Løsningsforslag
Matematikk R1
Våren 2023

Krister J. Trandal
Kirkeparken videregående skole

Del 1

Oppgave 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^x + \ln x \\ \Rightarrow f'(x) &= \underline{\underline{\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 2

Alternativ 1: L'Hôpitals regel
Både teller og nevner går mot null når x går mot 2. Vi bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^3-8)'}{(x^2-4)'} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 2}\frac{3x}{2} = \frac{3\cdot 2}{2} = \underline{\underline{3}}$$

Alternativ 2: Polynomdivisjon av brøken
Vi kan utføre polynomdivisjon på hele brøken:

$$\begin{array}{l} \big(x^3 \qquad - 8\big) \div \big(x^2-4\big) = x + \dfrac{4x-8}{x^2-4} \\ \underline{-\,x^3 + 4x} \\ \qquad\quad 4x - 8 \end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^3-8}{x^2-4} = x + \frac{4x-8}{(x^2-4)} = x + \frac{4\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = x + \frac{4}{x+2}$$

og dermed har vi at

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\left(x + \frac{4}{x+2}\right) = 2 + \frac{4}{2+2} = 2 + 1 = \underline{\underline{3}}$$

Alternativ 3: Faktorisering av teller og nevner
Siden telleren er null for $x = 2$, er $(x-2)$ en faktor i telleren, og dermed er telleren delelig med $(x-2)$. Vi utfører polynomdivisjon av telleren med $(x-2)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \qquad\qquad\quad - 8\big) \div (x-2) = x^2+2x+4 \\
\underline{-\,x^3+2x^2} \\
\qquad\quad 2x^2 \\
\quad \underline{-\,2x^2+4x} \\
\qquad\qquad\quad 4x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-\,4x+8} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Dette betyr at telleren kan faktoriseres som $(x^3-8) = (x^2+2x+4)(x-2)$, og vi får

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2} = \frac{12}{4} = \underline{\underline{3}}$$

Oppgave 3

a) Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [1-4, 3-0] = [-3,3]$$
$$\overrightarrow{BC} = [9-4, 4-0] = [5,4]$$

Vinkelen $\alpha = \angle(CBA)$ er vinkelen mellom $\overrightarrow{BA}$ og $\overrightarrow{BC}$. Videre er

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\alpha$$

og

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = [-3,3]\cdot[5,4] = (-3)\cdot 5 + 3\cdot 4 = -3$$

Siden $\left|\overrightarrow{BA}\right| > 0$ og $\left|\overrightarrow{BC}\right| > 0$, og $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} < 0$, har vi at $\cos\alpha < 0$, og dermed må $\underline{\underline{\alpha = \angle(CBA) \text{ være større enn } 90^\circ.}}$

b) Vi har at $\overrightarrow{AB} = [4-1, 0-3] = [3,-3]$.
La l være linja gjennom B og C. En parameterframstilling for l er da

$$l : \begin{cases} x = 4+5t \\ y = 4t \end{cases}$$

Det betyr at punktet P har koordinater $P(4+5t, 4t)$. Videre har vi at $\overrightarrow{AP} = [5t+3, 4t-3]$.
Hvis vi skal ha at $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AP}$, så må

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} &= 0 \\
[3,-3]\cdot[5t+3, 4t-3] &= 0 \\
15t+9-12t+9 &= 0 \\
3t &= -18 \\
t &= -6
\end{aligned}$$

$\underline{\underline{\text{Punktet } P \text{ har altså koordinatene } P\,(4+5\cdot(-6), 4\cdot(-6)) = P(-26,-24).}}$

Oppgave 4

a) Eleven definerer først funksjonen $A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot (x^2 - 9)^4$ som representerer arealet av rektangelet. Eleven setter så en startverdi for t, altså $t = 0$, og bruker variabelen d til å øke verdien av t for hver kjøring av while-løkka. While-løkka fortsetter å kjøre så lenge verdien av $A(t)$ øker, og stopper når et toppunkt er nådd. Til slutt skriver programmet ut verdien av t som gir størst verdi for $A(t)$.

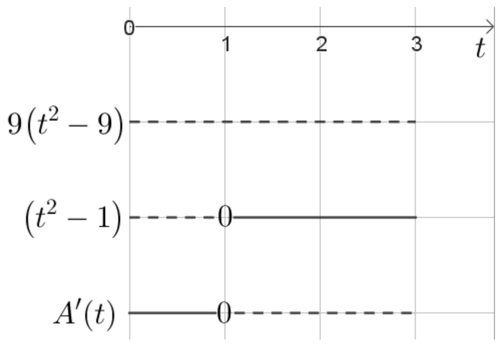
b) Arealet av rektangelet som funksjon av t er gitt ved

$$A(t) = t \cdot f(t) = t \cdot (t^2 - 9)^4$$

Vi deriverer $A(t)$ med hensyn på t:

$$\begin{aligned} A'(t) &= \left(t \cdot (t^2-9)^4\right)' = 1 \cdot (t^2-9)^4 + t \cdot 4(t^2-9)^3 \cdot 2t \\ &= (t^2-9)^4 + 8t^2(t^2-9)^3 = (t^2-9)^3\left[(t^2-9) + 8t^2\right] \\ &= (t^2-9)^3(9t^2-9) = 9(t^2-9)^3(t^2-1) \end{aligned}$$

Så tegner vi fortegnslinjer for $A'(t)$:



Som vi ser av fortegnslinjene, har $A(t)$ et toppunkt for $t = 1$.
Rektangelet R har altså sitt største areal for $t = 1$.

Del 2

Oppgave 1

a) For å finne den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten, regner vi som om det er den samme prosentvise veksten for hvert år fra 2008 til 2022:

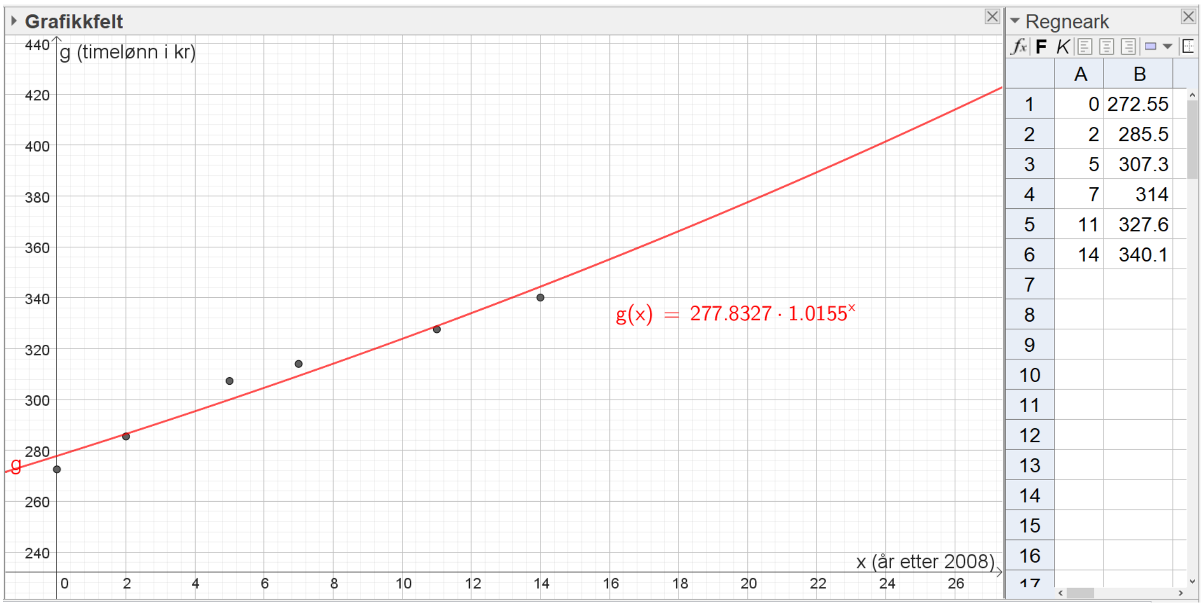
$$340,10 = 272,55 \cdot V^{14}$$

der V er vekstfaktoren for den prosentvise økningen.
Løsningen av denne likningen er

$$V = \sqrt[14]{\frac{340,10}{272,55}} \approx 1,0159$$

Den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i timelønn har altså vært omtrent $1,59\,\%$.

b) Oppgaven er løst i GeoGebra:



Jeg la inn dataene i et regneark, valgte regresjonsanalyse og deretter eksponentiell modell.
Den eksponentielle modellen for timelønnen x år etter 2008 er gitt ved
$g(x) = 277,8327 \cdot 1,0155^x$.

c) Her er et program som regner lønna til Amalie (oppgaven kan også løses i Excel):

```python
lønn = 0

for n in range(15):
    lønn = lønn + 1700*272.55*1.023**n

print(lønn)
```

Den samlede lønna til Amalie i årene 2008 til 2022 er 8 188 601,24 kr.

Vi kan bruke den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten fra oppgave a når vi regner på den samlede lønna til Per. Da kjører jeg det samme programmet som jeg brukte for Amalie, men endrer vekstfaktoren til $1,016$:

```python
lønn = 0

for n in range(15):
    lønn = lønn + 1700*272.55*1.016**n

print(lønn)
```

Den samlede lønna til Per i årene 2008 til 2022 er 7 785 081,25 kr.

d) Timelønna til Amalie i 2025 vil være $272,55 \cdot 1,023^{17}$ kr.
Hvis Per sin timelønn øker med denne samme prosenten fra 2022 til 2025, og han skal ha den samme timelønna som Amalie i 2025, må vi ha at

$$340,10 \cdot V^3 = 272,55 \cdot 1,023^{17}$$
$$V = \sqrt[3]{\frac{272,55 \cdot 1,023^{17}}{340,10}} \approx 1,057$$

Per sin timelønn må altså øke med omtrent $5,7\,\%$ hvert år hvis han skal ha samme timelønn som Amalie i 2025.

Oppgave 2

a) Hvis O er origo, så er $\overrightarrow{OA} = [3,2]$, og

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \vec{u} = [3,2] + [4,3] = [7,5]$$
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = [3,2] + [2t,5t] = [3+2t, 2+5t]$$

Siden $ABCD$ er et parallellogram, er $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$, og vi får at

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \vec{v} = [7,5] + [2t,5t] = [7+2t, 5+5t]$$

Punktene B, C og D har koordinatene $B(7,5)$, $C(7+2t, 5+5t)$ og $D(3+2t, 2+5t)$.

b) Siden $ABCD$ er et parallellogram, ligger skjæringspunktet P mellom diagonalene midt på hver diagonal. Vi har derfor at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} &= [3,2] + \frac{1}{2}\cdot[7+2t-3, 5+5t-2] \\ &= [3,2] + \frac{1}{2}\cdot[4+2t, 3+5t]\end{aligned}$$

Siden punktet P har koordinatene $P(8,11)$, er $\overrightarrow{OP} = [8,11]$, og vi får at

$$\begin{aligned}[8,11] &= [3,2] + \frac{1}{2}\cdot[4+2t, 3+5t] \\ [5,9] &= \frac{1}{2}\cdot[4+2t, 3+5t] \\ 2\cdot[5,9] &= [4+2t, 3+5t] \\ [10,18] &= [4+2t, 3+5t]\end{aligned}$$

Altså må $4+2t = 10$ og $3+5t = 18$. Begge disse likningene er oppfylt for $t = 3$.
Hvis $t = 3$, så blir skjæringspunktet mellom diagonalene i parallellogrammet $P(8,11)$.

Oppgave 3

a) Hvis for eksempel $x = \mathrm{e}^2 > 0$, så har vi at

$$(\ln x)^4 = \left(\ln(\mathrm{e}^2)\right)^4 = (2)^4 = 16$$

mens

$$4\ln x = 4\ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 4\cdot 2 = 8$$

Påstanden er altså usann.
Merknad: Det er derimot sant at $\ln\left(x^4\right) = 4\ln x$ for $x > 0$.

b) Svaret her avhenger av definisjonsmengden til funksjonen.

Hvis definisjonsmengden er hele tallinja:
Hvis $f(x)$ er en vilkårlig fjerdegradsfunksjon, så vil $f'(x)$ være en tredjegradsfunksjon. En tredjegradsfunksjon har alltid minst ett nullpunkt. Altså må $f'(x) = 0$ for minst én $x \in \mathbb{R}$. Den deriverte er også nødt til å skifte fortegn for denne x-verdien, fordi en tredjegradfunksjon vokser alltid mot $+\infty$ når $x \to \infty$ (eventuelt $x \to -\infty$), og mot $-\infty$ når $x \to -\infty$ (eventuelt $x \to \infty$).
For eksempel vil $-x^3 \to -\infty$ når $x \to \infty$, og $-x^3 \to \infty$ når $x \to -\infty$.
Påstanden er dermed sann.

Hvis definisjonsmengden er et intervall av tallinja:
Hvis $f(x) = x^4$ og $D_f = (0,1)$, så vil dette være en fjerdegradsfunksjon som ikke har noen ekstremalpunkt. Funksjonen er monotont voksende på sin definisjonsmengde, og vil aldri anta en største eller minste verdi, ettersom definisjonsmengden er det åpne intervallet $(0,1)$.
Påstanden er dermed usann.

c) Det er ikke en nødvendig betingelse at en funksjon er strengt voksende eller strengt avtagende for at den skal ha en omvendt funksjon.
La for eksempel funksjonen f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ -x-1, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Denne funksjonen er verken strengt voksende eller strengt avtagende, men den har en omvendt funksjon, ettersom *to forskjellige x-verdier* alltid gir *to forskjellige y-verdier* (funksjonen er altså en-til-en eller en-entydig, som er kravet for å ha en omvendt funksjon).
Påstanden er dermed usann.

Oppgave 4

a) Generelt har en funksjon f en omvendt funksjon f^{-1} hvis funksjonen f er en-til-en (også kalt en-entydig). Det betyr at *to forskjellige x-verdier* alltid gir *to forskjellige y-verdier.*
Grafisk kan man se at en funksjon er en-til-en dersom enhver *horisontal* linje skjærer grafen i bare ett punkt.
Vi kan også si at en funksjon er en-til-en hvis den er strengt voksende eller strengt avtagende på hele definisjonsmengden (merk at dette er en *tilstrekkelig* og ikke en *nødvendig* betingelse for at en funksjon er en-til-en og dermed har en omvendt funksjon).

Funksjonen f har ikke en omvendt funksjon. Funksjonen er ikke en-til-en, ettersom vi kan finne *to forskjellige* x-verdier som gir *samme* funksjonsverdi (y-verdi).

Funksjonen g har en omvendt funksjon. Funksjonen er en-til-en, ettersom den er strengt voksende på hele sin definisjonsmengde.

Funksjonen h har en omvendt funksjon. Funksjonen er en-til-en, ettersom *to forskjellige* x-verdier alltid gir *to forskjellige* funksjonsverdier (y-verdier). Enhver horisontal linje skjærer grafen i bare ett punkt.

Funksjonen k har en omvendt funksjon. Funksjonen er en-til-en, ettersom den er strengt avtagende på hele sin definisjonsmengde.

b) Generelt har vi at definisjonsmengden til den omvendte funksjon er det samme som verdimengden til den opprinnelige funksjonen. Altså har vi at

$$\begin{aligned} D_{g^{-1}} &= V_g = [1, 6] \\ D_{h^{-1}} &= V_h = [-1, 3] \\ D_{k^{-1}} &= V_k = (-1, 3] \end{aligned}$$

Oppgave 5

a) Vi setter inn 130 for L i den oppgitte likningen og løser for I:

$$\begin{aligned} L &= 120 + 10 \cdot \lg I \\ 130 &= 120 + 10 \cdot \lg I \\ \lg I &= \frac{130 - 120}{10} \\ \lg I &= 1 \\ I &= 10 \end{aligned}$$

Lydintensiteten er $10\,\mathrm{W/m^2}$ når lydstyrken er 130 dB.

b) Hvis L og L_0 er henholdvis sluttverdi og startverdi for lydstyrken, og hvis I og I_0 er henholdsvis sluttverdi og startverdi for lydintensiteten, så har vi at

$$\begin{aligned} L - L_0 &= (120 + 10 \cdot \lg I) - (120 + 10 \cdot \lg I_0) \\ &= 10 \cdot (\lg I - \lg I_0) = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \end{aligned}$$

Siden lydstyrken øker med 2, er $L - L_0 = 2$, og vi får

$$\begin{aligned} L - L_0 &= 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ 2 &= 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \\ \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) &= 0,2 \\ \frac{I}{I_0} &= 10^{0,2} \approx 1,58 \end{aligned}$$

Altså er $I \approx 1,58 I_0$, som betyr at lydintensiteten har økt med omtrent 58%.

c) Vi bruker først opplysningene i oppgaven til å bestemme E:

$$\begin{aligned} I &= \frac{E}{4\pi r^2} \\ \lg I &= \lg\left(\frac{E}{4\pi r^2}\right) \\ \frac{L-120}{10} &= \lg\left(\frac{E}{4\pi r^2}\right) \\ \frac{140-120}{10} &= \lg\left(\frac{E}{4\pi\cdot 50^2}\right) \\ 2 &= \lg\left(\frac{E}{10000\pi}\right) \\ 100 &= \frac{E}{10000\pi} \\ E &= 1000000\pi \end{aligned}$$

Nå har vi at

$$\begin{aligned} \frac{L-120}{10} &= \lg\left(\frac{E}{4\pi r^2}\right) \\ L &= 120 + 10\cdot\lg\left(\frac{E}{4\pi r^2}\right) \\ L &= 120 + 10\cdot\lg\left(\frac{1000000\pi}{4\pi r^2}\right) \\ L &= 120 + 10\cdot\lg\left(\frac{250000}{r^2}\right) \end{aligned}$$

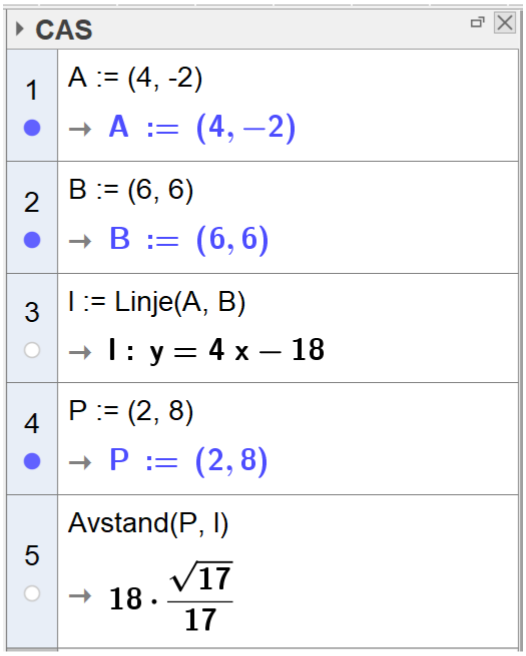
Funksjonen $L(r) = 120 + 10\cdot\lg\left(\frac{250000}{r^2}\right)$ er strengt avtagende, ettersom logartimeuttrykket avtar med økende r. Den minste avstanden vi er ute etter er løsning av likningen

$$\begin{aligned} 130 &= 120 + 10\cdot\lg\left(\frac{250000}{r^2}\right) \\ 1 &= \lg\left(\frac{250000}{r^2}\right) \\ 10 &= \left(\frac{250000}{r^2}\right) \\ r^2 &= 25000 \\ r &= \pm\sqrt{25000} \end{aligned}$$

Siden vi må ha at $r > 0$, er $r = \sqrt{25000} = 50\sqrt{10} \approx 158$.
Altså er $r \approx 158$ m den minste avstanden til dette flyet der lydstyrken er lavere enn 130 dB.

Oppgave 6

a) Jeg løste oppgaven i CAS:



Jeg definerte punktene A og B, og deretter linja l gjennom A og B. Så la jeg inn punktet P og brukte kommandoen Avstand(<Punkt>, <Objekt>).
Som vi ser er den eksakte verdien av avstanden fra P til l lik $\underline{\underline{\dfrac{18\sqrt{17}}{17}}}$.

b) Jeg løste oppgaven i CAS:

CAS

1	A := (4, -2) $\rightarrow$ $A := (4, -2)$
2	B := (6, 6) $\rightarrow$ $B := (6, 6)$
3	l := Linje(A, B) $\rightarrow$ $l:\ y = 4x - 18$
4	Q := (x, x^2 + 2x) $\rightarrow$ $Q := (x, x^2 + 2x)$
5	d(x) := Avstand(Q, l) $\rightarrow$ $d(x) := \sqrt{\frac{1}{17}}\left(x^2 - 2x + 18\right)$
6	Ekstremalpunkt(d) $\rightarrow$ $\left\{\left(1, \sqrt{17}\right)\right\}$

Punktene A og B og linja l ligger inne fra forrige deloppgave. Så definerte jeg et punkt $Q\left(x, f(x)\right) = Q\left(x, x^2 + 2x\right)$, som er et vilkårlig punkt på grafen til f. Deretter definerte jeg en funksjon $d(x)$ som representerer avstanden mellom punktet Q og linja l. Til slutt fant jeg bunnpunktet til funksjonen $d(x)$.

Den minste avstanden mellom grafen til f og linja l er $\sqrt{17}$.

Oppgave 7

a) Her er en mulig programkode, forklart med kommentarer:

```python
# Importerer kvadrarot-funksjonen
from numpy import sqrt

# Setter verdi for a, b og N
a = 0
b = 1
N = 10000

# Regner ut avstanden mellom påfølgende x-verdier
d = (b - a) / N

# Setter startverdi for x og en variabel som lagrer summen av funksjonsverdiene
x = 0
f_sum = 0 # Dette er også den første funksjonsverdien sqrt(0)

# Regner ut funksjonsverdien og lagrer en løpende sum av funksjonsverdier
# i variabelen f_sum.
# x-verdiene økes med d for hver gjennomgang av løkka.
for i in range(N):
    f_sum = f_sum + sqrt(x)
    x = x + d

# Skriver ut gjennomsnittsverdien
print(f_sum / (N + 1))
```

Utskriftene til skjerm for henholdsvis $N = 10000$, $N = 100000$ og $N = 1000000$:

```
In [7]: runfile('C:
wdir='C:/Users/Kris
0.6665498042166628

In [8]: runfile('C:
wdir='C:/Users/Kris
0.6666549935468027

In [9]: runfile('C:
wdir='C:/Users/Kris
0.6666654997928314
```

Som vi ser er gjennomsnittet omtrent 0,67.