Utdannings-
direktoratet

Eksamen

20.11.2023

REA3058 Matematikk R2

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timar. Delen utan og delen med hjelpemiddel skal delast ut samstundes. Delen utan hjelpemiddel skal leverast etter 2 timar. Etter 2 timar kan du bruke hjelpemiddel. Delen med hjelpemiddel skal leverast innan 5 timar.
Del utan hjelpemiddel	Vanlege skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar.
Del med hjelpemiddel	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen utan hjelpemiddel har 6 oppgåver. Delen med hjelpemiddel har 5 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Dersom oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, kan ein alternativ metode gi noko utteljing. Bruk av digitale verktøy skal dokumenterast.
Rettleiing om vurderinga	Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke hensiktsmessige hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Om vekting av oppgåvene	Alle deloppgåvene blir vekta likt, bortsett frå oppgåve 2 i del 1 og oppgåve 3 i del 2. Desse oppgåvene blir vekta som to deloppgåver.
Andre opplysningar	Tønne: https://tonnegarden.no/tonner/ Alle andre teikningar og grafiske framstillingar: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgåve 1

Rekn ut integralet

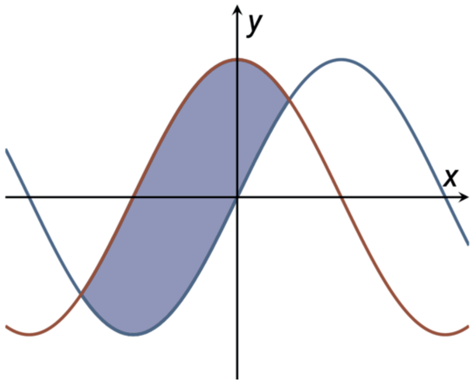
$$\int_{-1}^{1}(x^3+2x)\mathrm{d}x\,.$$

Kva fortel svaret deg?

Oppgåve 2

Figuren til høgre viser grafane til funksjonane f og g, der $f(x)=\cos x$ og $g(x)=\sin x$.

Bestem arealet av det fargelagde området vist på figuren.



Oppgåve 3

Ei uendeleg geometrisk rekkje $a_1+a_2+a_3+\cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av dei fire første ledda, når du får vite at $a_1=4$.

I ei aritmetisk rekkje er $a_1+a_4+a_7=114$.

b) Bestem a_4.

Oppgåve 4

Eit plan α er gitt ved likninga

$$x-2y+2z+1=0.$$

Vi har gitt punktet $A(4,2,2)$.

a) Bestem ei parameterframstilling for linja gjennom A som står normalt på planet α.

b) Bestem avstanden frå A til α.

Oppgåve 5

Ein elev har skrive koden nedanfor.

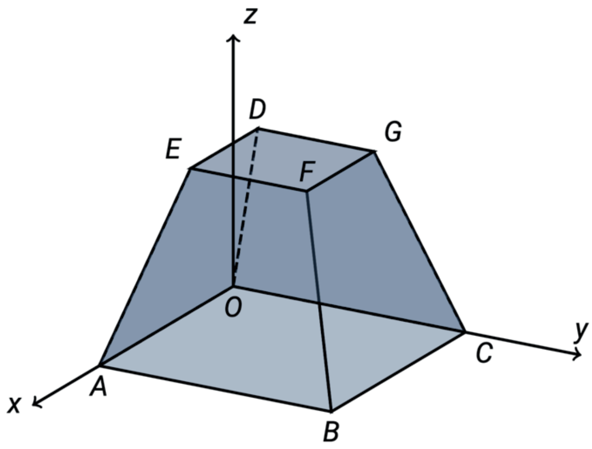
```
N = 1000
start = -2
slutt = 2
dx = (slutt - start)/N

def f(x):
    return x**2-1

S = 0
for i in range(N):
    xi = start + i*dx
    S = S + abs(f(xi))*dx  # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)

print(S)
```

a) Forklar kva eleven ønskjer å rekne ut med denne koden.

b) Finn ved rekning den verdien eleven ønskjer å bestemme.

Oppgåve 6

Figuren til høgre viser ein rett avkorta pyramide med hjørne i punkta $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(1,1,3)$, $E(3,1,3)$, $F(3,3,3)$ og $G(1,3,3)$.



Bruk vektorrekning til å bestemme arealet av sideflata *BCGF*.

Del 2

Oppgåve 1

Tabellen nedanfor viser vasstanden (tidvasshøgda) ved Stord verft i Sunnhordland, for nokre tidspunkt 24. april 2023.

Tidvatn er dei periodiske endringane i havnivået som oppstår som eit resultat av gravitasjonskreftene som månen og sola verkar på jorda med.

Tal på timar etter midnatt	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Vasstand (cm)	99,6	119	94,3	60,5	53,4	76,0	96,7	115	99,9	68,1

Ei oljeplattform skal slepast ut frå verftet dagen etter. Dette må gjerast når vasstanden er meir enn 90 cm.

a) Lag ein modell *f* som du kan bruke til å bestemme vasstanden ved verftet i den aktuelle perioden.

b) Når vil vasstanden auke raskast den 25. april, ifølgje modellen?

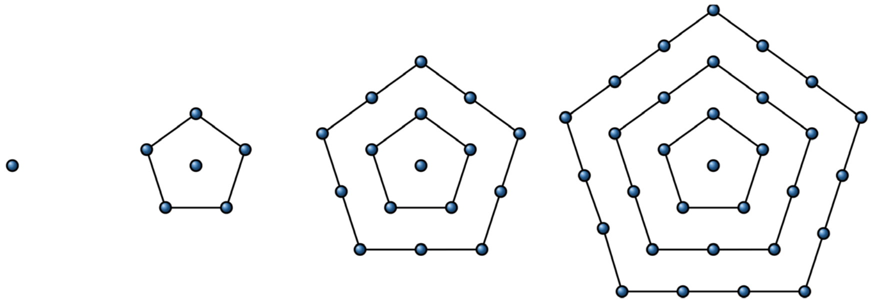
Det vil ta 2 timar å slepe ut oljeplattforma.

c) Ved kva for eit klokkeslett kan dei seinast starte med å slepe ut plattforma?

Oppgåve 2

Kvar figur nedanfor består av kuler plasserte på pentagonar. Talet på kuler på kvar av ytterkantane aukar med éin samanlikna med talet på kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n vere talet på kuler i figur *n*.

Dei fem første figurtala er 1, 6, 16, 31 og 51.



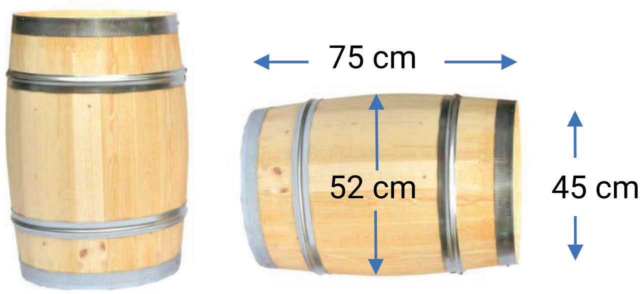
Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv ein rekursiv samanheng mellom P_n og P_{n-1}.

b) Lag eit program som reknar ut P_{100} ved å bruke den rekursive samanhengen du fann i oppgåve a).

c) Bestem ein eksplisitt formel for P_n, og vis at formelen stemmer ved å gjennomføre eit induksjonsbevis.

Oppgåve 3



Ei tønne er 75 cm høg. Diameteren i botnen og toppen er 45 cm.
Den største diameteren er 52 cm.

Sida i tønna frå toppen til botnen er forma som ein parabel.

Bruk blant anna integrasjon til å bestemme volumet av tønna.

Oppgåve 4

I eit vegkryss varierer ein type luftureining periodisk kvart døgn. Luftureininga aukar ut over formiddagen og minkar igjen mot kvelden. Mengda luftureining M kan beskrivast med funksjonen

$$M(t) = A \cdot \sin(ct + k) + d$$

der t er talet på timar etter midnatt.

Den største mengda luftureining i løpet av døgnet er 31,2 $\mu g/m^3$, og den minste mengda er 18,2 $\mu g/m^3$.

a) Bestem A, c og d.

Ved to tidspunkt i løpet av døgnet er mengda luftureining 27 $\mu g/m^3$.
Den første gongen er klokka 13:00.

b) Når er det andre tidspunktet?

Oppgåve 5

Ei kurve *C* er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r}_1$ gitt ved

$$\vec{r}_1(t) = [\sin t, t, \cos t], \quad 0 < t < 2\pi .$$

a) Bestem koordinatane til eventuelle punkt på *C* der tangenten er parallell med *xy*-planet.

b) Vis at $\vec{r}_1{}'(t) \perp \vec{r}_1{}''(t)$ for alle *t*.

> **Definisjon**
>
> La $\vec{r}$ vere posisjonsvektoren til ei romkurve, der $\vec{r}\,'(t)$ og $\vec{r}\,''(t)$ ikkje er parallelle for nokre verdiar av *t*. Då kan vi til kvart punkt på kurva lage eit plan som tangerer kurva i punktet, og som inneheld $\vec{r}\,'(t)$ og $\vec{r}\,''(t)$. Dette planet kallar vi for kurva sitt *smygplan* i punktet.

c) Vis at vinkelen mellom smygplanet og *y*-aksen alltid er den same for kurva *C*. Bestem denne vinkelen.

Ei anna kurve er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r}_2$ gitt ved

$$\vec{r}_2(t) = [\sin t, t, 2\sin t + 1] .$$

d) Undersøk smygplanet til denne kurva for ulike verdiar av *t*. Gi ei tolking av det du har funne i undersøkingane dine.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Delen uten og delen med hjelpemidler skal deles ut samtidig. Delen uten hjelpemidler skal leveres etter 2 timer. Etter 2 timer kan du bruke hjelpemidler. Delen med hjelpemidler skal leveres innen 5 timer.
Del uten hjelpemidler	Vanlige skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler.
Del med hjelpemidler	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte	Delen uten hjelpemidler har 6 oppgaver. Delen med hjelpemidler har 5 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi noe uttelling. Bruk av digitale verktøy skal dokumenteres.
Veiledning om vurderingen	Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Om vekting av oppgavene	Alle deloppgavene vektes likt, bortsett fra oppgave 2 i del 1 og oppgave 3 i del 2. Disse oppgavene vektes som to deloppgaver.
Andre opplysninger	Tønne: https://tonnegarden.no/tonner/ Alle andre tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Del 1

Oppgave 1

Regn ut integralet

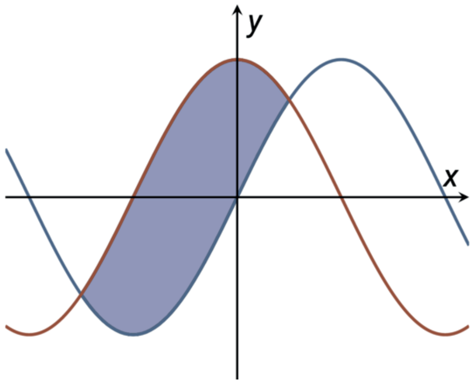
$$\int_{-1}^{1}(x^3+2x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hva forteller svaret deg?

Oppgave 2

Figuren til høyre viser grafene til funksjonene f og g, der $f(x)=\cos x$ og $g(x)=\sin x$.

Bestem arealet av det fargelagte området vist på figuren.



Oppgave 3

En uendelig geometrisk rekke $a_1+a_2+a_3+\cdots$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene, når du får vite at $a_1=4$.

I en aritmetisk rekke er $a_1+a_4+a_7=114$.

b) Bestem a_4.

Oppgave 4

Et plan α er gitt ved likningen

$$x-2y+2z+1=0 .$$

Vi har gitt punktet $A(4, 2, 2)$.

a) Bestem en parameterframstilling for linjen gjennom A som står normalt på planet α .

b) Bestem avstanden fra A til α .

Oppgave 5

En elev har skrevet koden nedenfor.

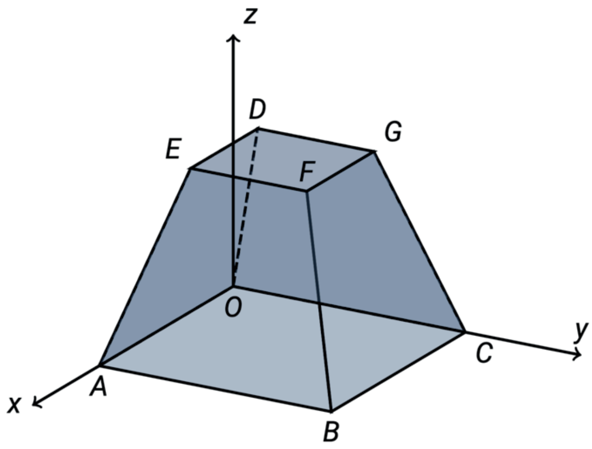
```python
N = 1000
start = -2
slutt = 2
dx = (slutt - start)/N

def f(x):
    return x**2-1

S = 0
for i in range(N):
    xi = start + i*dx
    S = S + abs(f(xi))*dx  # abs(f(x)) gir absoluttverdien til f(x)

print(S)
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut med denne koden.

b) Finn ved regning den verdien eleven ønsker å bestemme.

Oppgave 6

Figuren til høyre viser en rett avkortet pyramide med hjørner i punktene $O(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $B(4,4,0)$, $C(0,4,0)$, $D(1,1,3)$, $E(3,1,3)$, $F(3,3,3)$ og $G(1,3,3)$.



Bruk vektorregning til å bestemme arealet av sideflaten *BCGF*.

Del 2

Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser vannstanden (tidevannshøyden) ved Stord verft i Sunnhordland, for noen tidspunkter 24. april 2023.

Tidevann er de periodiske endringene i havnivået som oppstår som et resultat av gravitasjonskreftene som månen og solen virker på jorden med.

Antall timer etter midnatt	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Vannstand (cm)	99,6	119	94,3	60,5	53,4	76,0	96,7	115	99,9	68,1

En oljeplattform skal slepes ut fra verftet dagen etter. Dette må gjøres når vannstanden er mer enn 90 cm.

a) Lag en modell *f* som du kan bruke til å bestemme vannstanden ved verftet i den aktuelle perioden.

b) Når vil vannstanden øke raskest den 25. april, ifølge modellen?

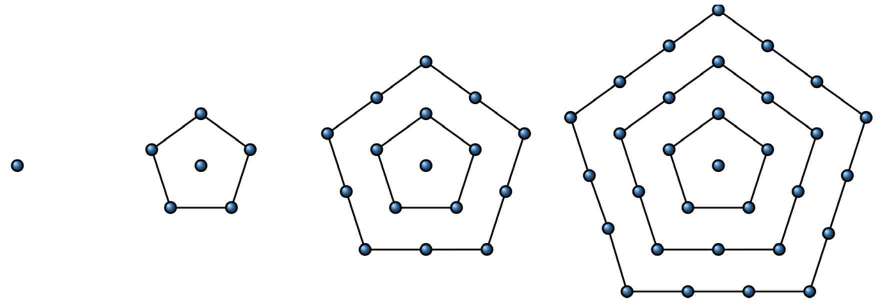
Det vil ta 2 timer å slepe ut oljeplattformen.

c) Ved hvilket klokkeslett kan de senest starte med å slepe ut plattformen?

Oppgave 2

Hver figur nedenfor består av kuler plassert på pentagoner. Antall kuler på hver av ytterkantene øker med én sammenlignet med antall kuler på ytterkanten i figuren før. La P_n være antall kuler i figur n.

De fem første figurtallene er 1, 6, 16, 31 og 51.



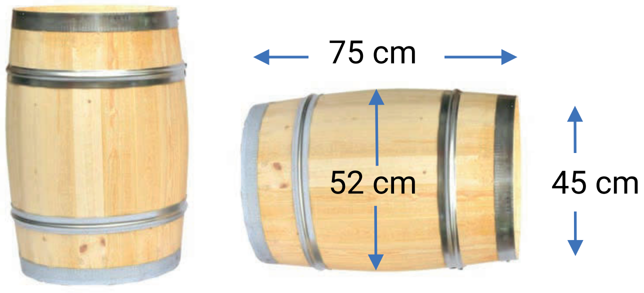
Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

a) Beskriv en rekursiv sammenheng mellom P_n og P_{n-1}.

b) Lag et program som regner ut P_{100} ved å bruke den rekursive sammenhengen du fant i oppgave a).

c) Bestem en eksplisitt formel for P_n, og vis at formelen stemmer ved å gjennomføre et induksjonsbevis.

Oppgave 3



En tønne er 75 cm høy. Diameteren i bunnen og toppen er 45 cm.
Den største diameteren er 52 cm.

Siden i tønnen fra toppen til bunnen er formet som en parabel.

Bruk blant annet integrasjon til å bestemme volumet av tønnen.

Oppgave 4

I et veikryss varierer en type luftforurensning periodisk hvert døgn. Luftforurensningen øker ut over formiddagen og minker igjen mot kvelden. Mengden luftforurensning M kan beskrives med funksjonen

$$M(t) = A \cdot \sin(ct + k) + d$$

der t er antall timer etter midnatt.

Den største mengden luftforurensning i løpet av døgnet er 31,2 µg/m^3, og den minste mengden er 18,2 µg/m^3.

a) Bestem A, c og d.

Ved to tidspunkter i løpet av døgnet er mengden luftforurensning 27 µg/m^3. Den første gangen er klokken 13:00.

b) Når er det andre tidspunktet?

Oppgave 5

En kurve C er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r}_1$ gitt ved

$$\vec{r}_1(t) = [\sin t, t, \cos t], \quad 0 < t < 2\pi .$$

a) Bestem koordinatene til eventuelle punkter på C der tangenten er parallell med *xy*-planet.

b) Vis at $\vec{r}_1{}'(t) \perp \vec{r}_1{}''(t)$ for alle t.

Definisjon

La $\vec{r}$ være posisjonsvektoren til en romkurve, der $\vec{r}\,'(t)$ og $\vec{r}\,''(t)$ ikke er parallelle for noen verdier av t. Da kan vi til hvert punkt på kurven lage et plan som tangerer kurven i punktet, og som inneholder $\vec{r}\,'(t)$ og $\vec{r}\,''(t)$. Dette planet kaller vi for kurvens *smygplan* i punktet.

c) Vis at vinkelen mellom smygplanet og *y*-aksen alltid er den samme for kurven C. Bestem denne vinkelen.

En annen kurve er grafen til vektorfunksjonen $\vec{r}_2$ gitt ved

$$\vec{r}_2(t) = [\sin t, t, 2\sin t + 1] .$$

d) Undersøk smygplanet til denne kurven for ulike verdier av t. Gi en tolkning av det du har funnet i undersøkelsene dine.

(Blank side)

(Blank side)

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!