Løsningsforslag S2 eksamen V2024

Ståle Gjelsten

2024-05-27

Jeg blir veldig glad om du melder ifra om feil enten direkte til meg eller via forumet på matematikk.net.

Oppgave 1-1

1-1a

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} \left(-x^3 + 3x\right)\, dx \\
&\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} \\
0 - &\left(-\frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{3}{2}(-1)^2\right) \\
&-\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Integralet er $\underline{\underline{-\frac{5}{4}}}$.

1-1b

Jeg finner først nullpunktene ved å faktorisere uttrykket.

$$f(x) = -x^3 + 3x = -x(x^2 - 3) = -x\left(x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = -x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

Vi har nullpunkter når $f(x) = 0$, altså ved $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$. Det er kun nullpunktet $x = 0$ som ligger mellom $x = -1$ og $x = 1$.

For å finne ut om funksjonen er positiv eller negativ i intervallene så sjekker jeg funksjonsverdien i $x = -1$ og $x = 1$.

$$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(1) = -(1)^3 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2$$

f er altså negativ i intervallet $[-1, 0\rangle$ og positiv i intervallet $\langle 0, 1]$. Vi finner arealet ved å ta integralene av hver del (og husker minustegn foran integralet til området som ligger under x-aksen).

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$
$$A = -\left(-\frac{5}{4}\right) + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^1$$
$$A = \frac{5}{4} + -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Arealet av området er $\underline{\underline{\frac{5}{2}}}$.

> ✎ **Antisymmetri**
>
> Du kan utnytte antisymmetrien til f til å argumentere for at arealet avgrenset av $x = -1$, f, x-aksen og $x = 0$ vil være like stort som arealet avgrenset av f, x-aksen, $x = 0$ og $x = 1$.

Oppgave 1-2

1-2

Jeg ser at hvis jeg velger $u = x^2 + 1$ og bruker variabelskifte, så kan jeg forkorte bort $2x$-faktoren senere.

$$\int (x^2+1)^3 \cdot 2x \,\mathrm{d}x = \int u \cdot 2x \,\mathrm{d}x$$
$$u = x^2 + 1$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$dx = \frac{du}{2x}$$

Jeg erstatter dx i det opprinnelige integralet med $\frac{du}{2x}$

$$\int u^3 \cdot 2x \,\mathrm{d}x = \int u^3 \cdot \cancel{2x}\frac{du}{\cancel{2x}} = \int u^3 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{4}u^4 + C = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + C}}$$

Oppgave 1-3

1-3a

Programmet viser en aritmetisk følge hvor hvert ledd er gitt av $a_n = 4n - 2$ for $n > 0$. Programmet regner ut delsummene, S_n, til den tilhørende rekka.

Programmet finner ut hvilket ledd i rekka som gjør at delsummen blir *over* 200.

1-3b

Siden tallfølgen er aritmetisk kan vi regne ut summen av de n første leddene med

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

Jeg vet at summen skal være *over* 200, at $a_1 = 2$ og jeg kan erstatte a_n med $4n - 2$. Dette gir

$$\begin{aligned}
200 &= \frac{2 + 4n - 2}{2} n \\
200 &= 2n^2 \\
100 &= n^2 \\
10 &= n
\end{aligned}$$

$n = 10$ gir oss altså nøyaktig delsummen $S_{10} = 200$. $n = 11$ gir oss den første delsummen som er over 200.

Programmet skriver ut 11.

Oppgave 1-4

1-4a

La X være vekten til en tilfeldig valgt fisk. Da er forventningsverdien $E(X) = 4700$.

Vi vet at 88,5 % av fisken som slaktes veier mindre eller lik 5300 gram. Ifølge normalfordelingstabellen så er $0{,}885 = \Phi(1{,}2) \implies z = 1{,}2$.

Vi kan da sette opp likningen

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \iff 1{,}2 = \frac{5300 - 4700}{\sigma} \iff \sigma = \frac{600}{1{,}2} = 500$$

Standardavviket for en vilkårlig valgt laks er 500 gram.

1-4b

Vi gjør om til standard normalfordeling

$$z = \frac{4500 - 4700}{500} = -\frac{200}{500} = -0{,}4$$

Normalfordelingstabellen gir oss $\Phi(-0{,}4) = 0{,}345$.

Sannsynligheten for at en vilkårlig valgt laks veier mindre enn 4500 gram er 34,5 %.

Oppgave 1-5

Vi har de laveste enhetskostnadene når $E'(x) = 0$. Vi kan altså sette opp

$$\begin{aligned}
E'(x) &= 0 \\
\left(\frac{K(x)}{x}\right)' &= 0 \\
\frac{K'(x) \cdot x - K(x) \cdot 1}{x^2} &= 0 \\
K'(x) \cdot x - K(x) &= 0 \\
K'(x) &= \frac{K(x)}{x} \\
K'(x) &= E(x)
\end{aligned}$$

Hvis x_0 er antallet enheter som gir lavest enhetskostnader så ser vi at dette må være lik grensekostnaden, altså $K'(x_0) = E(x_0)$.

Oppgave 1-6

1-6a

For å finne forventningsverdien lager jeg en tabell og regner ut $\sum_{i=1}^{6} x \cdot P(X = x)$

x	$P(X = x)$	$x \cdot P(X = x)$
1	$\frac{1}{6}$	$1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$

Sum	1	$\frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5$

Forventningsverdien er 3,5.

1-6b

Standardavviket til ett kast er $SD(X) = 1{,}7$.

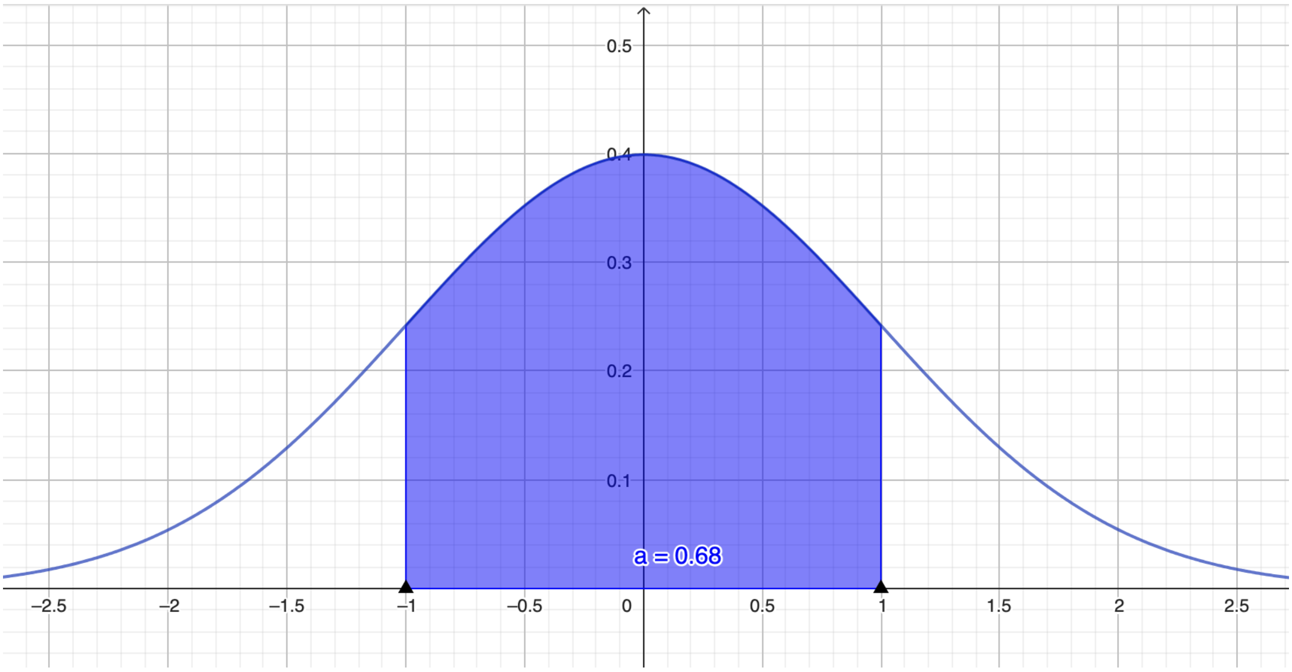
Vi lar S være summen av n forsøk med X slik at

$$S = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

Sentralgrensesetningen sier at S vil være tilnærmet normalfordelt med variansen og standardavviket:

$$\text{Var}(S) = n \cdot \text{Var}(X) \implies SD(S) = \sqrt{n} \cdot SD(X)$$

Fra normalfordelingstabellen så kan jeg finne ut at 68 % av arealet under normalfordelingskurven ligger innenfor pluss/minus ett standardavvik fra forventningsverdien. Altså må det være 32 % sannsynlighet for å få observasjon *mer enn* ett standardavvik fra forventningsverdien.

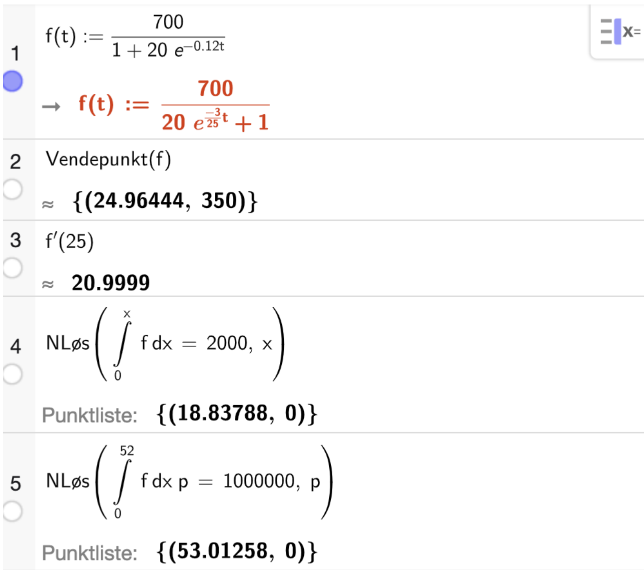


Siden vi vet at 32 % tilsvarer mer enn ett standardavvik fra forventningsverdien, må 17 øyne være ett standardavvik.

$$SD(S) = 17$$
$$\sqrt{n} \cdot SD(X) = 17$$
$$\sqrt{n} \cdot 1{,}7 = 17$$
$$\sqrt{n} = 10$$
$$n = 100$$

Hilde må kaste terningen 100 ganger før det er omtrent 32 % sannsynlighet for at summen av antall øyne er mer enn 17 unna forventningsverdien for summen.

Oppgave 2-1



Figur 1: CAS-utklipp til oppgave 2-1

2-1a

Jeg ser at funksjonen er logistisk og jeg vet at den største vekstfarten er i vendepunktet.

Jeg finner vendepunktet i GeoGebra, se linje 2 i utklippet, vendepunktet er ved 25 enheter solgt. Vekstfarten ved 25 solgte enheter finner jeg ved å bestemme $f'(25)$ i linje 3.

Salget økte raskest i uke 25, da økte salget med 21 enheter per uke.

2-1b

Vi kan finne det samlede salget ved å bestemme arealet under grafen til f.

I linje 4 setter jeg opp likningen

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2000$$

Det tok nesten 19 uker før salget passerte 2000 enheter.

2-1c

Inntektene fra salget må være gitt ved antall enheter solgt $\times$ pris per enhet.

I linje 5 setter jeg opp likningen

$$\int_0^{52} f(t)\,dt \cdot p = 1\,000\,000$$

der p er den ukjente prisen per enhet.

Butikken har solgt produktet for 53 kr.

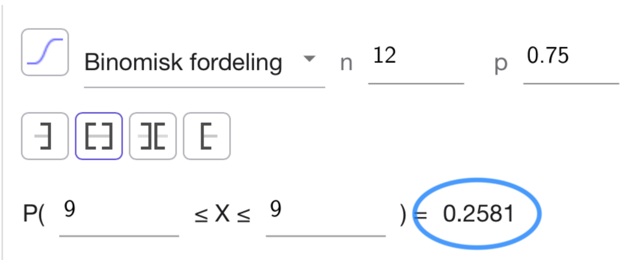
Oppgave 2-2

2-2a

X er binomisk fordelt fordi

- Vi har n delforsøk
- Sannsynligheten for at legemiddelet fungerer er $p = 0{,}75$ i alle forsøkene
- Vi må anta at vi tester legemiddelet på tilfeldige pasienter slik at delforsøkene blir uavhengige.

Jeg bruker GeoGebras sannsynlighetskalkulator til å bestemme $P(X = 9)$.



Figur 2: Utklipp til oppgave 2-2a

$$P(X = 9) = \underline{\underline{0{,}258}}$$

✎ Utregning med formel for binomisk

Du kan også finne denne punktsannsynligheten enkelt med formelen for binomisk sannsynlighetsfordeling

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

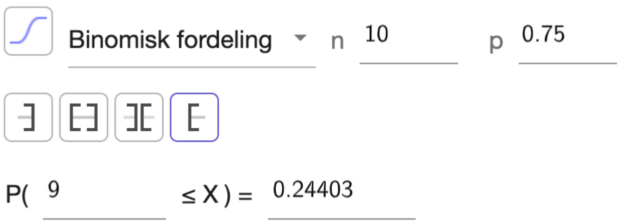
$$P(X = 9) = \binom{12}{9} \cdot 0{,}75^9 \cdot 0{,}25^3 = 0{,}2581$$

2-2b

Nullhypotesen vår er at begge legemidlene er like effektive, mens den alternative hypotesen er at legemiddel B er bedre.

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad p = 0{,}75 \\ H_A : &\quad p > 0{,}75 \end{aligned}$$

Jeg finner sannsynligheten for at legemiddel B skal ha fungert på 9 av 10 pasienter gitt at H_0 er sann ved hjelp av GeoGebra.



Figur 3: Utklipp til oppgave 2-2b

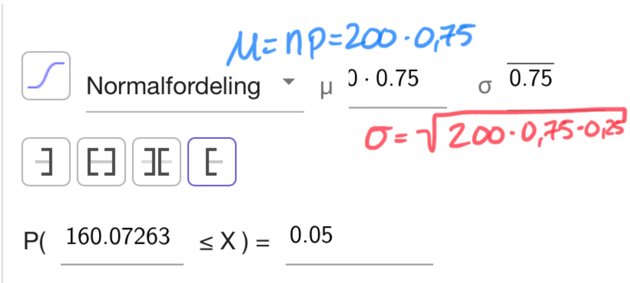
p-verdien er 0,244, dette er større enn signifikansnivået 0,05. Vi kan ikke forkaste H_0, og vi kan dermed ikke si at legemiddel B fungerer bedre enn legemiddel A.

2–2c

✎ Oppgaven kan også løses med binomisk fordeling

Denne oppgaven lar seg fint løse i GeoGebra ved å prøve seg fram med binomisk fordeling. Av gammel vane har jeg valgt å bruke normalfordeling som en tilnærming til den binomiske. Dette gir meg også mulighet til å skrive inn signifikansnivået 0,05 i svarfeltet i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.
Siden $\text{Var}(X)$ er høy så er normalfordelingen en veldig god tilnærming, og vi får samme svar uansett hvilken fordeling vi velger.

Jeg lar Y være antallet pasienter som legemiddel B fungerer for av de 200 pasientene. Y er tilnærmet normalfordelt siden $(\text{Var}(Y) = 200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25) \gg 5$.



Figur 4: Utklipp til oppgave 2-2c

Jeg legger inn normalfordelingen med $\mu = 200 \cdot 0{,}75$ og $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}$. Deretter la jeg inn signifikansnivået 0,05 i svarfeltet, det gir oss at Y må være minst 160,07. Vi må runde opp til 161 for å være sikre på at p-verdien blir lavere enn signifikansnivået.

For å konkludere med at legemiddel B virker bedre enn A må det virke på minst 161 av de 200 pasientene.

Oppgave 2-3

Jeg velger å løse disse oppgavene i CAS, men jeg har tatt med et eksempel på løsning i regneark på oppgave 3c), se nedenfor.

2-3a

Summen av nåverdiene til terminbeløpene skal bli lik lånebeløpet. Jeg setter opp dette som en likning i CAS med `Sum((x/1.055^i), i, 1, 25) = 25000000` og løser, se linje 1 i utklippet.

Terminbeløpet er 186 373 kr.

1 $\sum_{i=1}^{25} \frac{x}{1.055^i} = 2500000$

NLøs: $\{x = 186373.38237\}$

2 $\sum_{i=1}^{20} \frac{x}{1.055^i} = 500000$

NLøs: $\{x = 41839.66502\}$

3 $\text{HøyreSide}(\$1) + \text{HøyreSide}(\$2)$

$\approx \{228213.04738\}$

4 $\sum_{i=21}^{25} \frac{\text{HøyreSide}(\$1)}{1.055^i}$

$\approx \{272766.79572\}$

5 $\text{Sum}\left(\frac{200000}{1.055^i},\ i,\ 1,\ x\right) = 2500000 + 500000 - \text{Element}(\$4, 1), x = 1$

NLøs: $\{x = 25.8915\}$

Figur 5: Utklipp til oppgave 2-3

2-3b

Jeg setter opp det det ekstra lånet som et nytt lån til samme rente med 20 års nedbetalingstid. Jeg regner ut terminbeløpet til dette lånet på samme måte som i a), og får terminbeløpet 41 839,67 kr. Se linje 2 i utklippet.

Olivia må betale for begge lånene fra år 5 og utover, se linje 3.

Det nye terminbeløpet blir 228 213 kr fra år 5 og utover.

2-3c

Etter 5 år så har Olivia allerede betalt ned lånet med kr 272 767, se linje 4.

I linje 5 så setter jeg opp en likning. På venstre side har vi summen av nåverdiene til terminbeløpene, men med ukjent antall terminer. På høyre side har vi lånebeløpet etter 5 år, som blir det originale lånebeløpet og ekstralånet, minus 272 767 kr. Fra CAS ser jeg at det tar 25,89 år etter de 5 første årene før lånet er nedbetalt. Jeg runder opp til 26 siden det er først i dette året at lånet er tilbakebetalt.

Den nye tilbakebetalingstiden blir 31 år.

✎ Løsning med regneark

Det er mulig å gjøre alle deloppgavene i denne oppgaven i regneark (i hvert fall hvis du bruker målsøking).
Nedenfor har jeg løst oppgave c) i regneark ved å sette opp lånet og beregne renter for hvert år. I år 5 så legger jeg til 500 000 kr ekstra på lånet (celle `C43`) og endrer terminbeløpet til 200 000 kr (celle `E43`).
Deretter fyller jeg bare formlene nedover og utvider tabellen fram til jeg ser at lånet er tilbakebetalt.
Som vi ser er lånet fullstendig tilbakebetalt i år 31 hvor avdragene er større enn restlånet.

Rente		5,50 %
Lånebeløp	kr	2 500 000,00
Ekstralån år 5	kr	500 000,00

År	Restlån	Renter	Terminbeløp	Avdrag
1	kr 2 500 000,00	kr 137 500,00	kr 186 373,38	kr 48 873,38
2	kr 2 451 126,62	kr 134 811,96	kr 186 373,38	kr 51 561,42
3	kr 2 399 565,20	kr 131 976,09	kr 186 373,38	kr 54 397,30
4	kr 2 345 167,90	kr 128 984,23	kr 186 373,38	kr 57 389,15
5	kr 2 287 778,76	kr 125 827,83	kr 186 373,38	kr 60 545,55
6	kr 2 727 233,20	kr 149 997,83	kr 200 000,00	kr 50 002,17
7	kr 2 677 231,03	kr 147 247,71	kr 200 000,00	kr 52 752,29
8	kr 2 624 478,74	kr 144 346,33	kr 200 000,00	kr 55 653,67
9	kr 2 568 825,07	kr 141 285,38	kr 200 000,00	kr 58 714,62
10	kr 2 510 110,45	kr 138 056,07	kr 200 000,00	kr 61 943,93
11	kr 2 448 166,52	kr 134 649,16	kr 200 000,00	kr 65 350,84
12	kr 2 382 815,68	kr 131 054,86	kr 200 000,00	kr 68 945,14
13	kr 2 313 870,54	kr 127 262,88	kr 200 000,00	kr 72 737,12
14	kr 2 241 133,42	kr 123 262,34	kr 200 000,00	kr 76 737,66
15	kr 2 164 395,76	kr 119 041,77	kr 200 000,00	kr 80 958,23
16	kr 2 083 437,53	kr 114 589,06	kr 200 000,00	kr 85 410,94
17	kr 1 998 026,59	kr 109 891,46	kr 200 000,00	kr 90 108,54
18	kr 1 907 918,05	kr 104 935,49	kr 200 000,00	kr 95 064,51
19	kr 1 812 853,55	kr 99 706,95	kr 200 000,00	kr 100 293,05
20	kr 1 712 560,49	kr 94 190,83	kr 200 000,00	kr 105 809,17
21	kr 1 606 751,32	kr 88 371,32	kr 200 000,00	kr 111 628,68
22	kr 1 495 122,64	kr 82 231,75	kr 200 000,00	kr 117 768,25
23	kr 1 377 354,39	kr 75 754,49	kr 200 000,00	kr 124 245,51
24	kr 1 253 108,88	kr 68 920,99	kr 200 000,00	kr 131 079,01
25	kr 1 122 029,87	kr 61 711,64	kr 200 000,00	kr 138 288,36
26	kr 983 741,51	kr 54 105,78	kr 200 000,00	kr 145 894,22
27	kr 837 847,29	kr 46 081,60	kr 200 000,00	kr 153 918,40
28	kr 683 928,89	kr 37 616,09	kr 200 000,00	kr 162 383,91
29	kr 521 544,98	kr 28 684,97	kr 200 000,00	kr 171 315,03
30	kr 350 229,96	kr 19 262,65	kr 200 000,00	kr 180 737,35
31	kr 169 492,60	kr 9 322,09	kr 200 000,00	kr 190 677,91

År	Restlån	Renter	Terminbel	Avdrag
1	=D3	=C38*rente	#I/T	=E38-D38
2	=C38-F38	=C39*rente	=E38	=E39-D39
3	=C39-F39	=C40*rente	=E39	=E40-D40
4	=C40-F40	=C41*rente	=E40	=E41-D41
5	=C41-F41	=C42*rente	=E41	=E42-D42
6	=C42-F42+D4	=C43*rente	#I/T	=E43-D43
7	=C43-F43	=C44*rente	=E43	=E44-D44
8	=C44-F44	=C45*rente	=E44	=E45-D45
9	=C45-F45	=C46*rente	=E45	=E46-D46
10	=C46-F46	=C47*rente	=E46	=E47-D47
11	=C47-F47	=C48*rente	=E47	=E48-D48
12	=C48-F48	=C49*rente	=E48	=E49-D49
13	=C49-F49	=C50*rente	=E49	=E50-D50
14	=C50-F50	=C51*rente	=E50	=E51-D51
15	=C51-F51	=C52*rente	=E51	=E52-D52
16	=C52-F52	=C53*rente	=E52	=E53-D53
17	=C53-F53	=C54*rente	=E53	=E54-D54
18	=C54-F54	=C55*rente	=E54	=E55-D55
19	=C55-F55	=C56*rente	=E55	=E56-D56
20	=C56-F56	=C57*rente	=E56	=E57-D57
21	=C57-F57	=C58*rente	=E57	=E58-D58
22	=C58-F58	=C59*rente	=E58	=E59-D59
23	=C59-F59	=C60*rente	=E59	=E60-D60
24	=C60-F60	=C61*rente	=E60	=E61-D61
25	=C61-F61	=C62*rente	=E61	=E62-D62
26	=C62-F62	=C63*rente	=E62	=E63-D63
27	=C63-F63	=C64*rente	=E63	=E64-D64
28	=C64-F64	=C65*rente	=E64	=E65-D65
29	=C65-F65	=C66*rente	=E65	=E66-D66
30	=C66-F66	=C67*rente	=E66	=E67-D67
31	=C67-F67	=C68*rente	=E67	=E68-D68

Figur 6: Utklipp av regneark til oppgave 2-c

Oppgave 2-4

2-4a

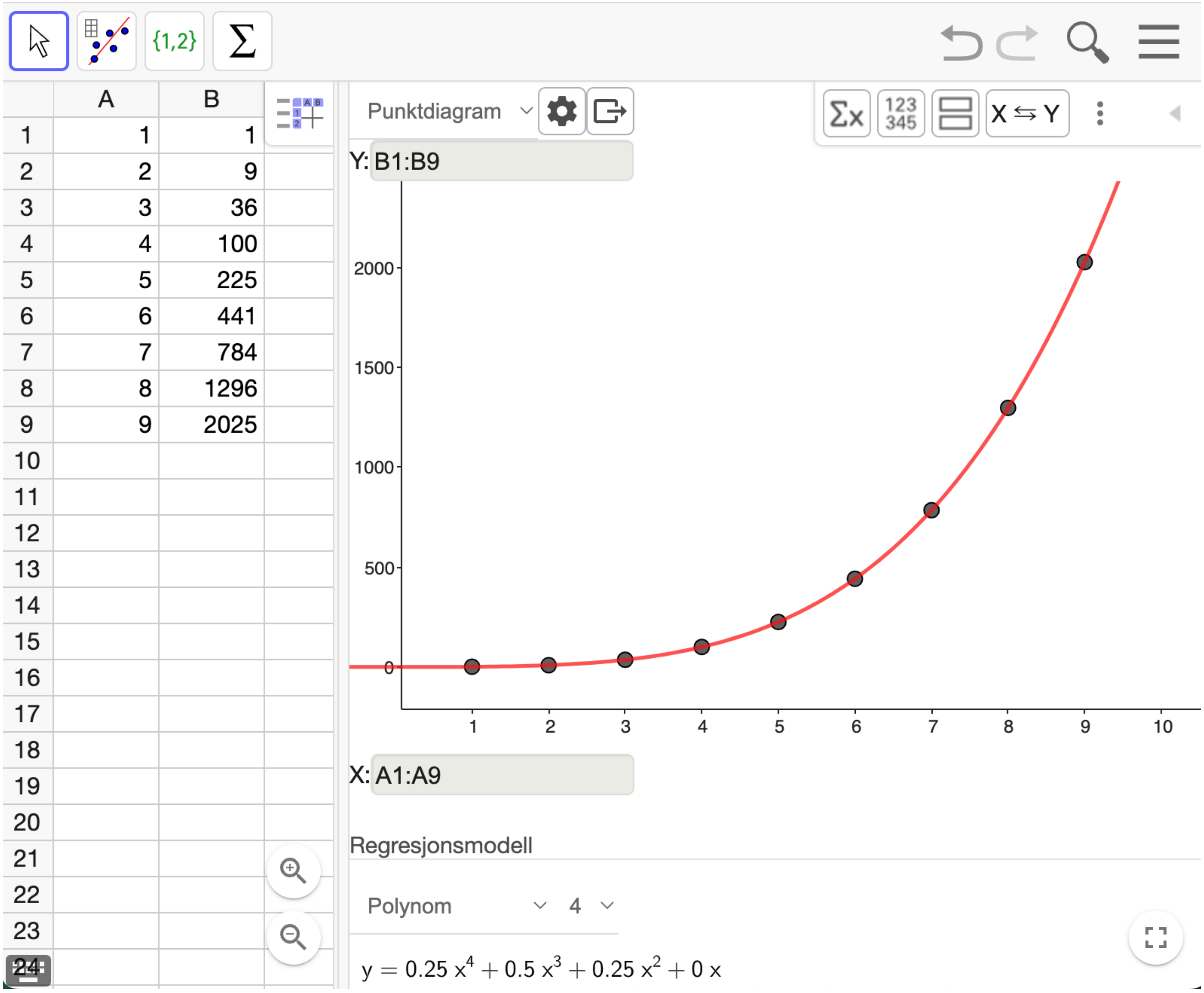
Jeg setter opp de første leddene og ser om jeg finner en rekursiv sammenheng som jeg kan bruke.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1^3 \\
S_2 &= 1^3 + 2^3 = S_1 + 2^3 \\
S_3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 = S_2 + 3^3
\end{aligned}
$$

Jeg ser at hvert ledd er det forrige leddet, pluss det neste kubikktallet. En rekursiv sammenheng mellom summene er altså

$$\underline{\underline{S_{n+1} = S_n + (n+1)^3}}$$

For å bestemme en eksplisitt formel brukte jeg regresjon i GeoGebra.



En eksplisitt formel for summene er

$$\underline{\underline{S_n = \frac{1}{4}\left(n^4 + 2n^3 + n^2\right)}}$$

2-4b

Jeg bruker følgende program

```
S = 0 # starter summen på 0

for n in range(1, 51):
    # kjører løkka 50 ganger
    S = S + n**3 #legger n^3 til S

print(S)
```

Programmet gir at $S_{50} = 1\,625\,625$.

Oppgave 2-5

2-5a

Vi har et forsøk uten tilbakelegging med to typer baller, så vi kan bruke en hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling. Hvis det er 15 baller av hver type er sannsynligheten for å trekke 9 røde og 6 blå baller gitt ved

$$P(R = 9) = \frac{\binom{15}{9}\binom{15}{6}}{\binom{30}{15}} = 0{,}161$$

Sannsynligheten for å trekke 9 røde og 6 blå baller er 16,1 %.

2-5b

Løsningsmetode 1: Programmering Her prøver jeg meg fram med programmering og setter inn ulike verdier for antallet baller i kurva. Man kan programmere binomialkoeffisientfunksjonen selv, eller bruke en ferdig funksjon fra `math`-biblioteket.

```
import math #math.comb er binomialkoeff.funksjonen

rod = 9
bla = 6

for n in range(18, 201, 2):
    # lager ei løkke som tester alle partall fra 18 til og med 200
    n1 = int(n/2) # halvparten av ballene er røde (må gjøre om til heltall)
    teller = math.comb(n1, rod) * math.comb(n1, bla)
```

```python
    nevner = math.comb(n, (rod+bla))
    ssh = teller / nevner

    print(f"Ved {n} baller P(R=9) = {ssh:.5f}")
```

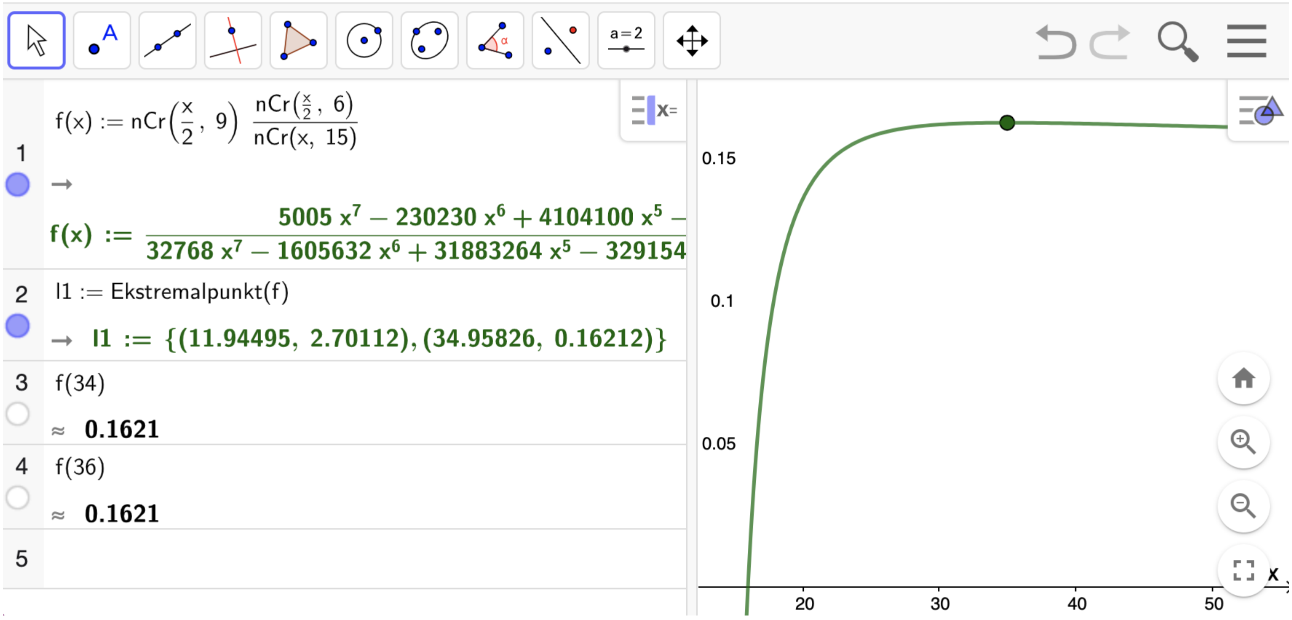
Utskriften forteller meg at det mest sannsynlige antallet baller i kurven er 34 eller 36.

> ✎ **Bruk 2n istedenfor n/2**
>
> I mitt løsningsforslag har jeg gått ut fra at krukka inneholder n baller. Det er nok lurere å si at det er n røde baller i krukka, og at krukka samlet sett inneholder $2n$ baller. Da slipper du å gjøre om $\frac{n}{2}$ til heltall med `int()`.

Løsningsmetode 2: Funksjon Jeg lager en funksjon hvor antall baller i kurva er ukjent.

$$f(x) = \frac{\binom{\frac{x}{2}}{9}\binom{\frac{x}{2}}{6}}{\binom{x}{15}}$$

Denne funksjonen er egentlig bare gyldig for partallene fra 18 og oppover, men jeg velger å tegne den uten begrensning i GeoGebra for å kunne finne ekstremalpunkter enkelt.



Jeg definerer funksjonen i CAS og finner ekstremalpunktet, se linje 1 og 2. Ekstremalpunktet ligger ved $x = 34{,}96$, dette er ikke en gyldig verdi for x. Jeg tester derfor sannsynligheten ved $x = 34$ og $x = 36$, begge disse er like store.

Det lå mest sannsynlig 34 eller 36 baller i kurven.