

22.05.2023

Eksamen-Løsningsforslag

MAT0015 Matematikk

Del 2



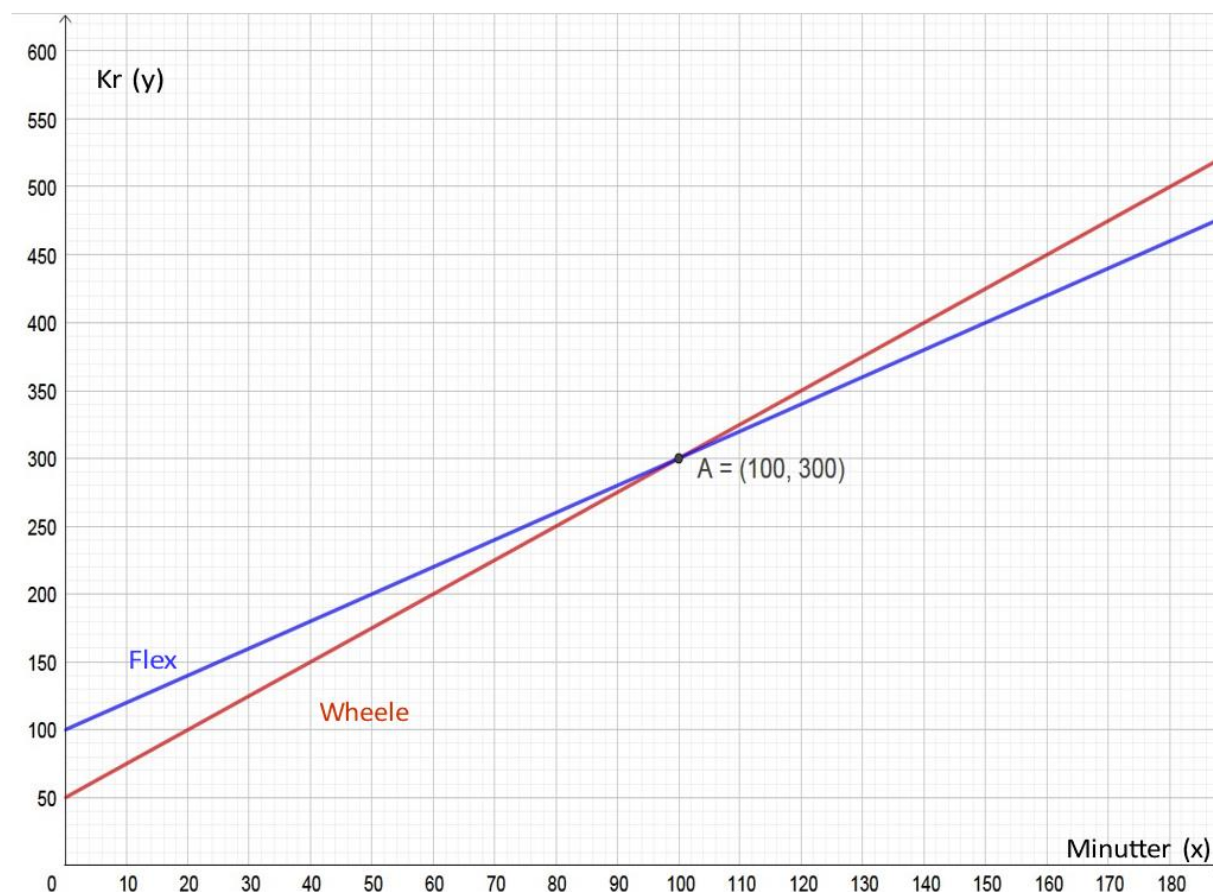
Bokmål

EKSAMENSINFORMASJON	
Eksamenstid	Eksamen varer i 5 timer. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Del med hjelpemidler	Etter at del 1 er levert inn, er alle hjelpemidler tillatt, med unntak av åpent internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. Del 2 skal leveres innen 5 timer.
Veiledning om vurderingen	Se eksamensveiledningen med vurderingskriterier til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Spesielt for oppgave 7 og 8	I oppgave 7 og 8 presenterer vi en situasjon eller en problemstilling der du selv skal undersøke og utforske. I disse oppgavene vil vi se etter din kompetanse i å: <ul style="list-style-type: none">• vurdere hva du vil utforske og formulere matematiske spørsmål knyttet til innhold i oppgaven• vise fremgangsmåte/resonnement og besvare de matematiske spørsmålene du formulerer• bruke hensiktsmessige hjelpemiddel• argumentere for løsningene dine og gjøre kritiske vurderinger Vi anbefaler å bruke omtrent 60 minutter på oppgave 7 og 8 til sammen.
Kilder	Kilder for bilder, tegninger osv. el-sykkel: tek.no (22.10.2022) smoothie: bama.no (13.12.2022) penger: dnb.no (02.10.2022), dinside.dagbladet.no (27.11.22) Bilder, tegninger og grafiske framstillinger: Utdanningsdirektoratet

Oppgave 1

Den grafiske framstillingen nedenfor viser sammenhengen mellom tid (minutter) og hvor mye det koster å leie el-sparkesykkel hos de to utleiefirmaene Flex (blå graf) og Wheele (rød graf).

Bruk den grafiske fremstillingen til å forklare hva det koster å leie en sparkesykkel fra Flex og Wheele.



Wheele

Har en startpris på 50 kr.

På 100 minutter har prisen økt med $300\text{kr} - 50\text{kr} = 250\text{kr}$

Pris per minutt blir da: $250\text{kr} : 100 = 2,5\text{kr}$

Funksjonsuttrykket blir da for pris: $f(x) = 2,5x + 50$, der x = minutter.

Pris 50 min: $2,5\text{kr} * 50 + 50\text{kr} = 175\text{kr}$

Pris 150 min: $2,5\text{kr} * 150 + 50\text{kr} = 425\text{kr}$

Flex:

Har startpris på 100 kr.

På 100 min har prisen økt med $300\text{kr} - 100\text{kr} = 200\text{kr}$

Pris per minutt blir da: $200\text{kr} : 100 = 2\text{kr}$

Funksjonsuttrykket blir da for pris: $f(x) = 2x + 100$, der x = minutter.

Pris 50 min: $2\text{kr} * 50 + 100\text{kr} = 200\text{kr}$

Pris 150 min: $2\text{kr} * 150 + 100\text{kr} = 400\text{kr}$

Konklusjon:

Det vil lønne seg å bruke Flex om du skal kjøre mer enn 100 minutter. Under 100 minutter lønner det seg med Wheele.

Oppgave 2

Nedenfor er det fire ulike tilbud på flasker med smoothie.

Gjør beregninger, vurder og argumenter for hvilket tilbud kundene bør velge.

Velger å prise hver flaske til 10 kr som eksempel:

Tilbud 1:



«Kjøp tre, og få to gratis»>

Rabatt blir da : $\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

Dette tilbudet lønner seg hvis du skal kjøpe flere flasker.
Billigst per flaske.

Pris for 5 = $10 \cdot 5 = 50$ Kr

Pris per flaske = $50 \text{ kr} : 5 = 10 \text{ kr}$

Tilbud 2:



«25 % rabatt på hver flaske»

Hvis det holder med 1 flaske, vil dette sannsynligvis
lønne seg økonomisk

Pris per flaske = $10 \text{ kr} \cdot 0,75 = 7,5 \text{ kr}$

Tilbud 3:



«Kjøp en, og få 50 % på den neste»

Rabatt: 50% i forhold $100\% + 100\% = 200\% = \frac{1}{2} = 50\%$
Samme pris som tilbud 2, dersom du skal ha 2.

Pris for 2 : $10 \text{ kr} + 5 \text{ kr} = 15 \text{ kr}$

Pris per flaske: $15 \text{ kr} : 2 = 7,5 \text{ kr}$

Tilbud 4:



«Kjøp to, og få en gratis»

Rabatt: $\frac{1}{3} = 33,3\%$

Vil lønne seg dersom du bare skal drikke akkurat 3
flasker og ikke vil kaste noen.

Ellers vil jo tilbud 1 lønne seg økonomisk

Pris på 3 flasker: $10 \text{ kr} \cdot 2 = 20 \text{ kr}$

Pris per flaske : $20 \text{ kr} : 3 = 6,67 \text{ kr}$

Oppgave 3



På 10. trinn ved Furutoppen skole ble det gjennomført en undersøkelse om ukelønningen til elevene på trinnet. Resultatet er presentert i regnearket nedenfor.

a) Bruk opplysningene i regnearket til å bestemme gjennomsnittlig ukelønn.

	A	B
1	10. trinn	
2	Ukelønn i kr	Antall elever
3	0	5
4	50	7
5	100	9
6	150	7
7	200	2

Da undersøkelsen ble gjennomført, var ikke alle elevene på skolen. De elevene som ikke var der, registrerte ukelønna si dagen etter. Etter at alle elevene hadde gjennomført undersøkelsen, økte gjennomsnittlig ukelønn til 100 kr.

b) Argumenter for hvor mange elever det kan være på 10. trinn ved Furutoppen skole.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	
1		10.trinn				10.trinn				10.trinn				10.trinn			
2		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr	
3		0	5	0		0	5	0		0	5	0		0	6	0	
4		50	7	350		50	8	400		50	8	400		50	8	400	
5		100	9	900		100	10	1000		100	12	1200		100	13	1300	
6		150	7	1050		150	12	1800		150	10	1500		150	12	1800	
7		200	2	400		200	3	600		200	4	800		200	4	800	
8		Sum		30	2700	Sum		38	3800	Sum		39	3900	Sum		43	4300
9		Gjennomsnitt		90		Gjennomsnitt		100		Gjennomsnitt		100		Gjennomsnitt		100	
10																	
11		Resultat ved undersøkelsens start				3 ulike løsninger på når alle elevene har levert. I disse tilfellene er 8, 9 eller 13 som var borte. Alle gir gjennomsnitt 100.											
12		Vi vet at det må øke mest blant des om er borte, i og med at de hever gjennomsnittet															

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	10.trinn				10.trinn				10.trinn				10.trinn			
2	Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr		Ukelønn kr	Antall elever	Sum lønner kr	
3	0		=B3*C3		0		=F3*G3		0		=J3*K3		0		=N3*O3	
4	50		=B4*C4		50		=F4*G4		50		=J4*K4		50		=N4*O4	
5	100		=B5*C5		100		=F5*G5		100		=J5*K5		100		=N5*O5	
6	150		=B6*C6		150		=F6*G6		150		=J6*K6		150		=N6*O6	
7	200		=B7*C7		200		=F7*G7		200		=J7*K7		200		=N7*O7	
8	Sum	=SUMMER(C3:C7)	=SUMMER(D3:D7)		Sum	=SUMMER(G3:G7)	=SUMMER(H3:H7)		Sum	=SUMMER(K3:K7)	=SUMMER(L3:L7)		Sum	=SUMMER(O3:O7)	=SUMMER(P3:P7)	
9	Gjennomsnitt	=D8/C8			Gjennomsnitt	=H8/G8			Gjennomsnitt	=L8/K8			Gjennomsnitt	=P8/O8		
10																
11					Bruke til formelutskrift											
12	Resultat ved undersøkelsens start				3 ulike løsninger på når alle elevene har levert. I disse tilfellene er 8, 9 eller 13 som var borte. Alle gir gjennomsnitt 100.											
13					Vi vet at det må øke mest blant des om er borte, i og med at de hever gjennomsnittet											

[Lenke til regnearket:](#)

Oppgave 4

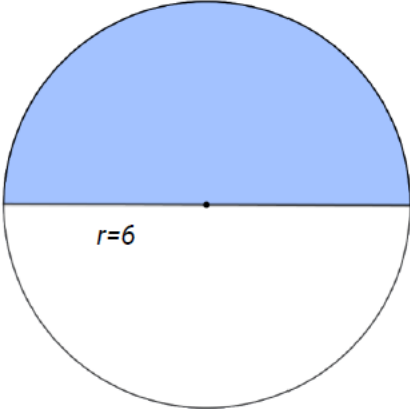
Nedenfor er en oppgave som Halvor fikk i en matematikktime.

OPPGAVE:

Bildet til høyre viser en sirkel, med en blå halvsirkel.

Radius er 6.

Bestem arealet til halvsirkelen.



Halvor løste oppgaven slik:

Løs oppgaven her:

Formelen for areal av sirkel: $\pi \cdot r \cdot r$
Jeg skal regne ut arealet av en halvsirkel og halverer derfor radiusen til 3.
Det gir: $3,14 \cdot 3 \cdot 3 \approx \underline{\underline{28,26}}$

Løys oppgåva her:

Formelen for areal av sirkel: $\pi \cdot r \cdot r$

Eg skal rekne ut arealet av ein halvsirkel og halverer derfor radiusen til 3.

Det gir: $3,14 \cdot 3 \cdot 3 \approx \underline{\underline{28,26}}$

Vurder løsningen til Halvor, og argumenter for om løsningen gir et korrekt areal av halvsirkelen.

Ved å halver radius, finner Halvor $\frac{1}{4}$ av sirkelarealet, fordi det som skjer er at han deler med 2 to ganger. Nedfor ser man at man kun skal forkorte mot 1 av radiusene.

Det riktige svaret blir : $\frac{6 \cdot 6 \cdot 3,14}{2} \text{ cm}^2 = \frac{3 \cdot 6 \cdot 3,14}{1} \text{ cm}^2 = 3 \cdot 6 \cdot 3,14 \text{ cm}^2 = \underline{\underline{56,52 \text{ cm}^2}}$

Oppgave 5

Emira utforsker store talls lov ved å kaste terning med seks sider. Hun lager et dataprogram som kaster terning for henne.



Nedenfor vises Emiras forslag til en kode til et dataprogram.



a) Forklar hva som skjer når dataprogrammet blir kjørt

Emira vil lage en tabell for å vise at det er like stor sannsynlighet for å få de ulike resultatene 1, 2, 3, 4, 5 og 6.

b) Hvilken verdi for *antall_terningkast* vil du anbefale Emira å velge? Begrunn svaret ditt.

a) Programmet skal simulere å trille terning og skrive ut resultat man får. Det velges tilfeldig tall fra 1 til 6 som på en vanlig terning. Verdiene samles i en datatabell, som skrives ut på skjermen etter at alle kastene er utført (*antall_terningkast*)

b) Verdien for *antall_terningskast* bør være høy. Siden datamaskinen tar 100000 nesten like raskt som 1000, kan man anbefale det, fordi da blir resultatet nærmest den teoretiske sannsynligheten. (Store talls lov)

Programforslag:

≡

trinket

Python3

▶ Run

▼

Share

▼

< >

main.py

```
1 import random
2
3 # Spør brukeren om antall terningkast
4 ant_kast = int(input("Hvor mange terningkast vil du simulere? "))
5 utfall=[1,2,3,4,5,6]
6 # Simuler terningkast
7 listen = []
8 for kast in range(ant_kast):
9     trill = random.randint(1, 6)
10    listen.append(trill)
11
12 # Teller for hver verdi (indeks 0 ignoreres for å gjøre indeksene 1-6 mer intuitive)
13 opptelling = [0,0,0,0,0,0]
14 for verdi in listen: # Leter først opp alle 0-er, deretter 1-ere i listen....)
15     opptelling[verdi] += 1
16 print()
17 print("Tabell etter index:")
18 print(opptelling)
19 # Skriv ut resultatene som en tabell
20 print()
21 print("Resultatene i tabellform:")
22
23 print("Verdi\tAntall\t%")
24 for verdi in utfall: # Henter ut antall i index 1,2,3,4,5,6 i opptelling
25     print(f"{verdi}\t{opptelling[verdi]}\t{opptelling[verdi]*100/ant_kast:2.1f} %")
```

Powered by trinket


Hvor mange terningkast vil du simulere?

Tabell etter index:
[0, 1683, 1634, 1700, 1672, 1668, 1643]

Resultatene:


Verdi	Antall	%
1	1683	16.8 %
2	1634	16.3 %
3	1700	17.0 %
4	1672	16.7 %
5	1668	16.7 %
6	1643	16.4 %

Alternativ med Dictionary (mest effektiv) i stedet for liste

 **trinket** Python3 Run Share

main.py

```
1 from random import randint
2 print()
3
4 antall_kast = int(input("Antall kast :"))
5 print()
6 resultat_teller = {1: 0, 2: 0, 3: 0, 4: 0, 5: 0, 6: 0}
7 for kast in range(antall_kast):
8     fikk = randint(1,6)
9     resultat_teller[fikk] += 1
10
11 print("Øyne\tTreff\t %")
12 print("-----")
13 for resultat, antall in resultat_teller.items():
14     print(f"{resultat}\t{antall}\t{antall*100/antall_kast}%")
15
16 print("Sum: ",antall_kast)
17
```

Powered by  **trinket**

Antall kast : 10000

Øyne	Treff	%
1	1723	17.23%
2	1621	16.21%
3	1682	16.82%
4	1602	16.02%
5	1730	17.3%
6	1642	16.42%
Sum:	10000	

Lenke til programmene:

<https://trinket.io/python3/f5b2df6466>

<https://trinket.io/python3/22fd0764ba>

Oppgave 6

Nicolas får velge mellom 10 000 kroner en gang, eller 1 krone som dobler seg hver dag i to uker (14 dager). Hva bør han velge?

Argumenter for det mest lønnsomme valget.

Enten ti tusen kroner en gang:



Eller en krone som dobler seg hver dag i 14 dager:

Før dag 1:



Etter den første dagen:



Etter den andre dagen:



og så videre til og med dag 14.

Hver dag i 14 dager dobles det:

$2 \cdot 2 \dots \cdot 2$ 14 ganger:

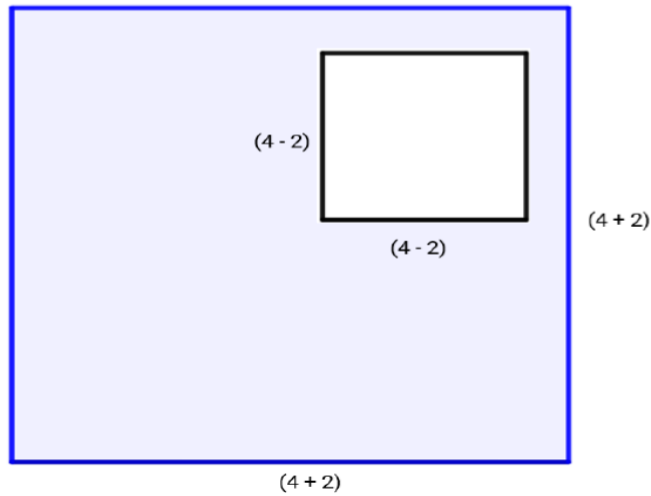
Nicolas bør velge dobling av kr: $2^{14} = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4 = \underline{\underline{16\,384}}$

Dette er $(16\,384 - 10\,000)$ kr = **6384 kr** mer enn 10000kr

Oppgave 7

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 7. **Bruk figuren og samtalen nedenfor til å vise din kompetanse innen abstraksjon og generalisering.**

Figuren viser et kvadrat i et større kvadrat.



Arealet av hele figuren blir $6 \cdot 6 = 36$

Arealet av det blå området er 32.

La oss prøve med andre tall, for eksempel $(5 + 1)$ og $(5 - 1)$

Jeg er sikker på at det finnes en generell løsning for arealet av det blå området!



Jeg vil velge å bruke a og b som generelle tall

Generell løsning:

$$(a+b)(a+b) - (a-b)(a-b) =$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 =$$

4ab

Test:

Når $a=4$ og $b=2 \rightarrow$

$$4ab = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$$

eller

$$(4+2)(4+2) - (4-2)(4-2) =$$

$$6 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 32$$

Når $a=5$ og $b=1$

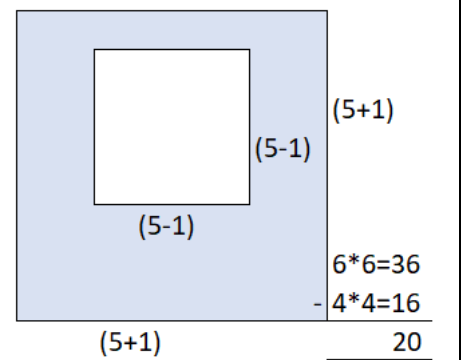
$$4ab = 4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$$

eller

$$(5+1)(5+1) - (5-1)(5-1) =$$

$$6 \cdot 6 - 4 \cdot 4 = 20$$

Visuelt \rightarrow



Oppgave 8

Se eksamensinformasjon s.2 for tips om hvordan du kan vise kompetanse i oppgave 8. **Bruk tabellen og utsagnene nedenfor til å vise din kompetanse innen modellering og anvendelse.**

Therese er 16 år, og skal kjøpe en brukt mopedbil. Hun planlegger å eie bilen i to år.

Informasjon	Pris
Mopedbilen	83 600 kr
Omregistrering	600 kr
Ansvarsforsikring	4 000 kr/år
Førerkort, minimumspakke	11 990 kr
Ekstra kjøretime, pris per time	850 kr
Veiavgift	470 kr
Sparepenger	41 827 kr
Forbruk	0,3 L per mil

Sparepengene
har stått på en
konto i 3 år med
1,5 % årlig rente

Bilen har et årlig
verditap på 10 %

På en vanlig
uke kjører jeg
omtrent 6,5 mil.
Dieselprisen er
omtrent 21 kr/L

Therese har en
deltidsjobb der
hun tjener
3 000 kr hver
måned



Noen løsningsforslag i regneark: Lenke:

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1lo_Arwe-JFf9wIMUB1W6d4A3Qir4P5MWyeswVdkcy7I/edit?usp=sharing

Andre ideer?

	A	B	C	D	E	F	G
1	Informasjoner				Inntekter		
2	Hva	Pris			Lønn per mnd	3000	
3	Mopedbil	83600	kr		Sum lønn 2 år		72000
4	Omregistrering	600	kr		Sparing		41827
5	Ansvarsforsikring	4000	kr		Sum lønn/sparing		113827
6	Førerkort,min	11990	kr				
7	Ekstra kjøretime,	850	kr				
8	Veiavgift	470	kr		Utgifter		
9	Sparepenger	41827	kr		Ved kjøp		83600
10	Forbruk mobedbil	0,3	l/mil		Forsikring 2 år	4000	8000
11	Pris pr liter	21	kr		Veiavift 2 år	470	940
12	Kjører per uke	6,5	mil		Førerkort min pris		11990
13	Vekstfaktor verditap	0,9			Sum for kjøring med mobedbil-faste utgifter.		104530
14	Rente	1,5	%				
15	Antall år	3			Mil per år	338	
16	Vekstfaktor	1,015			Drivstoff per år (L)	101	
17	Måneder 2 år	24			Pris drivstoff på 2 år		4259
18	Uker per år	52			Sum utgifter 2 år		108789
19							
20	Innskudd til sparing				Balanse lønn/sparing - utgifter :		
21	Beregnet verdi satt inn	40000			Overskudd		5038
22					Kan bruker mer på drivstoff eller kjøretimer		
23	Bilverdi etter 2 år				Antall mulig ekstra kjøretimer		5,00 timer
24	Salgsverdi	67716			Mulig antall liter bensin ekstra		240 L
25	Verditap:	15884			Mulig antall kjøremil ekstra		800 mil

	A	B	C	D	E	F	G
1	Informasjoner				Inntekter		
2	Hva	Pris			Lønn per mnd	3000	
3	Mopedbil	83600	kr		Sum lønn 2 år		=F2*B17
4	Omregistrering	600	kr		Sparing		=B9
5	Ansvarsforsikring	4000	kr		Sum lønn/sparing		=G3+B9
6	Førerkort,min	11990	kr				
7	Ekstra kjøretime,	850	kr				
8	Veiavgift	470	kr		Utgifter		
9	Sparepenger	41827	kr		Ved kjøp		=B3
10	Forbruk mobedbil	0,3	l/mil		Forsikring 2 år	=B5	=F10*2
11	Pris pr liter	21	kr		Veiavift 2 år	=B8	=F11*2
12	Kjører per uke	6,5	mil		Førerkort min pris		=B6
13	Vekstfaktor verditap	=1-0,1			Sum for kjøring med mobedbil-faste utgifter.		=SUMMER(G9:G12)
14	Rente	1,5	%				
15	Antall år	3			Mil per år	=B18*B12	
16	Vekstfaktor	1,015			Drivstoff per år (L)	=F15*B10	
17	Måneder 2 år	24			Pris drivstoff på 2 år		=F16*B11*2
18	Uker per år	52			Sum utgifter 2 år		=G13+G17
19							
20	Innskudd til sparing				Balanse lønn/sparing - utgifter :		
21	Beregnet verdi satt inn	=B9/B16/B16/B16			=HVIS(G21>0;"Overskudd";"Underskudd")		=G5-G18
22					=HVIS(E21="Overskudd";"Kan bruker mer på drivstoff eller kjøretimer";"Må spare e		
23	Bilverdi etter 2 år				Antall mulig ekstra kjøretimer		=AVRUND.NED(G21/B7) timer
24	Salgsverdi	=B3*B13*B13			Mulig antall liter bensin ekstra		=G21/B11 L
25	Verditap:	=B3-B24			Mulig antall kjøremil ekstra		=G24/B10 mil