S2 – V24 – LF

Del 1: Uten hjelpemidler

Oppgave 1:

a) Regner ut integralet

$$\int_{-1}^{0} (-x^3 + 3x)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{3}{2}(-1)^2\right) = +\frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -\mathbf{\frac{5}{4}}$$

b) Funksjonen er antisymmetrisk og går gjennom origo. Da vil arealet være dobbelt så stort som arealet vi fant fra a).

Arealet av området er $\frac{5}{2}$.

Alternativt kunne vi regnet

$$\left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1\right| + \frac{5}{4}$$

Oppgave 2:

Regner ut integralet med variabelskifte:

$$\int (x^2+1)^3 \cdot 2xdx$$

Setter $u = x^2 + 1 \Rightarrow 2xdx = du$

$$\int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + C = \mathbf{\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C}$$

Oppgave 3:

a) Programmet starter med antall ledd $n = 0$ og summen $S = 0$.
Så lenge summen er lavere enn 200:
øker antall ledd med 1,
og leddet $a_n = 4n - 2$ legges til i summen.

Dette forteller oss altså hvor mange ledd i den aritmetiske rekken

$$2 + 6 + 10 + 14 + \cdots$$

som må være med før summen overstiger 200.

Antall ledd skrives ut.

b) Regner ut n fra summeformelen:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$200 = \frac{2 + 4n - 2}{2} \cdot n \Leftrightarrow 200 = 2n^2 \Leftrightarrow n = 10$$

Programmet skriver ut 11. (Summen måtte overstige 200).

Oppgave 4:

$$\mu = 4700$$
$$P(X > 5300) = 0{,}115$$

a) Bruker tabellen til å lese av z_0 slik at $P(Z > z_0) = 0{,}115$.
   (Leser av $P(Z < -z_0) = 0{,}115 \Rightarrow z_0 \approx 1{,}2$
   Regner om til standardavvik ved
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow 1{,}2 = \frac{5300-4700}{\sigma} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma} = \frac{600}{1{,}2} = \mathbf{500}$$
b) Regner fra tabellen når vi har $\mu = 4700, \sigma = 500$:
$$P(X < 4500) = P\left(Z < \frac{4500-4700}{500}\right) = P(Z < -0{,}40) = \mathbf{0,3446}$$
Sannsynligheten for at en vilkårlig laks veier mindre enn 4500 gram er 34,5%.

Oppgave 5:

$$E(x) = \frac{K(x)}{x}$$

Vi kan regne ut når enhetskostnaden har et ekstremalpunkt
(bunnpunkt når $K(x)$ andregradspolynom).

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{K(x)}{x}\right)' = \frac{K'(x)\cdot x - 1\cdot K(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow K'(x)\cdot x = K(x)$$
$$\Leftrightarrow K'(x) = \frac{K(x)}{x} = E(x)$$

Dermed har vi den laveste enhetskostnaden for $E(x_0) = K'(x_0)$ som var det som skulle vises.

Alternativt resonnement:
Vi kan tegne kostnadsfunksjonen i et koordinatsystem. For et vilkårlig punkt $(x, K(x))$ kan vi trekke en linje mellom dette punktet og origo, ℓ, og stigningstallet til denne linjen vil gi oss $E(x)$, ettersom stigningstallet $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K(x)-0}{x-0} = \frac{K(x)}{x}$.
Videre vil stigningstallet til tangenten til $K(x)$ være $K'(x)$, altså grensekostnaden.
På grunn av krumningen til $K(x)$ vil linjen ℓ skjære $K(x)$ i to punkter for alle verdier av x utenom ett, der denne linjen tangerer $K(x)$. I dette tilfellet er stigningstallet $E(x)$ lik $K'(x)$, og dette er også den verdien av x som gjør $E(x)$ lavest mulig.

Oppgave 6:

a) For en uniform terning kan vi finne forventningsverdien ved å regne ut gjennomsnittsverdien: $\frac{x_{lav}+x_{høy}}{2} = \frac{1+6}{2} = 3{,}5$

Vi kan også lage en sannsynlighetstabell og regne ut forventningsverdien på den «vanlige» måten:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \sum_k k \cdot P(X=k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \mathbf{3,5}$$

b) Vi vet at dersom $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, har vi

$$E(S) = n \cdot E(X), \qquad SD(S) = \sqrt{n} \cdot SD(X)$$

Vi vet også at S er normalfordelt for $n > 30$:

Dersom sannsynligheten er 32% for at summen ligger mer enn 17 unna forventningsverdien, er dette en tosidig situasjon. På grunn av symmetri kan vi velge å bare se på sannsynligheten for at summen er mindre enn 17 lavere enn forventningsverdien:

$$P(S > E(S) + 17) = P(S < E(S) - 17) = P\left(Z < -\frac{17}{SD(S)}\right) = 0{,}16$$

Regner ut at $-\frac{17}{SD(S)} \approx -1$

$$\Rightarrow SD(S) = \sqrt{n} \cdot SD(X) = \sqrt{n} \cdot 1{,}7 = 17$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow \boldsymbol{n = 100}$$

Hilde må kaste terningen 100 ganger før hun får 32% sannsynlighet for at summen ligger mer enn 17 unna forventningsverdien for summen.

Alternativt, mye raskere resonnement:

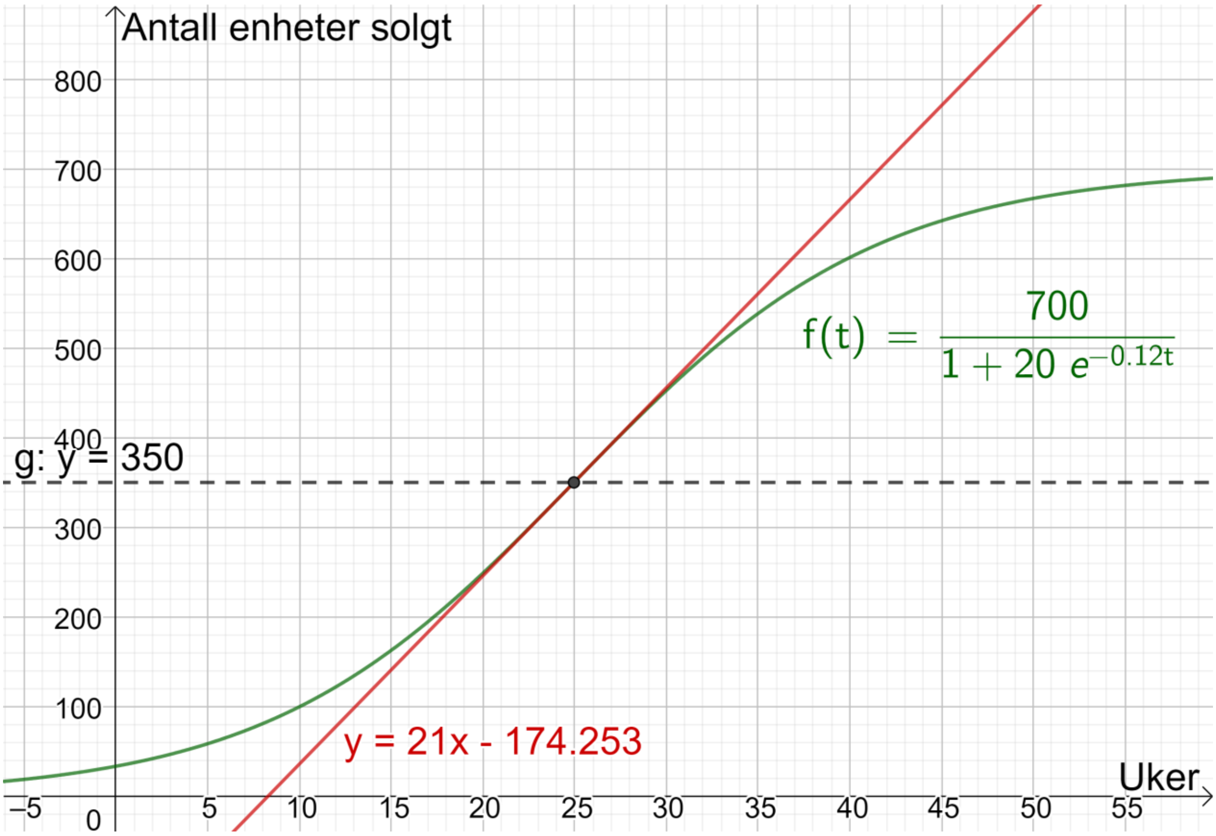
Vi vet at sannsynligheten for at et uttrekk fra en normalfordeling ligger mindre enn ett standardavvik unna forventningsverdien er ca. 68%. Dermed ser vi at 17 må tilsvare ett standardavvik:

$$SD(S) = \sqrt{n} \cdot SD(X) \Leftrightarrow 17 = \sqrt{n} \cdot 1{,}7 \Rightarrow \boldsymbol{n = 100}$$

Del 2: Alle hjelpemidler tillatt

Oppgave 1:

a) Finner vendetangenten til logistisk vekst ved å finne tangenten når funksjonsverdien er på halvparten av bæreevnen:



- Tegnet inn funksjonen $f(t)$
- Tegnet inn linja $g: y = 350$
- Fant skjæringspunktet A ved «Skjæring(f,g)».
- Fant tangenten ved «Tangent(A,f)»

Leser av førstekoordinaten til skjæringspunktet og stigningstallet til vendetangenten.

Ser at den høyeste veksten er etter 25 uker, og at veksten da er på 21 enheter i uken.

$f(t) = \frac{700}{1 + 20\,e^{-0.12t}}$

$g: y = 350$

$A = \text{Skjæring}(f, g, (24.964,\ 350))$
$= (24.964,\ 350)$

$h: \text{Tangent}(A, f)$
$= y = 21x - 174.253$

b) Regner ut integralet under funksjonen og ser når dette passerer 2000.
Bruker CAS:

$$\text{NLøs}(\text{Integral}(f, 0, t_0) = 2000)$$

$$\rightarrow \quad \{t_0 = 18.838\}$$

Det samlede salget passerer 2000 enheter i uke 19.

c) Integralet fra 0 til 52 gir antall solgte enheter første året. Dette multiplisert med prisen gir inntekten. Løser likningen i CAS:

$$\text{Solgte} := \int_0^{52} f\,dx$$

$$\approx \textbf{Solgte := 18863.445}$$

$$\text{Nløs}(\text{Solgte} \cdot p = 1000000)$$

$$\approx \{\mathbf{p = 53.013}\}$$

Butikken solgte varen til 53 kr per stk.

Oppgave 2:

a) Antar binomisk sannsynlighetsfordeling med $p = 0{,}75,\ n = 12$:

$$P(X = 9) = \binom{12}{9} 0{,}75^9 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}2581$$

Evt:

Binomisk fordeling n 12 p 0.75

P(9 ≤ X ≤ 9) = 0.2581

b) Setter nullhypotese som at B er like god som A, altså $p = 0{,}75$. Alternativhypotesen er at denne er bedre enn A, altså $p > 0{,}75$. Regner $P(X \geq 9)$ når $n = 10, p = 0{,}75$:

Binomisk fordeling n 10 p 0.75

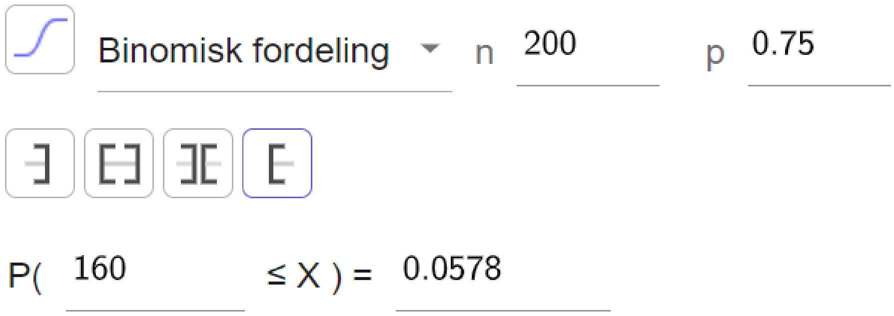
P(9 ≤ X) = 0.244

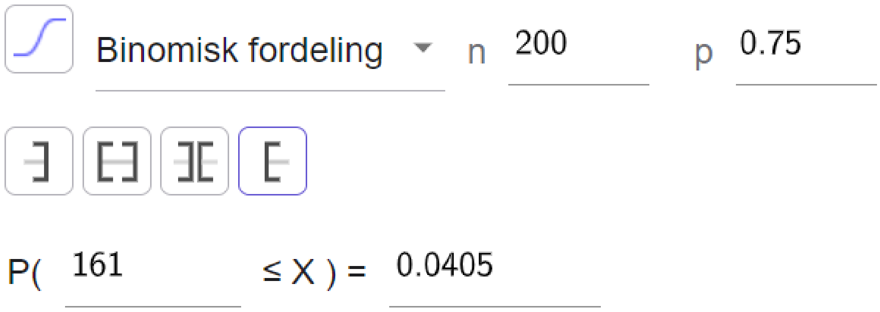
Med en P –verdi på 24,4 som er langt over signifikansnivået på 5, vil vi ikke kunne forkaste nullhypotesen om at B er like god som A.
Dermed kan vi ikke ut ifra disse målingene påstå at B er bedre enn A.

c) Vi må regne ut $P(X > k) = 0{,}05$. Dette kan være regnetungt, så hvis regneprogramvaren svikter, regner vi om til normalfordeling med

$$\mu = n \cdot p = 150, \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 6{,}1237$$

«Prøve og feile»:





Dersom medisin B virker på 161 eller flere pasienter, kan vi slå fast at den virker bedre enn medisin A ifølge denne hypotesetesten.

Alternativ: Fra normalfordelingen:

$$P(Z < -z_0) = 0{,}05 \Rightarrow z_0 = 1{,}645$$
$$P(Z > 1{,}645) = 0{,}05$$
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$x_0 = z_0 \cdot \sigma + \mu = 1{,}645 \cdot 6{,}1237 + 150 = 160{,}073$$
$$P(X > 160{,}073) = 0{,}05$$

Må dermed gå opp til 161 for å finne det første heltallet, k, som gir:

$$P(X \geq k) < 0{,}05$$

Legemiddel B må minst virke på 161 pasienter, osv.

Oppgave 3:

a) Standard utregning for annuitetslån: Lånesummen er lik summen av nåverdiene til terminbeløpene. Løser med CAS:

1 $\text{Nløs}\left(2500000 = \text{Sum}\left(\frac{T}{1.055^n}, n, 1, 25\right)\right)$

$\rightarrow \{T = 186373.382\}$

Terminbeløpet blir på 186 373,40 kr.

b) Vi kan se på dette som om hun tar opp et nytt lån, med lånesum på 500 000 som skal betales ned på 20 år, og regne terminbeløp for dette lånet. Deretter kan vi legge sammen terminbeløpene og få et nytt, totalt terminbeløp:

2 $\text{NLøs}\left(500000 = \text{Sum}\left(\frac{T_1}{1.055^n}, n, 1, 20\right)\right)$

$\rightarrow \{T_1 = 41839.665\}$

3 $\$1 + \$2$

$\approx \{T + T_1 = 228213.047\}$

Det nye terminbeløpet er på 228 213 kr.

c) Vi kan også regne ut lånesummen med utgangspunkt fra der hun tar opp ekstralånet: Da kunne vi løst b) slik

Nåverdi av (gammelt lån – nedbetalt + nytt lån) = Nåverdi av gjenstående nedbetalinger

$$2\,500\,000 \cdot 1{,}055^5 - \sum_{n=0}^{4} 186373{,}40 \cdot 1.055^n + 500\,000 = \sum_{i=1}^{20} \frac{T}{1{,}055^i}$$

Regner ut i to steg i CAS:

4 $L_0 := 2500000 \cdot 1.055^5 - \sum_{n=0}^{4} 186373.382 \cdot 1.055^n + 500000$

$\approx L_0 := 2727233.206$

5 $\text{NLøs}\left(L_0 = \sum_{n=1}^{20} \frac{T}{1.055^n}\right)$

$\approx \{T = 228213.048\}$

Ved å bytte ut terminbeløpet med 200 000 og antall terminer med en ukjent, k, finner vi ut hvor mye vi må endre løpetiden på lånet.

6 $$\text{nløs}\left(L_0 = \text{sum}\left(\frac{200000}{1.055^n}, n, 1, k\right)\right)$$
$$\approx \{k = 25.892\}$$

Vi må utvide løpetiden på lånet med 6 år dersom terminbeløpet ikke skal overstige 200 000 kr.

Oppgave 4:

a) Vi vet at et kubikktall kan skrives som n^3.
Den rekursive formelen får vi ved å legge til neste kubikktall, altså
$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$

b) Lager et enkelt program og et vanskeligere program:

```
S = 0
for n in range(1,51):
    S = S + (n)**3
print(S)
```

```
1625625
```

Kommentarer bør være med for best mulig kommunikasjon.

```
S = 0 #Starter uten noen kubikktall i summen
n = 50  #Antall kubikktall som skal være med i summen
for i in range(n):  #n ganger, fra og med i = 0 til og med i = n - 1
    S = S + (i + 1)**3  #Regn ut S_(n+1) ved å ta S_(n) + (n+1)^3 (rekursiv formel)
print(f'S_{n} = {S}')
```

```
S_50 = 1625625
```

$S_{50} = 1\ 625\ 625$

Oppgave 5:

a) Hypergeometrisk sannsynlighet:

Hypergeometrisk fordeling populasjon 30 n 15 utvalg 15

P(6 ≤ X ≤ 6) = 0.1615

Dersom det er 30 baller i kurven, 15 røde og 15 blå, er det 16,15% sannsynlighet for at Svein trekker 9 røde og 6 blå.

b) Kan undersøke hvordan $P(X = 6)$ forandrer seg når vi endrer antall baller (laveste mulige antall er 18, siden han trekker 9 røde). Her kan vi «prøve og feile» med ulike verdier, men dette er lite effektivt. Nå følger 2 forslag til løsning:

CAS + Grafikkfelt:

Lager en funksjon fra definisjonen av hypergeometrisk sannsynlighet:

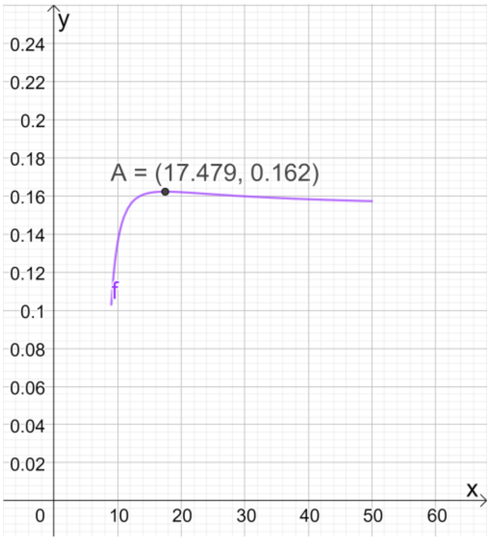
Dersom b er antallet røde og antallet blå baller:

$$P(b) = \frac{\binom{b}{6}\binom{b}{9}}{\binom{2b}{15}}$$

Definerer denne i CAS:

$$P(b) := \frac{nCr(b,\ 6)\ nCr(b,\ 9)}{nCr(2\ b,\ 15)}$$

Kan tegne grafen til $P(b)$ for $b \in [9, 50]$, kaller denne avgrensingen $f(x)$ i algebrafeltet:



Ser at det er høyest sannsynlighet nærmest $b = 17$, altså når Svein har 34 baller i kurven.

Kan regne ut sannsynligheten for $n = 34$ og for $n = 36$:

2	P(17)
	$\rightarrow \frac{20111}{124062}$
3	P(18)
	$\rightarrow \frac{20111}{124062}$

Om det er 34 eller 36 baller har ingenting å si for sannsynligheten. Alle andre alternativer gir lavere sannsynlighet for dette utfallet.

Andre metode: Programmering:

```
from pylab import *
#Definerer en funksjon som regner ut ncr
def ncr(n,k):
    resultat = 1
    for i in range(1,k+1):
        resultat = resultat * (n+1-i) / i
    return resultat

#Definerer en funksjon som regner sannsynligheten i dette tilfellet
#Lar denne være definert av antall baller av hver type
def P(baller):
    p = ncr(baller, 6) * ncr(baller, 9) / ncr(2*baller , 15)
    return p

#Setter opp en test for å finne maksimalverdien for P(baller), tester mellom 9 og 50
pmaks = 0
for ball in range(9, 51):
    if P(ball) > pmaks:
        pmaks = P(ball)
        maksantall = ball
print(maksantall)

```

```
17
```

Kan eventuelt utvide koden for å finne flere løsninger (forutsatt at sannsynligheten går mot et toppunkt) Linje 21 og 22 her sørger for at løsningen 18 baller av hver type også skrives ut:

```
16 pmaks = 0
17 for ball in range(9, 51):
18     if P(ball) > pmaks:
19         pmaks = P(ball)
20         maksantall = ball
21     elif P(ball) == pmaks:
22         print(ball)
23 print(maksantall)
```

```
18
17
```