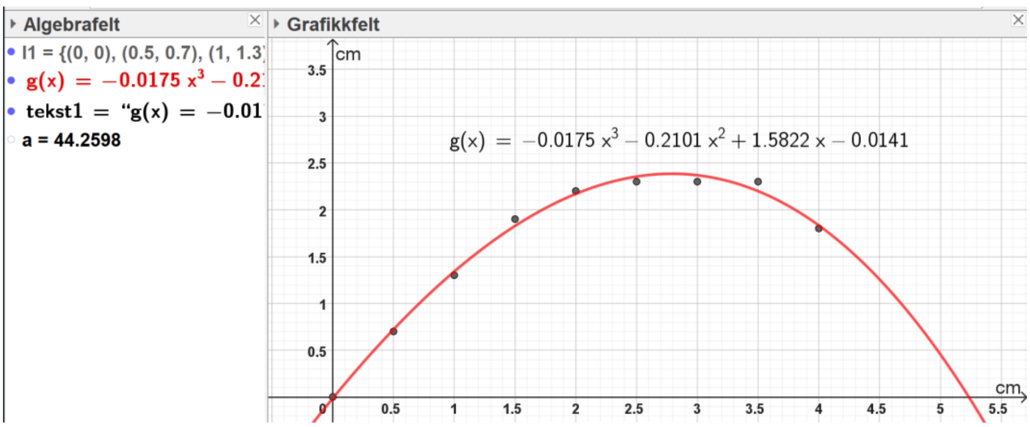
| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0.5 | 0.7 |
| 3 | 1 | 1.3 |
| 4 | 1.5 | 1.9 |
| 5 | 2 | 2.2 |
| 6 | 2.5 | 2.3 |
| 7 | 3 | 2.3 |
| 8 | 3.5 | 2.3 |
| 9 | 4 | 1.8 |

Gjennomfører så regresjonsanalyse av punktene:




Etter å ha prøvd ulike regresjonsmodeller, fremstår det som at et tredjegradspolynom vil passe bra.

Kopierer så dataene over til grafikkfeltet:



Vi kan så bruke kommandoen pi*Integral(g^2, 0, 4) til å finne en tilnærmet verdi for volumet av jordbæret. Svaret er oppgitt som variabelen ‘a’ i algebrafeltet. Vi ser fra dette at en omtrentlig verdi for volumet av jordbæret er på cirka 44 cm$^3$.

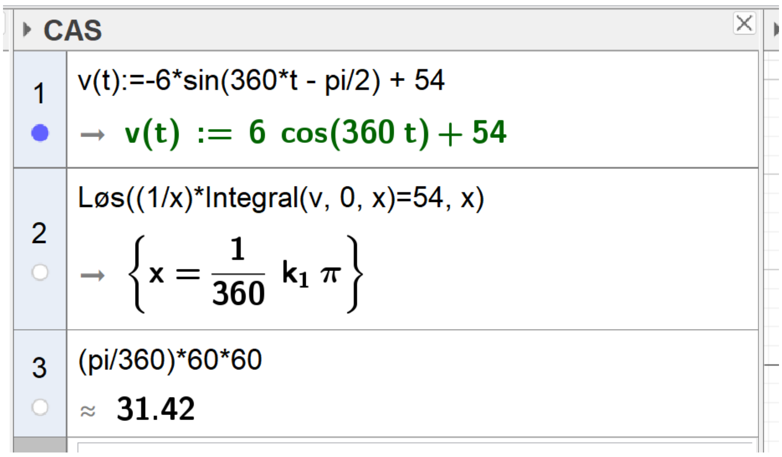
Omdreiningslegmet vil her ha form som en slags sammentrykket, avlang kule. Det estimerte volumet viker som å være noe større enn det man forventer å få for et jordbær. En sannsynlig feilkilde her er at toppen av jordbæret har en del hulrom der hvor bladene er. Likevel vil dette hulrommet tas med i volumberegningen over. I tillegg kan det ha vært noe feil i målingene ettersom det blir et ganske grovt estimat når man må bruke linjal for å estimere de avleste verdiene opp mot målestokken som er vist på figuren.

**Oppgave 4**

**a)** Vi skal finne første tidspunktet hvor vi har en gjennomsnittsfart på 54 km/. Det medfører at vi må løse integrallikningen:

$$\frac{1}{x}\int_0^x v(t)\mathrm{dt} = 54$$

Dette kan vi gjøre i CAS:




Definerer først funksjonen i Linje 1. CAS skriver her funksjonsuttrykket om til en cosinusfunksjon, men ettersom funksjonen er ekvivalent, kan vi bruke den videre til å løse oppgaven. I linje 2 løser vi en likning for å finne tidspunktene når gjennomsnittsfarten er lik 54 km/h. Ettersom sinusfunksjonen er gjentakende, vil det være mange ulike tidspunkt hvor dette vil inntreffe. Vi er imidlertid interessert i det første tidspunktet, og det forekommer når vi setter variabelen $k_1$ lik 1 i utrykket vi får. Det første tidspunktet dette inntreffer er derfor ved $t = \frac{\pi}{360}$ timer. For å omregne dette til sekunder kan vi multiplisere med 60 to ganger (det er 60 minutter per timer, og hvert minutt består av 60 sekunder).

Vi ser da, fra linje 3, at første gang bilen får en gjennomsnittsfart på 54 km/h er etter cirka 31,42 sekunder.

**b)** Akselerasjon er definert som endring i fart dividert på endring i tid. Vi vil derfor ha størst akselerasjon der hvor fartsfunksjonen definert i a) stiger eller synker brattest. Det vil skje i vendepunktene til funksjonen, og dette samsvarer med hvor funksjonen krysser likevektslinjen. Vi finner tidspunktene for når dette inntreffer i CAS:

| | |
|---|---|
| 4 | Løs(v(t)=54, t) |
| | → $\left\{t = \frac{1}{360} k_1 \pi + \frac{1}{720} \pi\right\}$ |

Vi ser altså at tidspunktene er gitt ved:

$$t = \frac{\pi}{360} \cdot k_1 + \frac{\pi}{720}$$

Her er $k_1$ et heltall, og tiden er oppgitt i timer.  Vi vurderer kun løsningene hvor $k_1 \geq 0$. Vi gjør dette om til sekunder ved å multiplisere med $60 \cdot 60$, og får da at akselerasjonen er størst ved tidspunktene (gitt i sekunder):

$$t = 10\pi \cdot k_1 + 15{,}71$$

Akselerasjonen vil altså nå første maksimumverdi ved $t = 15{,}71$ sekunder, og dette vil så gjenta seg hver gang vil legger til $10\pi \approx 31{,}4$ sekunder. Merk at annenhver gang vi akselerasjonen være i henholdsvis positiv og negativ retning.

(Denne deloppgaven kan selvsagt også løses enten ved å undersøke når fartsfunksjonen har dobbeltderivert lik 0, eller når akselerasjonsfunksjonen, som er den deriverte av fartsfunksjonen, har ekstremalpunkter).

**c)** Vi finner samlet forflytning ved å integrere fartsfunksjonen. Ettersom vi skal finne ut når tilbakelagt forflytning er på 2 km, må vi løse integrallikningen:

$$\int_0^x v(t)\mathrm{dt} = 2$$

Løser dette i CAS:

| | |
|---|---|
| 4 | NLøs(Integral(v(t), 0, x)=2, x) |
| | ≈ $\{x = 0.037\}$ |
| 5 | 0.037*60*60 |
| | ≈ 133.2 |

Vi ser av dette at samlet forflytning er på 2 km etter 0,037 timer. Dette er det samme som cirka 133 sekunder (vist i linje 5). Altså har bilen forflyttet seg 2 km etter 2 minutter og 13 sekunder.

## Oppgave 5

**a)** Gitt den rekursive følgen $1, 2, 6, 15, 31, 56, \ldots$

Hvis vi skriver dette som en rekursiv sammenheng, og gir følgen navnet $\{a_n\}$ har vi:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = 1 \\
&a_2 = a_1 + 1 \\
&a_3 = a_2 + 4 \\
&a_4 = a_3 + 9 \\
&a_5 = a_4 + 16 \\
&a_6 = a_5 + 25 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Den rekursive formelen er, som vi ser, gitt ved:

$$a_{n+1} = a_n + n^2, \quad \text{hvor } a_1 = 1$$

**b)** Vi lager et program i Python som skriver ut summen av de første 30 leddene i tallfølgen:

```python
# Starter med å definere det første leddet,
# og summen av dette leddet.
ledd = 1
sumverdi = 1

# Legger til verdiene av de neste 29 leddene
for n in range(1,30):
    ledd = ledd + n**2
    sumverdi = sumverdi + ledd

# Skriver ut svaret
print(sumverdi)

```

Når vi kjører programmet får vi utskriften:

```
67455
```

Summen av de 30 første leddene i tallfølgen er derfor lik 67455.

## Oppgave 6

Vi har gitt en sirkel med sentrum i $S(a, 0)$ og radius $R < a$. Vi skal så rotere sirkelen om $y$-aksen og vise at volumet av omdreiningslegemet blir lik $2\pi^2R^2a$.

Vi kan se på dette som akkurat samme problem som at vi har en sirkel med sentrum i $S(0, a)$ som vi skal rotere rundt $x$-aksen. Fra sirkellikningen har vi:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$$

Her er $S(x_1, y_1)$ sentrum i sirkelen og $R$ er radius i sirkelen. Basert på opplysningene gitt over vil sirkelen med sentrum i $S(0, a)$ være gitt ved:

$$x^2 + (y - a)^2 = R^2$$

Bruker så CAS til å løse for funksjonsuttrykkene til de to halvsirklene som til sammen utgjør hele sirkelen:

**CAS**

1
```
Løs(x^2 + (y-a)^2 = R^2, y)
```
$\rightarrow \left\{y = a - \sqrt{R^2 - x^2}, y = a + \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$

Volumet av omdreiningslegemet finner vi ved å finne differansen mellom volumet vi får når vi roterer øvre halvsirkel om $x$-aksen og volumet vi får når vi roterer nedre halvsirkel om $x$-aksen. For å gjøre det litt enklere med syntaksen, kan vi definere to ulike funksjoner, f.eks. $f(x)$ for øvre halvsirkel og $g(x)$ for nedre halvsirkel. Hver halvsirkel er definert fra og med $x = -R$ til og med $x = R$ ettersom sentrum ligger på $y$-aksen hvor $x = 0$. Løser så for volumet i CAS:

2
```
f(x):=a+sqrt(R^2-x^2)
```
$\rightarrow f(x) := a + \sqrt{R^2 - x^2}$

3
```
g(x):=a-sqrt(R^2-x^2)
```
$\rightarrow g(x) := a - \sqrt{R^2 - x^2}$

4
```
pi*Integral(f^2, -R, R) - pi*Integral(g^2, -R, R)
```
$\rightarrow 2\,R^2\,a\,\pi^2\,\mathrm{sgn}(R)$

Vi ser her at vi får det forventede volumet. Faktoren sgn(R) er her bare en faktor som har verdien +1 dersom $R$ er positiv og $-1$ dersom $R$ er negativ. Ettersom det ikke gir mening at radius er negativ i oppgaven, vil sgn(R) her kun ta verdien 1.

Vi har dermed vist av volumet av omdreiningslegemet er lik $2\pi^2 R^2 a$.