Løsningsforslag eksamen S2 (LK06) våren 2023

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=3e^x+2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=3e^x+2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\underline{\underline{3e^x+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$

b)

$$g(x)=(1-x)\cdot\ln x$$

gir

$$g'(x)=-1\cdot\ln x+(1-x)\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{\frac{1-x}{x}-\ln x}}$$

c)

$$h(x)=\frac{e^{2x}}{x-3}$$

gir

$$h'(x)=\frac{2e^{2x}(x-3)-e^{2x}\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{e^{2x}\left((2x-6)-1\right)}{(x-3)^2}=\underline{\underline{\frac{e^{2x}(2x-7)}{(x-3)^2}}}$$

Oppgave 2

$P(x)=2x^3-x^2-7x+6$

a)

$$P(1)=2\cdot1^3-1^2-7\cdot1+6=2-1-7+6=0$$

$$P(-1)=2(-1)^3-(-1)^2-7(-1)+6=-2-1+7+6=10\neq 0$$

$$P(-2)=2(-2)^3-(-2)^2-7(-2)+6=-16-4+14+6=0$$

$\underline{\underline{x-1 \text{ og } x+2 \text{ er faktorer i } P(x)}}$

b) $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$.

Gjennomfører polynomdivisjonen $P(x):(x^2+x-2)$:

$$2x^3 - x^2 - 7x + 6 : \left(x^2 + x - 2\right) = 2x - 3$$
$$\underline{2x^3 + 2x^2 - 4x}$$
$$-3x^2 - 3x + 6$$
$$\underline{-3x^2 - 3x + 6}$$
$$0$$

Da kan jeg bestemme det siste nullpunktet til *P*:

$$2x - 3 = 0$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{P \text{ har nullpunkter } x = -2,\ x = 1 \text{ og } x = \frac{3}{2}}}$$

c) De verdiene av *a* som gjør at divisjonen $Q(x) : \left(x - a\right)$ får rest 6, er løsningene av likningen $Q(a) = 6$.

$$2a^4 - 8a^2 + 6 = 6$$
$$2a^4 - 8a^2 = 0$$
$$2a^2\left(a^2 - 4\right) = 0$$
$$2a^2\left(a + 2\right)\left(a - 2\right) = 0$$
$$gir$$
$$\underline{\underline{a = -2 \vee a = 0 \vee a = 2}}$$

Oppgave 3

a) Starter med å bestemme *k*:

$$k + 0{,}3 + k - 0{,}2 + 0{,}1 = 1$$
$$2k + 0{,}2 = 1$$
$$2k = 0{,}8$$
$$k = 0{,}4$$

Nå kan jeg regne ut $P\left(X > 1\right)$:

$$P\left(X > 1\right) = P\left(X = 2\right) + P\left(X = 3\right) = 0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3.$$

$P\left(X > 1\right) = 0{,}3$, <u>som skulle vises</u>.

b)

$$E\left(X\right)=0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=0+0{,}3+0{,}4+0{,}3=1$$

$$\begin{aligned}Var\left(X\right)&=\left(0-1\right)^2\cdot 0{,}4+\left(1-1\right)^2\cdot 0{,}3+\left(2-1\right)^2\cdot 0{,}2+\left(3-1\right)^2\cdot 0{,}1\\&=1\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1\\&=0{,}4+0{,}2+0{,}4\\&=1\end{aligned}$$

$\underline{\underline{E\left(X\right)=1 \text{ og } Var\left(X\right)=1}}$

Oppgave 4

a) Lar $K(x)$ være kostnaden i kroner ved produksjon av *x* enheter og lar $I(x)$ være inntekten i kroner ved salg av *x* enheter.
Grensekostnaden ved produksjon av 40 enheter er stigningstallet til tangenten i punktet $\left(40, K(40)\right)$.

Ved å lage en tangent som er så nøyaktig som mulig, kan jeg bestemme en tilnærmet verdi for denne grensekostnaden.
Det ser ut til at ei rett linje gjennom origo og punktet $\left(80, 6000\right)$ vil tangere grafen til *K* i $\left(40, K(40)\right)$.

Denne linja har stigningstall $\dfrac{6000}{80}=\dfrac{600}{8}=\dfrac{300}{4}=75$.

Eventuelt kan vi bruke at tangeringspunktet blir $\left(40, 3000\right)$*, og regne ut stigningstallet slik:* $\dfrac{3000}{40}=75$.

<u>Grensekostnaden er omtrent 75 kroner per enhet når det produseres 40 enheter.</u>

b) Jeg vet at overskuddet er størst når grensekostnaden er lik grenseinntekten.
I og med at inntektsfunksjonen er en lineær funksjon, vet jeg at grenseinntekten er konstant. Bestemmer tangeringspunktet mellom ei rett linje som er parallell med grafen til *I* og tangerer grafen til *K*.
x-koordinaten til dette tangeringspunktet forteller hvilken produksjonsmengde som gjør at grensekostnad er lik grenseinntekt, og dermed gir størst overskudd.
Ved å parallellforskyve grafen til *I* så nøyaktig som mulig, ser jeg at *x*-koordinaten til tangeringspunktet ligger omtrent midt mellom 55 og 60.

<u>Det må produseres ca. 57-58 enheter for at overskuddet skal bli størst mulig.</u>

Jeg vil hevde at det er enklere å bestemme dette presist ved å se nærmere på overskuddsfunksjonen. Grafen til overskuddsfunksjonen vil være en parabel som *vender hul side ned ("sur munn"), og toppunktet vil ligge midt mellom nullpunktene. Nullpunktene tilsvarer dekningspunktene, altså skjæringspunktene mellom grafene til K og I. Det ser ut til at kostnad og inntekt er lik ved produksjon av ca.15 enheter og 100 enheter. Midt mellom 15 og 100, har vi 57,5.*

Oppgave 5

a) Bestemmer antall ledd i rekka:

$$a_1 + (n-1)\cdot d = a_n$$

$$gir$$

$$\begin{aligned} 2+(n-1)\cdot 4 &= 398 \\ 4n-4 &= 398-2 \\ 4n &= 396+4 \\ n &= \frac{400}{4} \\ n &= 100 \end{aligned}$$

Da kan jeg bestemme summen:

$$S_{100} = \frac{2+398}{2}\cdot 100 = \frac{400}{2}\cdot 100 = 200\cdot 100 = \underline{\underline{20000}}$$

b)

$$a_6 = S_6 - S_5$$

$$a_6 = 6^2 - 6 + 1 - (5^2 - 5 + 1)$$

$$a_6 = 36 - 6 + 1 - 25 + 5 - 1$$

$$\underline{\underline{a_6 = 10}}$$

c)

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$a_n = n^2 - n + 1 - \left((n-1)^2 - (n-1) + 1\right)$$

$$a_n = n^2 - n + 1 - \left(n^2 - 2n + 1 - n + 1 + 1\right)$$

$$a_n = n^2 - n + 1 - \left(n^2 - 3n + 3\right)$$

$$a_n = n^2 - n + 1 - n^2 + 3n - 3$$

$$\underline{\underline{a_n = 2n - 2}}$$

Oppgave 6

a) $k = \dfrac{\ln 3}{1} = \ln 3$.

Vi vet at $3 > e$, så da har vi $\ln 3 > 1$.
Vi har altså *ikke* $-1 < k < 1$, så <u>rekken konvergerer *ikke*</u>. (Den divergerer).

b) $k = \dfrac{\lg\sqrt{10}}{1} = \lg\sqrt{10} = \lg 10^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Vi har altså $-1 < k < 1$, så <u>rekken konvergerer</u>.
Bestemmer summen:

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

<u>Rekken konvergerer, og summen er 2.</u>

Oppgave 7

$K(10) = 150$ gir følgende likning:

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 150 \Leftrightarrow 100a + 10b + c = 150$$

Bestemmer et uttrykk for grensekostnaden:
$K'(x) = 2ax + b$

$K'(5) = 5$ gir følgende likning:
$10a + b = 5$

$K'(10) = 6$ gir følgende likning:
$20a + b = 6$

Vi har altså følgende likningssystem:

$$\begin{aligned} I.\ & 100a + 10b + c = 150 \\ II.\ & 10a + b = 5 \\ III.\ & 20a + b = 6 \end{aligned}$$

Trekker likning *II* fra likning *III* og får
$10a = 1$

$$a = \frac{1}{10}$$

Setter dette inn i likning *II* og får
$1 + b = 5$

$$b = 4$$

Setter så $a = \dfrac{1}{10}$ og $b = 4$ inn i likning *I*:

$$100 \cdot \frac{1}{10} + 10 \cdot 4 + c = 150$$
$$10 + 40 + c = 150$$
$$c = 150 - 50$$
$$c = 100$$

$\underline{\underline{a = \frac{1}{10} \wedge b = 4 \wedge c = 100}}$ evt. $\underline{\underline{a = 0{,}1 \wedge b = 4 \wedge c = 100}}$

Oppgave 8

a)

$$\begin{aligned} P(X > 600) &= 1 - P(X \leq 600) \\ &= 1 - P\left(z \leq \frac{600-500}{50}\right) \\ &= 1 - P(z \leq 2) \\ &= 1 - 0{,}9772 \\ &= 0{,}0228 \end{aligned}$$

<u>Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt batteri vil ha en levetid på mer enn 600 timer er omtrent 2,3 %.</u>

b)

$$\begin{aligned} P(X > t) &= 0{,}758 \\ 1 - P(X \leq t) &= 0{,}758 \\ 1 - P\left(z \leq \frac{t-500}{50}\right) &= 0{,}758 \\ P\left(z \leq \frac{t-500}{50}\right) &= 0{,}242 \end{aligned}$$

Tabellen med standard normalfordeling gir da at $\frac{t-500}{50} = -0{,}7$.

$$\begin{aligned} \frac{t-500}{50} &= -0{,}7 \\ t - 500 &= -0{,}7 \cdot 50 \\ t &= -35 + 500 \\ \underline{\underline{t}} &\underline{\underline{= 465}} \end{aligned}$$

c) Forventet levetid for disse batteriene er 500 timer, så da må vi ha en grafisk fremstilling som har toppunkt for $x = 500$.
Vi kan altså umiddelbart utelukke *B* og *C*, og heller se nærmere på *A* og *D*.
Tabellen med standard normalfordeling forteller oss at
$P\left(-3 \leq z \leq 3\right) = 0{,}9990 - 0{,}0013 = 9997 = 99{,}97\%$.
Det betyr at 99,97 % av arealet under kurven i den grafiske fremstillingen som illustrerer *X* skal ligge mellom $x = 350$ og $x = 650$.
Fremstilling *D* har for mye "areal til overs" i begge ender til at dette kan stemme.
Samtidig kan man se at man så å si hele arealet under kurven i fremstilling *A* ligger i dette intervallet.

<u>Det er fremstilling *A* som illustrerer *X*.</u>

Del 2

Oppgave 1

a) Jeg forutsetter at første innbetaling var én måned etter at Anders tok opp lånet.
Summen av nåverdiene til alle terminbeløpene, på det tidspunktet Anders tok opp lånet, utgjør da en geometrisk rekke med 36 ledd, der

$$a_1 = \frac{x}{1{,}0049} \text{ og } k = \frac{1}{1{,}0049}.$$

Summen av rekka er 150 000.

CAS

1 (x/1.0049)*((1/1.0049)^36–1)/((1/1.0049)–1)=150000

$$\frac{x}{1.0049} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.0049}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{1.0049} - 1} = 150000$$

2 $x \,/\, 1.0049 \left((1 \,/\, 1.0049)^{36} - 1\right) / \left(1 \,/\, 1.0049 - 1\right) = 150000$

NLøs: $\{x = 4555.1392\}$

<u>Terminbeløpet var 4555,14 kroner.</u>

b) Bestemmer summen av nåverdiene til de 12 siste terminbeløpene, like etter at terminbeløp 24 ble betalt inn.
Summen av disse 12 nåverdiene utgjør en geometrisk rekke med 12 ledd, der

$$a_1 = \frac{4555{,}14}{1.0049} \text{ og } k = \frac{1}{1{,}0049}.$$

CAS

1 (4555.14/1.0049)*((1/1.0049)^12–1)/((1/1.0049)–1)

$$\frac{4555.14}{1.0049} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.0049}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{1.0049} - 1}$$

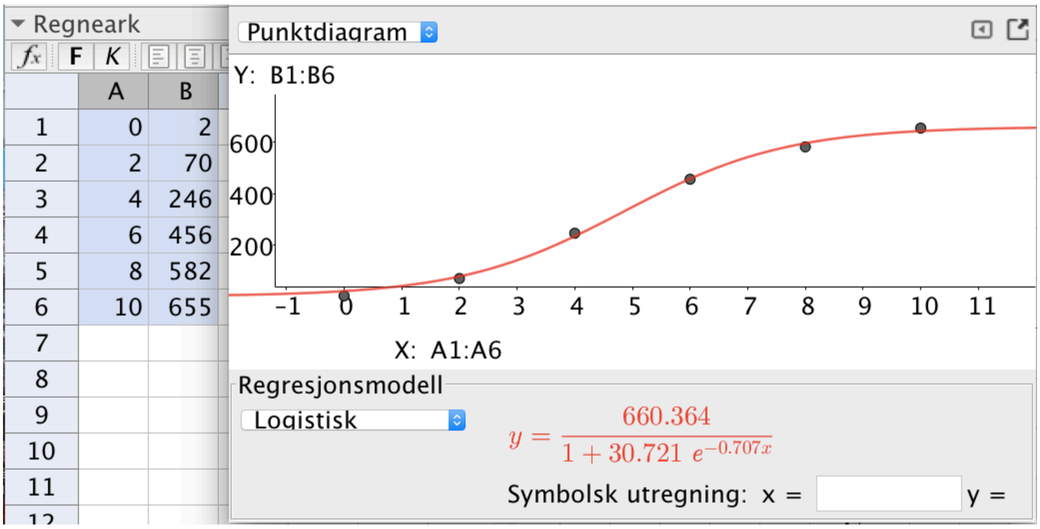
2 $4555.14 \,/\, 1.0049 \left((1 \,/\, 1.0049)^{12} - 1\right) / \left(1 \,/\, 1.0049 - 1\right)$

≈ 52959.7956

Da bilen til Anders ble totalskadd, var restlånet på rett under 53000 kroner, så utbetalingen fra forsikringsselskapet var tilstrekkelig for å betale dette ned.

Oppgave 2

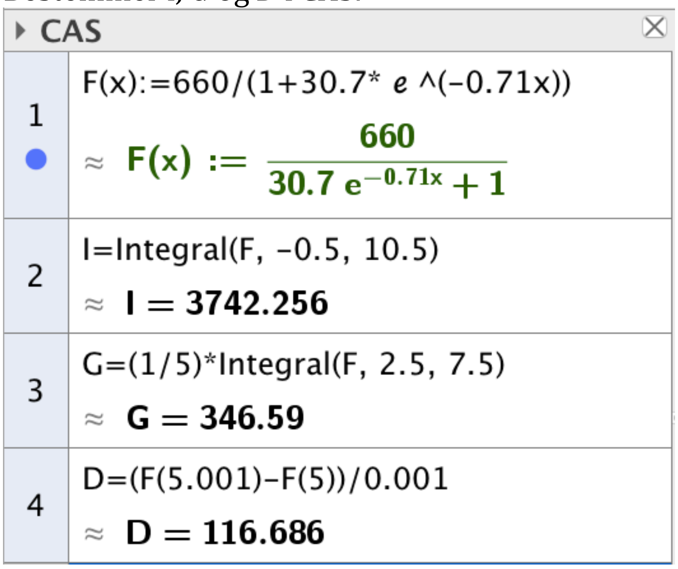
a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonsanalyse. En logistisk modell vil passe bra, siden økningen i antall kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge øker mye i starten av perioden, før veksten avtar og flater ut. Dette gir også mening da det er vanlig med rask vekst når noe er nytt og kommer ut på markedet, men veksten vil avta og flate ut etter hvert som markedet mettes – man når bæreevnen.



$$F(x) = \frac{660}{1 + 30{,}7 \cdot e^{-0{,}71x}}$$

b)

Bestemmer *I*, *G* og *D* i CAS:



GeoGebra slet litt med å få regnet ut S, så velger derfor å bestemme S ved hjelp av et lite program. Se bildet øverst på neste side.
(Det er mulig å løse i CAS, men kan hende man må justere grensen for "tidsavbrudd" om man møter på problemer).

```python
from math import exp    #Trenger Eulers tall.

#Definerer funksjonen F
def F(x):
    return 660/(1+30.7*exp(-0.71*x))

S = 0

#Lager en for-løkke som regner ut og summerer F(i) for i fra og med 0 til og med 10.
for i in range(0,11):
    S = S + F(i)
print(S)

```

```
3742.3462761898254
```

$$\underline{\underline{I = 3742{,}26 \quad , \quad G = 346{,}59 \quad , \quad S = 3742{,}35 \quad \text{og} \quad D = 116{,}69}}$$

c) *I* forteller at det ble brukt totalt ca. 3742 millioner kroner, altså i overkant av 3,7 milliarder kroner, på strømming av musikk i Norge i 11-årsperioden fra midten av 2007 til midten av 2018.

G forteller oss at det ble brukt i gjennomsnitt ca.347 millioner kroner per år på strømming av musikk i Norge i femårsperioden fra midten av 2010 til midten av 2015.

Tolkningene av hva *I* og *G* forteller oss forutsetter at vi antar at $x = 0$ svarer til 1.januar 2008, $x = 1$ svarer til 1.januar 2009 osv., slik at $F(x)$ tar for seg en kontinuerlig endring i antall kroner brukt på strømming av musikk.

Dersom vi tenker oss at $F(0)$ forteller hvor mye penger som ble brukt i 2008, $F(1)$ forteller hvor mye som ble brukt i 2009 osv., vil det totale antallet kroner som brukes på musikk fra og med 2008 til og med 2018 være gitt ved *S*.
S forteller oss da at det samlet sett ble brukt ca.3752 millioner kroner på strømming av musikk i 11-årsperioden fra og med 2008 til og med 2018.

D gir oss en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten når $x = 5$, som da forteller at antallet kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge økte med omtrent 117 millioner kroner per år i 2013.

Oppgave 3

a) Løser i CAS.
- I rad 1 definerer jeg kostnadsfunksjonen
- I rad 2 bestemmer jeg et uttrykk for enhetskostnaden.

Den produksjonsmengden som gjør at enhetskostnaden er lik grensekostnaden er den produksjonsmengden som gir de laveste kostnadene per enhet (kostnadsoptimal produksjonsmengde).
- Den kostnadsoptimale produksjonsmengden bestemmes i rad 3 og 4.

Se bildet øverst på neste side.

CAS

1. K(x):=0.74x²+102x+200000
   $\approx\ K(x) := 0.74\ x^2 + 102\ x + 200000$
2. G(x):=K(x)/x
   $\approx\ G(x) := \frac{0.74\ x^2 + 102\ x + 200000}{x}$
3. G(x)=K'(x)
   Løs: $\left\{x = -1000 \cdot \frac{\sqrt{370}}{37}, x = 1000 \cdot \frac{\sqrt{370}}{37}\right\}$
4. {x = -1000 sqrt(370) / 37, x = 1000sqrt(370) / 37}
   $\approx\ \{x = -519.875, x = 519.875\}$

<u>Den kostnadsoptimale produksjonsmengden er 520 enheter per måned.</u>

b) Løser i CAS.
Rad 1 – Definerer etterspørselsfunksjonen
Rad 2 – Finner et uttrykk for prisen, avhengig av produserte og solgte enheter
Rad 3 – Bestemmer et uttrykk for inntekt avhengig av pris
Rad 4 – Bruker resultatene i rad 2 og rad 3 til å bestemme et uttrykk for inntekt avhengig av antall solgte enheter

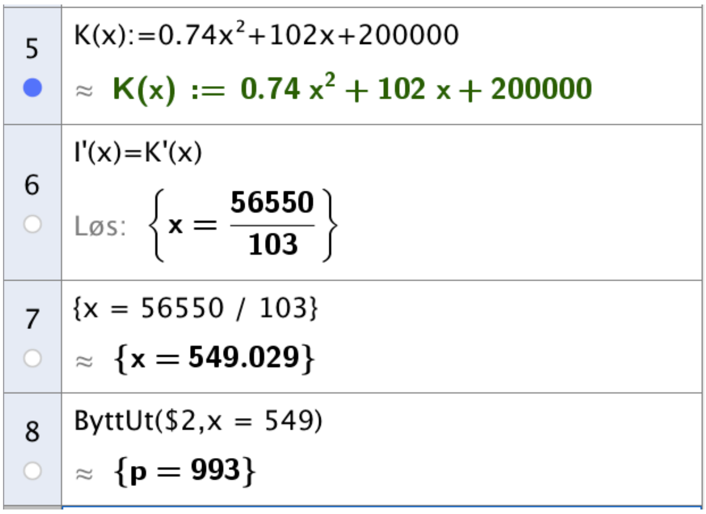
CAS

1. e(p):=7500-7p
   $\rightarrow\ e(p) := -7\ p + 7500$
2. Løs(e(p)=x, p)
   $\rightarrow\ \left\{p = -\frac{1}{7}\ x + \frac{7500}{7}\right\}$
3. i(p):=e(p)*p
   $\rightarrow\ i(p) := -7\ p^2 + 7500\ p$
4. I(x):=ByttUt(i(p),p = HøyreSide($2))
   $\rightarrow\ I(x) := -\frac{1}{7}\ x^2 + \frac{7500}{7}\ x$

Nå bruker jeg videre at overskuddet er størst når grenseinntekt er lik grensekostnad.

Rad 5 – Definerer kostnadsfunksjonen på nytt.
Rad 6 og 7 – Bestemmer vinningsoptimal produksjonsmengde
Rad 8 – Bruker resultatet i rad 2 og rad 7 til å bestemme hvilken pris som da gir det største månedlige overskuddet.

Se bildet øverst på neste side.



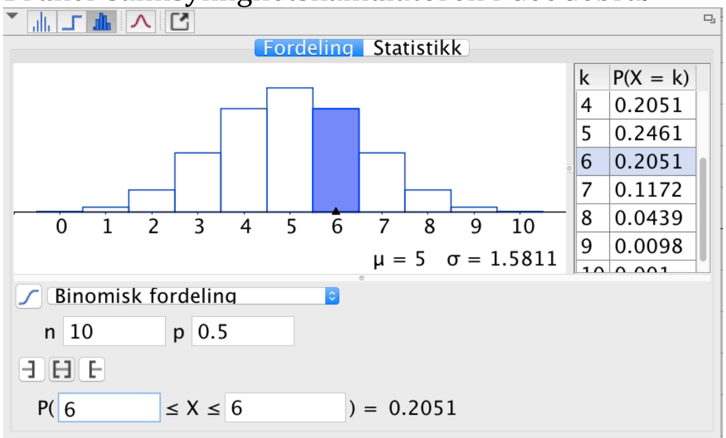
<u>Det månedlige overskuddet blir størst når prisen er 993 kroner per enhet.</u>

Oppgave 4

a) Jeg ser på dette som et binomisk forsøk, og må dermed gjøre følgende antagelser:

- Det er kun de to colatypene *Coca-Cola* og *Pepsi-Cola* som anvendes i forsøket.
- Marte er ikke så god til å smake forskjell mellom colatypene som hun hevder, så sannsynligheten for at hun gjetter riktig er 0,5. *Oppgaveteksten presiserer for så vidt at hun skal tippe tilfeldig, så denne forutsetningen er egentlig allerede ivaretatt.*
- Delforsøkene er uavhengige av hverandre. Det betyr at sannsynligheten for at Marte gjetter riktig ved en tilfeldig smaking, ikke påvirkes av den/de foregående smakingen(e).

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



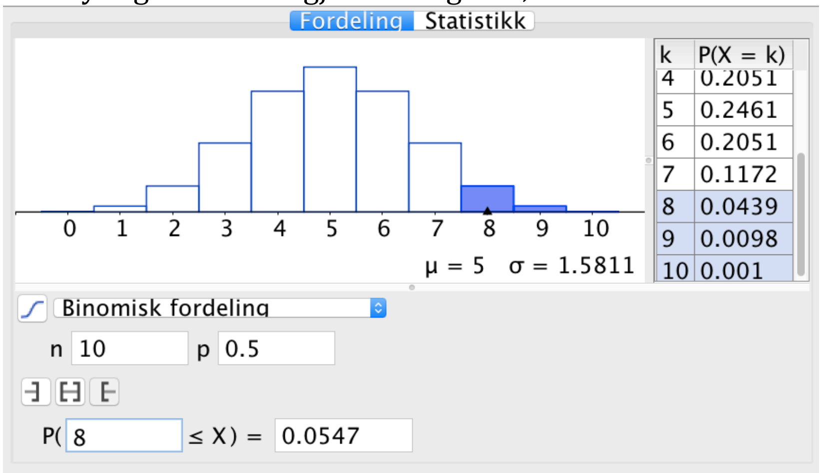
$$P\left(X=6\right)=\underline{\underline{0{,}2051\approx 20{,}5\%}}$$

b) Setter opp en nullhypotese og en alternativ hypotese.
Nullhypotesen er at Marte ikke kan gjenkjenne de to colatypene, slik at sannsynligheten for å gjette riktig er 0,5.
Den alternative hypotesen støtter Marte sin påstand, slik at sannsynligheten for å gjette riktig må være større enn 0,5.

$H_0 : p = 0{,}5$

$H_A : p > 0{,}5$

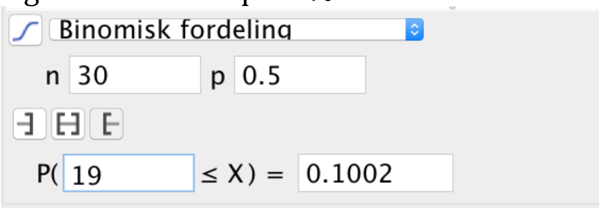
Bestemmer sannsynligheten for gjette riktig i minst 8 av 10 tilfeller, gitt at sannsynligheten for å gjette riktig er 0,5.

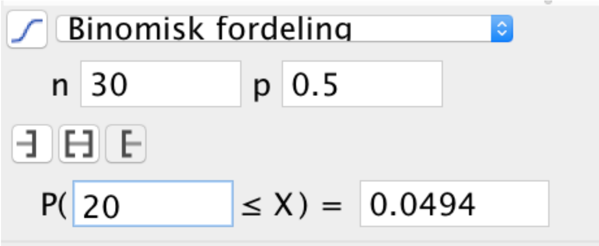


Får en p-verdi på ca.5,5%, som er over signifikansnivået. Vi kan altså ikke forkaste nullhypotesen.

<u>Det er altså *ikke* grunnlag for å si at Marte kan gjenkjenne de to colatypene.</u>

c) Bruker sannsynlighetskalkulatoren, og justerer X til p-verdien kommer under signifikansnivået på 5 %.





<u>Marte må gi minst 20 riktige svar for å overbevise Birger.</u>

Oppgave 5

a) Ser at antallet blå kuler i hver figur, samlet sett, danner en følge som tilsvarer rektangeltallene. Det n-te rektangeltallet er gitt ved $n(n+1) = n^2 + n$.

Antallet røde kuler i hver figur danner en følge som tilsvarer heltallene fra og med 2, slik at antall røde kuler i figur n er gitt ved $n+1$.
Da blir summen av antallet kuler i hver figur

$n^2 + n + n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, <u>som skulle vises</u>.

Her valgte jeg denne litt "omstendelige" måten, siden oppgaveteksten sa man skulle bruke mønsteret i figurene. Det er sikkert mulig å argumentere for at man ser at figurene danner en følge som tilsvarer kvadrattallene, men "forskjøvet", slik at figur 1 inneholder 2^2 kuler, figur 2 inneholder 3^2 kuler osv.
Da følger det at figur n vil bestå av $(n+1)^2$ kuler.

Jeg synes dessuten venstresiden i formelen i oppgaveteksten er litt "merkelig", siden hver figur består av nettopp n + (n+1) + n kuler, slik at 1+2+3+... og ...+3+2+1 blir overflødig, og kanskje litt "rar".
Figur 1 består jo ikke av 1+2+3+1+2+1+3+2+1 kuler...

b) I oppgave a) står følgende formel:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)+n+\cdots+3+2+1=(n+1)^2$$

Vi ser at det er symmetri om leddet $(n+1)$, slik at summen av alle leddene til høyre for $(n+1)$ er lik summen av alle leddene til venstre for $(n+1)$.
Om vi da halverer verdien av begge sidene i formelen, ender vi opp med:

$$1+2+3+\cdots+n+\frac{(n+1)}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}$$

Jobber videre med denne.

$$1+2+3+\cdots+n+\frac{(n+1)}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{(n+1)}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+2n+1-n-1}{2}$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n^2+n}{2}$$

Da har vi $\underline{\underline{T_n=\frac{n^2+n}{2}}}$