R1 Eksamen H2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

25. november 2023

Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

Vi bruker produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot \ln(x) \\ f'(x) &= 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x \end{aligned}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

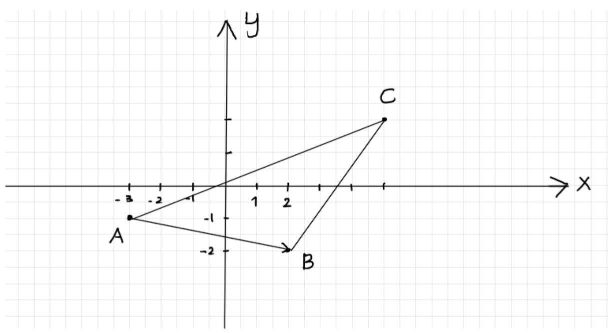
$$\begin{aligned} 2\ln\left(e^3\right) &= 2 \cdot 3 \cdot \ln(e) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \\ e^{3 \cdot ln 2} &= e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8 \\ 3\lg(70) &= 3 \cdot \lg(7 \cdot 10) = 3 \cdot (\lg(7) + \lg(10)) \\ &= 3 \cdot (\lg(7) + 1) = 3 \cdot \lg 7 + 3 \\ \lg(1) &< \lg 7 < \lg(10) \\ 0 &< \lg 7 < 1 \Rightarrow 3 \cdot \lg(70) < 6 \end{aligned}$$

Ut fra analysen over kan vi skrive tallene i stigende rekkefølge slik:

$$3 \cdot \lg 70, \quad 2\ln e^3, \quad e^{31n2}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a)



$$\begin{aligned}
AB &= [2-(-3),-2-(-1)] = [2+3,-2+1] = [5,-1] \\
AC &= [5-(-3),2-(-1)] = [5+3,2+1] = [7,3] \\
BC &= [5-2,2-(-2)] = [3,2+2] = [3,4] \\
|AB| &= \sqrt{s^2+(-1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} \\
|AC| &= \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \\
|BC| &= \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5
\end{aligned}$$

Den korteste siden er $BC = 5$

b)

$$\begin{aligned}
&AB \cdot AC = 5 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 = 40 - 3 = 37 > 0 \\
&BA \cdot BC = [-5,1] \cdot [3,4] = -5 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = -15 + 4 = -11 < 0 \\
&CA \cdot CB = -AC \cdot (-BC) = AC \cdot BC = 8 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24 + 12 = 36 > 0
\end{aligned}$$

Siden ingen av skalarproduktene for vektorene som danner alle tre vinklene i trekanten er null så ingen av vektor-parene er vinkelrette på hverandre og dermed ingen rettvinkel i trekanten.

Oppgave 4 (2 poeng)

a)

Eleven bruker strategien om å finne den deriverte numerisk i punktene fra $x = 0$ fram til den deriverte skifter fortegen fra negativt til positivt som gir oss da bunnpunkt. Så lenge den deriverte er negativt (blir sjekket i while-løkke betingelsen), økes x-verdien med 1, og deretter beregnes den deriverte igjen til $f(x)' >= 0$.

b)

Vi regner bunnpunktet slik:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 9x - 2 \\
f'(x) &= 4x - 9 \\
f(x) &= 0 \Rightarrow 4x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4} = 2,25
\end{aligned}$$

x verdien til bunnpunktet er $2,25$. Derfor må vi endre linje 11 til a=a+0.01 fordi vi går forbi bunnpunktet når x verdien økes med 1.

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (6 poeng)

a)

Funksjonen $f(t)$ som oppgitt i oppgavenen, en sammensatt funksjon av en eksponential-funksjon $-2,5 \cdot 0,99^t$ og en konstantfunksjon $2,5$.Siden

$$-2,5$$

er startverdi i den eksponentiale delen og konsentrasjonen er null når tiden er null,og vi vet eksponential funksjon kan ikke være null, må vi trekke $2,5$ fra hver konsentrasjon. Vi legger punktene (tid med konsentrasjon -2,5) i et regneark i geogebra, lager liste med punkter så bruker vi eksponentiellregresjon som gir oss funksjon $f(x)$. Vi definerer en ny funksjon $g(x) = 2.5 + f(x)$. Vi ser fra utklippene under at g vil gå mot 2,5 når t går mot uendelig

	A	B	C
1	Tid(s)	Konsentrasjon (mmol/L)	Konsentrasjon -2.5
2	0	0	-2.5
3	10	0.28	-2.22
4	20	0.53	-1.97
5	30	0.76	-1.74
6	40	0.95	-1.55
7	50	1.13	-1.37
8	60	1.28	-1.22

Figur 2

$l1 = \{A, B, C, D, E, F, G\}$

$= \{(0, -2.5), (10, -2.22), (20, -1.97), (30, -1.74), (40, -1.55), (50, -1.37), (60, -1.22)\}$

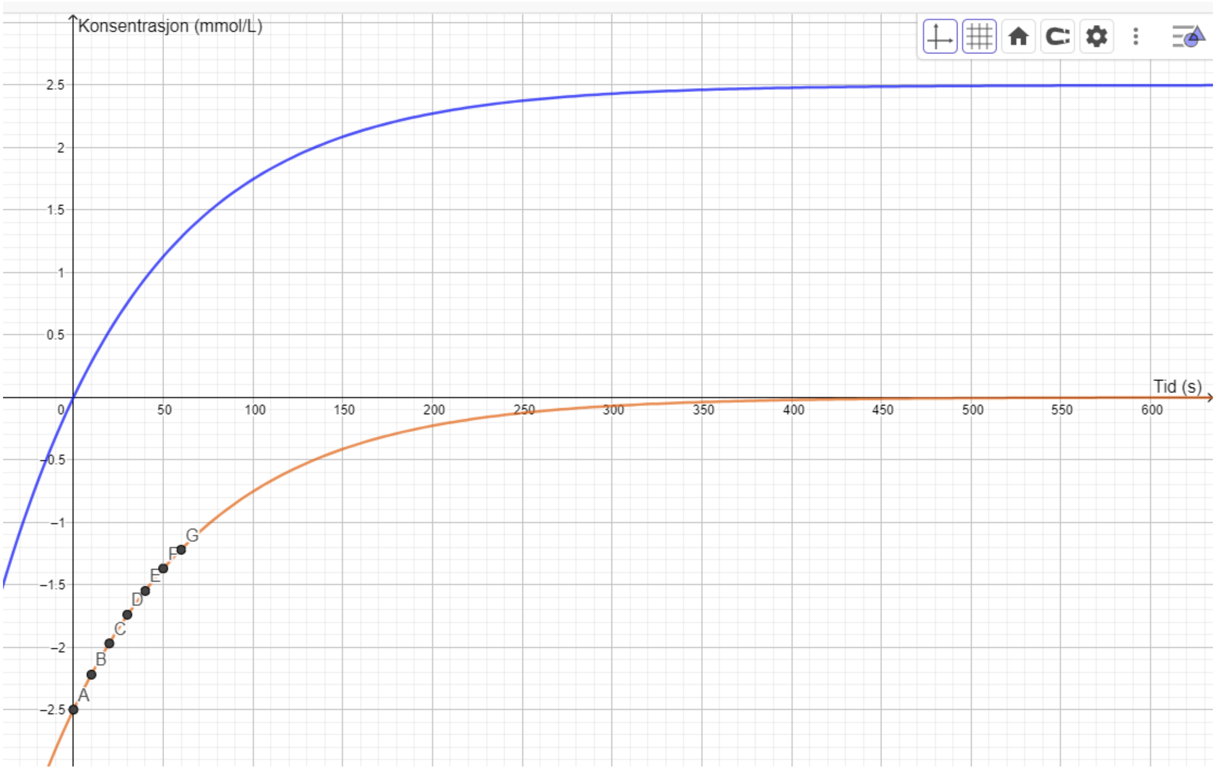
$f(x) = \text{RegEksp}(l1)$

$= -2.5 \cdot 0.99^x$

$g(x) = 2.5 + f(x)$

$= 2.5 - 2.5 \cdot 0.99^x$

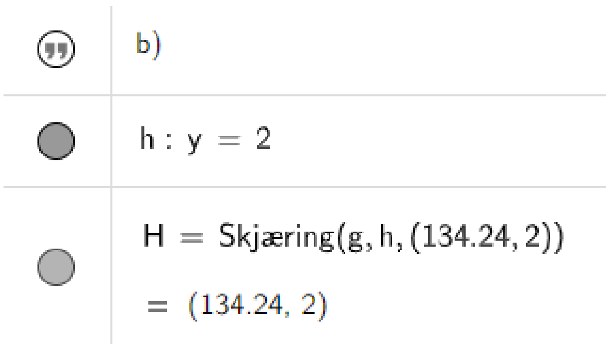
Figur 3

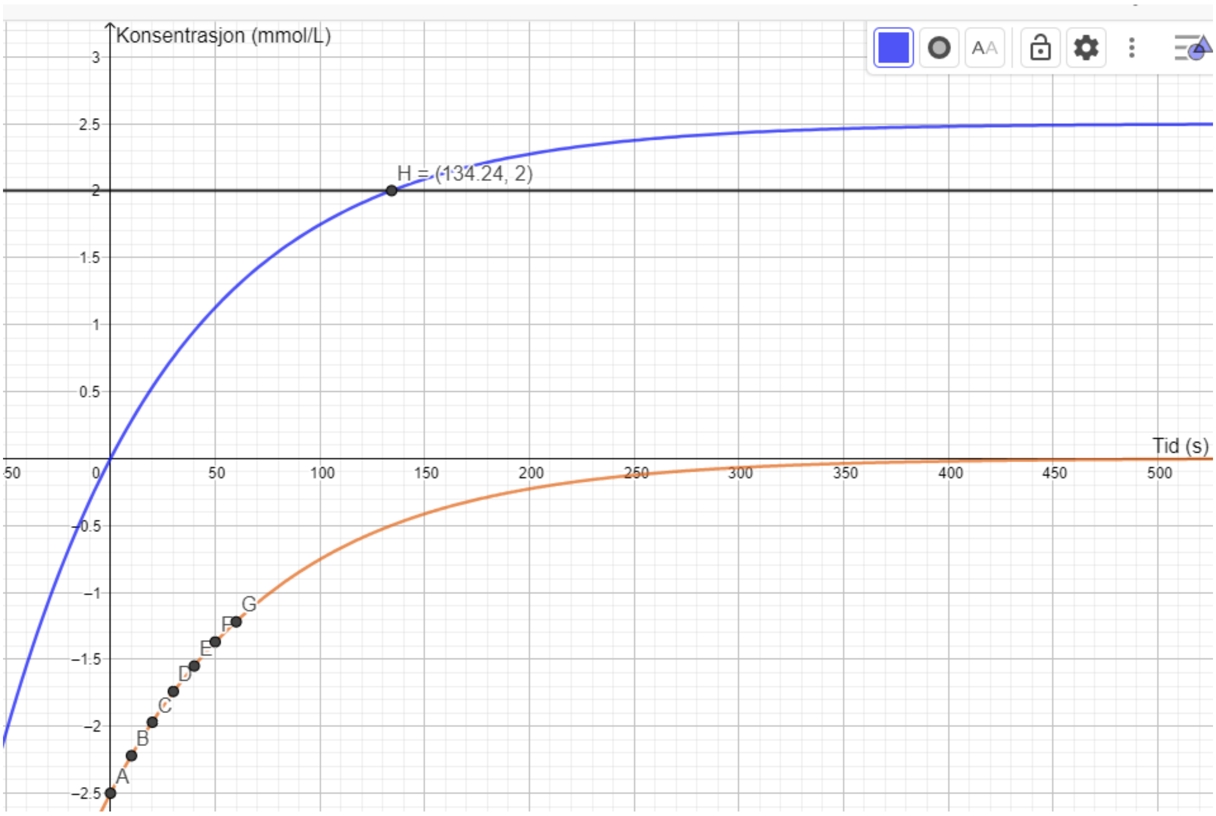


Figur 4

b)

Vi bruker graftegner til å tegne linjen $y = 2$, så velger vi Skjæring mellom to objekt fra algebrafelt meny og markerer grafen til $g(x)$ og linjen for å finne skjæringspunkt (se utklippene under).



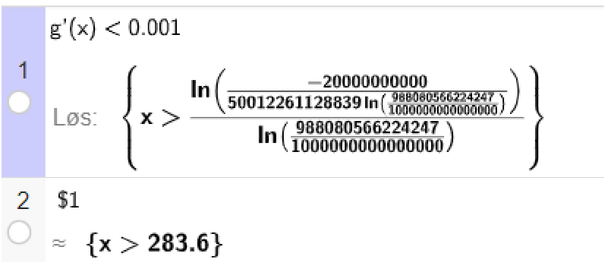


Figur 5

Det går omtrent 134 sekunder før konsentrasjonen er på $2,5\,mmol/L$

c)

Konsentrasjonen øker med mindre enn $0.001\,mmol/L$ per sekund når $f'(x) < 0,001$, vi finner tiden ved å løse ulikheten i Cas



Figur 6

Det vi ta 283,6 sekunder før konsentrasjonen øker med mindre enn $0.001\,mmol/L$ per sekund.

Oppgave 2 (6 poeng)

a)

En funksjon er kontinuerlig i et punkt hvis grenseverdien fra høyre er lik grenseverdi fra venstre (m.a.o. grenseverdien eksisterer) og den er lik funksjonsverdien i punktet. Denne funksjonen er kontinuerlig overalt (begge delene er polynomer av andregrad), men vi må sjekke kontinuitet i delingspunktet ($x = k$). For å gjøre utregninger enklere kaller jeg den øverste funksjonen for $g(x)$ og den nederste for $h(x)$,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -x^2 + (2+k)\,x \\
h(x) &= x^2 + (2-k)\,x \\
f(x) &= \begin{cases} g(x)\,, x < k \\ h(x)\,, x \geq k \end{cases} \\
\lim_{x \to k^-} f(x) &= g(k) = -k^2 + (2+k)\,k = -k^2 + 2k + k^2 = 2k \\
\lim_{x \to k^+} f(x) &= h(k) = k^2 + (2-k) \cdot k = k^2 + 2k - k^2 = 2k \\
f(k) &= h(k) = 2k
\end{aligned}
$$

Funksjonen f er kontinuerlig i $x = k$ for alle verdier for k siden kontinuitetsbetingelsen er oppfylt for alle k-verdier.

b)

For å sjekke at f er deriverbar , kan vi derivere funksjonen og kreve at den derivere er kontinuerlig for $x = k$

$$
f'(x) = \begin{cases} g'(x)\,, x < k \\ h'(x)\,, x \geq k \end{cases}
$$

$$
f'(x) = \begin{cases} -2x + 2 + k, x < k \\ 2x + 2 - k, x \geq k \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to k^-} f'(x) &= \lim_{x \to k^+} f'(x) \\
-2k + 2 + k &= 2k + 2 - k \\
-k + 2 &= k + 2 \\
-k &= k \\
k &= 0
\end{aligned}
$$

$f(x)$ er deriverbar overalt hvis $k = 0$

c)

For at en funksjon skal ha omvendt, må den være én-til-en, det vil si at hver verdi for x skal gi én verdi for y og motsatt. Utfra dette en funksjon har omvendt hvis den er enten bare voksende eller bare avtagende. Vi finner den deriverte og setter den lik null for å finne ekstremalpunkter.

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x), x < k \\ h'(x), x \geq k \end{cases}$$

$$f'(x) = 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 + k = 0 \Rightarrow x = \frac{k+2}{2}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 2 - k = 0 \Rightarrow x = \frac{k-2}{2}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2, x < k \\ 2, x \geq k \end{cases} \tag{1}$$

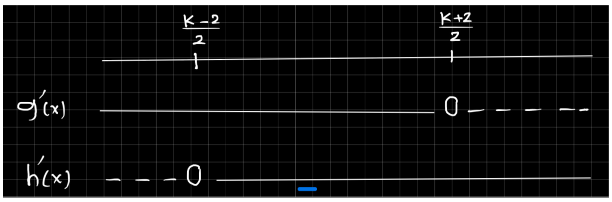
$$f''\left(\frac{k+2}{2}\right) = \begin{cases} -2, \dfrac{k+2}{2} < k \\ 2, \dfrac{k+2}{2} \geq k \end{cases} \tag{2}$$

$$= \begin{cases} -2, k > 2 \\ 2,\ k \leq 2 \end{cases} \tag{3}$$

$$f''\left(\frac{k-2}{2}\right) = \begin{cases} -2, \quad \dfrac{k-2}{2} < k \\ 2, \quad \dfrac{k-2}{2} \geq k \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2, k > -2 \\ 2, k \leq -2 \end{cases}$$

Utfra andrederiverttest har funksjonen et toppunkt i $x = (k/2 + 1)$ via $g(x)$, men da må $k > 2$ og et bunnpunkt i $x = k/2 - 1$ via $h(x)$ og $k \leq -2$. Vi kan lage følgende fortegnsskjema,



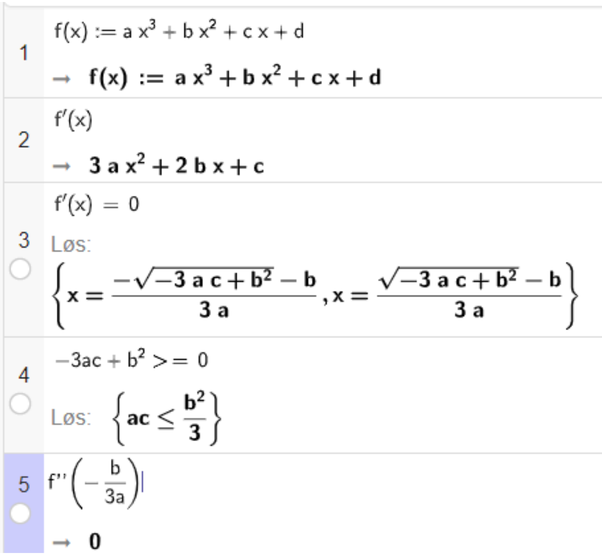
Vi ser at f er strengt voksende i $[\frac{k-2}{2}, \frac{k+2}{2}]$ og k må være i intervallet $[-2, 2]$ for at f skal ha omvendt funksjon fordi ellers har funksjonen et toppunkt og\eller et bunnpunkt.

MERK: En alternativ tilnærming er å utføre en grafisk analyse ved å skrive funksjonen i algebrafeltet. Dette gir deg muligheten til å legge til en glider for parameteren k, slik at du kan undersøke om en horisontal linje $y = a$ skjærer grafen i ett punkt. I tillegg kan du vurdere om grafen enten bare stiger eller bare avtar, indikert ved fravær av ekstremalpunkter. Dette gir en visuell bekreftelse på om funksjonen er én-til-én og har en invers.

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

Påstanden er ikke sann. Den generelle formen på en tredjegradsfunksjon er gitt i rad 1. Vi ser at den kan ha maks 2 ekstremalpunkter fordi den deriverte er andre gradspolynom og den kan ha enten et nullpunkt, 2 nullpunkter eller ingen i R avhengig av utrykket under kvadratrot tegnet. Hvis utrykket under rottegnet er negativt er det ingen ekstremalpunkter, hvis det er null har funksjon et terrasepunkt (se rad 5) og hvis det er positivt har funksjonen et toppunkt og et bunnpunkt (rad 3).



Figur 7

b)

Påstanden er sann siden f(x) er et polynom, da er den kontinuerlig og har R som definisjonsmengde og verdimengde og derfor en rettlinje skal skjære den i minst et punkt siden en rettlinje er også uendelig lang.

Et mer abstrakt metode kunne vært å løse ligningen $f(x) = y$ eller alternativt finne nullpunktet til $g(x) = f(x) - y$ Vi definerer en funksjon $g(x)$

$$f\left(x\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y = mx + n$$

$$g\left(x\right) = f\left(x\right) - y = ax^3 + bx^2 + \left(c - m\right)x + \left(d - n\right) = x^3\left(a + \frac{b}{x} + \frac{c - m}{x^2} + \frac{d - n}{x^3}\right)$$

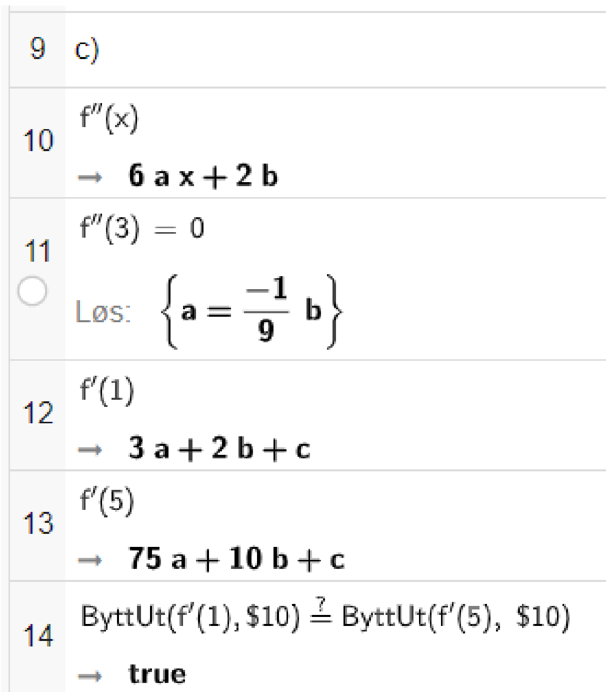
$$\lim_{x \to \infty} g\left(x\right) = \begin{cases} \infty, a > 0 \\ -\infty, a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} g\left(x\right) = \begin{cases} -\infty, a > 0 \\ +\infty, a < 0 \end{cases}$$

Tredjegradspolynom $g(x)$ skal ha minst et nullpunkt fordi den går til uendelig (-uendelig) når x går mot uendelig (-uendelig) og da må grafen krysse x-aksen i minst et punkt.

c)

Påstanden er sann. Vi finner den dobbeltderiverte og setter den lik null i x=3 og da finner vi en sammenheng mellom a og b (rad 11). Vi bytter ut for a og sjekker likheten via geogebra og ser at påstanden er riktig.



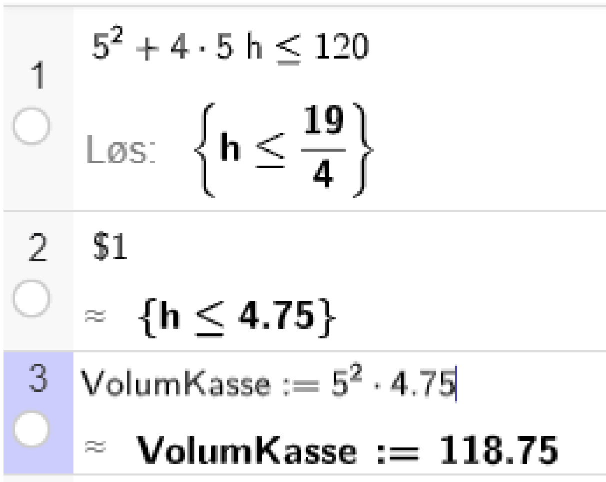
Figur 8

Oppgave 4 (6 poeng)

a)

Vi løser oppgaven i CAS:

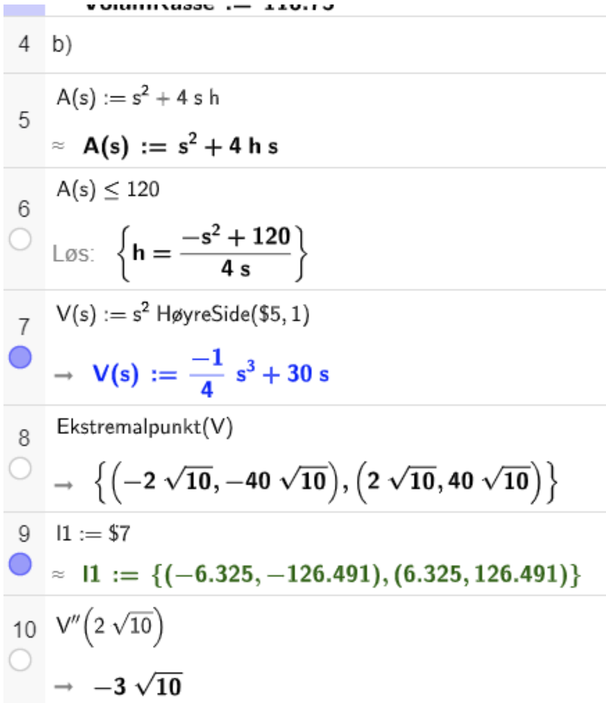
La h stå for høyden av kassen og s for sidelengde på kvadratet i grunnflaten. Samlede areal er arealet av grunnflaten + arealene av de 4 like sideflatene og dette skal være mindre enn eller lik 120 (se rad 1 og 2). Størst volum er regnet i rad 3 og det er på $118,75\,dm^3$



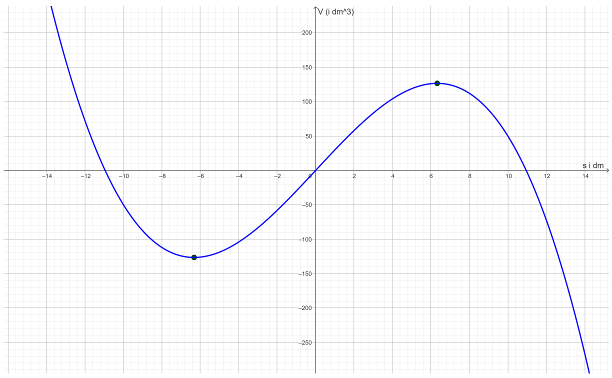
Figur 9

b)

Vi definerer en samlede areal funksjon (rad 5), så bruker vi betingelsen at samlede areal er mindre enn eller lik $120dm^2$ til å regne høyden som funksjon av sidelengden av grunnflaten. Deretter lager vi en funksjon vor volum av kassen med s som variabel. Vi finner ekstremalpunkter for funksjonen og får to løsninger, men vi godtar kun den positive løsningen. Vi kan bekrefte at punktet $s = 6,325$ er et toppunkt enten grafisk (se utklippet under) eller via andrederiverttest (rad 10). Det maksimale volumet kassen kan få er på $126,491\,dm^3$



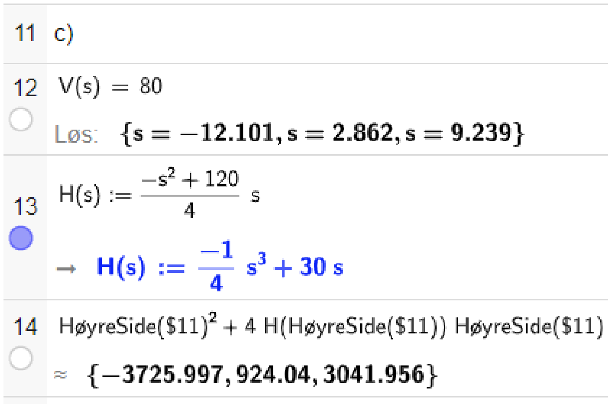
Figur 10



Figur 11

c)

Vi bruker CAS til finne sidelengden s (se rad 12) og får 3 løsninger og dropper den negative løsningen. Vi definere en høyde funksjon (rad 13) og bruker den til å regne samlede areal (rad 14). Det minste samlede arealet er $924,04\,dm^2$

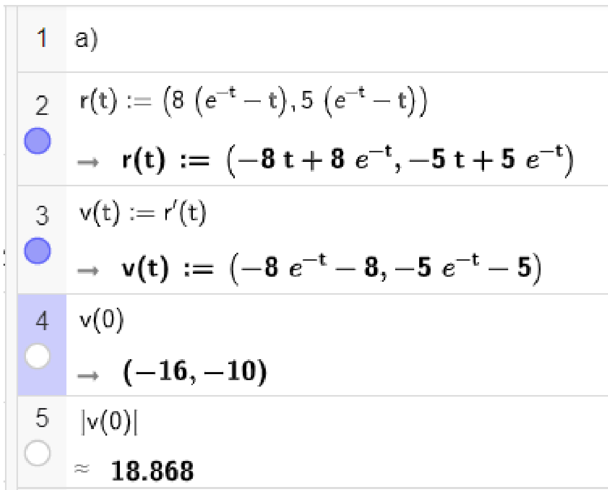


Figur 12

Oppgave 5 (6 poeng)

a)

Vi bruker Cas ved å først definere funksjonen $\vec{r}(t)$ så definere fartsvektor (rad 2)



Figur 13

Pucken hadde fart på $18,868$ m\s da den ble sendt av gårde.

b)

For å finne tiden det tar før pucken treffer vantet, må vi finne tiden pucken er ved en av de fire veggene . Veggene er ved $x = \pm\frac{60}{2} = \pm 30$ og $y = \pm\frac{15}{2} \pm 7,5$(fordi banen er 60 m lang og 30 m bred og origo er i midten av banen).

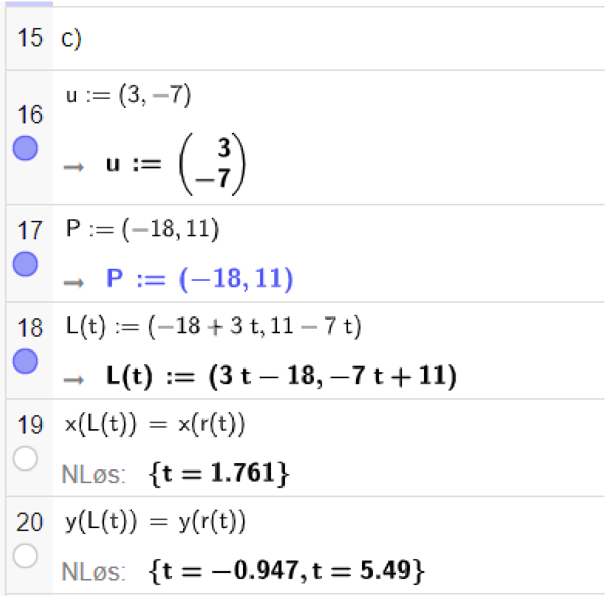
6	b)
7	$x(r(t)) = 30, t = 1$ NLøs: $\{t = -1.009\}$
8	$x(r(t)) = -30, t = 1$ NLøs: $\{t = 3.773\}$
9	$-15 \leq y(r(t)) \leq 15$ Løs: $\left\{\text{LambertW}\left(e^{3}\right) - 3 \leq t \leq \text{LambertW}\left(\frac{1}{e^{3}}\right) + 3\right\}$
10	\$9 $\approx \{-0.792 \leq t \leq 3.047\}$
11	$y(r(t)) = \frac{30}{2}, t = 1$ NLøs: $\{t = -0.792\}$
12	$y(r(t)) = -\frac{30}{2}, t = 1$ NLøs: $\{t = 3.047\}$
13	$-30 \leq x(r(t)) \leq 30$ Løs: $\left\{t \geq \frac{4\ \text{LambertW}\left(\sqrt[4]{e^{15}}\right) - 15}{4} \wedge \frac{4\ \text{LambertW}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e^{15}}}\right) + 15}{4} \geq t\right\}$
14	\$13 $\approx \{-1.009 \leq t \leq 3.773\}$

Figur 14

Vi dropper alternativene der tiden er negativt da får vi kun to mulige kombinasjoner. Det er ingen felles løsning mellom rad 8 og 10 , men felles løsning mellom rad 12 og rad 14 blir $t = 3,047$. Pucken treffer veggen der $y = -15$ (nederste vegg) etter 3 sekunder.

c)

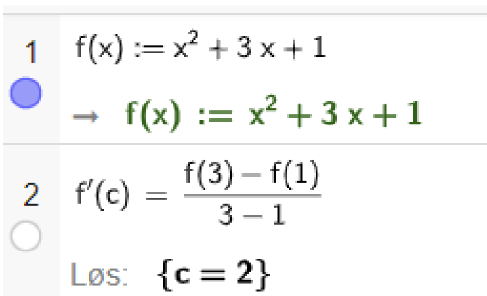
Vi lager en parameterframstilling for banen til andre hockey spilleren (rad 18) og prøver å finne ut om de er i krysningspunktet mellom banene til samme tid (rad 19 og 20). Vi ser at tiden er forskjellig og derfor vill ikke spilleren ble truffet av pucken.



Oppgave 6 (8 poeng)

a)

Vi bruker Cas til å finne c (rad 1,2):



Figur 15

Fra utklippet over ser vi at $c = 2$

b)

Vi kan bruke Python-programmet nedenfor:

```python
1  def f(x):                  # Definere funksjonen f(x) = x^2 + 3x + 1
2          return x**2 + 3*x + 1
3
4  def finn_c(a, b):
5      dfc = (f(b) - f(a)) / (b - a)  # Beregn f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)
6      c = (dfc - 3) / 2              # Løs for c ved å sette f'(c) = df(c)
7      return c
8  # Test med a = 1 og b = 3
9  svar = finn_c(1, 3)
10 print("c =", svar)
11
```

```
c = 2.0
```

Figur 16

I linje 6 har vi funnet c slik:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 + 3x + 1 \\
f'(x) &= 2x + 3 \\
f'(c) &= 2c + 3 \Rightarrow c = \frac{f'(c) - 3}{2}
\end{aligned}
$$

c)

Vi kjører koden nedenfor for flere verdier for a og b:

```python
def f(x):                  # Definere funksjonen f(x) = x^2 + 3x + 1
        return x**2 + 3*x + 1
def finn_c(a, b):
    dfc = (f(b) - f(a)) / (b - a)  # Beregn f'(c) = (f(b) - f(a)) / (b - a)
    c = (dfc - 3) / 2              # Løs for c ved å sette f'(c) = df(c)
    return c

# Test med noen verdier for a og b ved å bruke vektorer
a = np.array([1, 2, 3, 5])
b = np.array([7, 8, 9, 12])

print('a......b......c....(a+b)/2')
for i, j in zip(a, b):  # Loope over to verdier samtidig via zip funksjon
    print(f"{i}......{j}......{C(i, j)}....{(i+j)/2}")
```

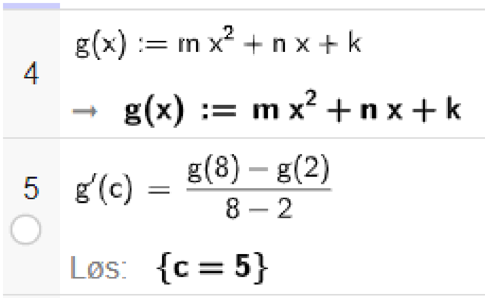
```
a......b......c....(a+b)/2
1......7......4.0....4.0
2......8......5.0....5.0
3......9......6.0....6.0
5......12......8.5....8.5
```

Figur 17

Fra utskriften til brogrammet over ser vi at $c = \frac{a+b}{2}$

d)

Anne's påstand er riktig. Vi definerer en generell andregradsfunksjon $g(x)$ (rad 4) i Cas og finner den deriverte av g i punktet $x = c$ og setter den lik utrykket som er oppgitt i oppgaven og ser at $c = 5$ når $a = 2$ og $b = 8$ (rad 5)



Figur 18