Løsningsforslag eksamen S2 (LK20) våren 2023

Del 1

Oppgave 1

$$\int_0^1 \left(e^x + 3x^2\right)dx = \left[e^x + x^3\right]_0^1 = e^1 + 1^3 - \left(e^0 + 0^3\right) = e + 1 - 1 = \underline{\underline{e}}$$

Oppgave 2

a) Lar $K(x)$ være kostnaden i kroner ved produksjon av *x* enheter og lar $I(x)$ være inntekten i kroner ved salg av *x* enheter.
Grensekostnaden ved produksjon av 40 enheter er stigningstallet til tangenten i punktet $\left(40, K(40)\right)$.

Ved å lage en tangent som er så nøyaktig som mulig, kan jeg bestemme en tilnærmet verdi for denne grensekostnaden.

Det ser ut til at ei rett linje gjennom origo og punktet $\left(80, 6000\right)$ vil tangere grafen til *K* i $\left(40, K(40)\right)$.

Denne linja har stigningstall $\dfrac{6000}{80} = \dfrac{600}{8} = \dfrac{300}{4} = 75$.

Eventuelt kan vi bruke at tangeringspunktet blir $\left(40, 3000\right)$*, og regne ut stigningstallet slik:* $\dfrac{3000}{40} = 75$.

<u>Grensekostnaden er omtrent 75 kroner per enhet når det produseres 40 enheter.</u>

b) Jeg vet at overskuddet er størst når grensekostnaden er lik grenseinntekten.
I og med at inntektsfunksjonen er en lineær funksjon, vet jeg at grenseinntekten er konstant. Bestemmer tangeringspunktet mellom ei rett linje som er parallell med grafen til *I* og tangerer grafen til *K*.
x-koordinaten til dette tangeringspunktet forteller hvilken produksjonsmengde som gjør at grensekostnad er lik grenseinntekt, og dermed gir størst overskudd.
Ved å parallellforskyve grafen til *I* så nøyaktig som mulig, ser jeg at *x*-koordinaten til tangeringspunktet ligger omtrent midt mellom 55 og 60.

<u>Det må produseres ca. 57-58 enheter for at overskuddet skal bli størst mulig.</u>

Jeg vil hevde at det er enklere å bestemme dette presist ved å se nærmere på overskuddsfunksjonen. Grafen til overskuddsfunksjonen vil være en parabel som vender hul side ned ("sur munn"), og toppunktet vil ligge midt mellom nullpunktene. Nullpunktene tilsvarer dekningspunktene, altså skjæringspunktene mellom grafene til K og I. Det ser ut til at kostnad og inntekt er lik ved produksjon av ca.15 enheter og 100 enheter. Midt mellom 15 og 100, har vi 57,5.

Oppgave 3

a) Starter med å bestemme k:

$$\begin{aligned} k+0{,}3+k-0{,}2+0{,}1&=1 \\ 2k+0{,}2&=1 \\ 2k&=0{,}8 \\ k&=0{,}4 \end{aligned}$$

Nå kan jeg regne ut $P(X>1)$:

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)=0{,}4-0{,}2+0{,}1=0{,}3.$$

$P(X>1)=0{,}3$, som skulle vises.

b)

$$E(X)=0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}1=0+0{,}3+0{,}4+0{,}3=1$$

$$\begin{aligned} Var(X)&=(0-1)^2\cdot 0{,}4+(1-1)^2\cdot 0{,}3+(2-1)^2\cdot 0{,}2+(3-1)^2\cdot 0{,}1 \\ &=1\cdot 0{,}4+0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1 \\ &=0{,}4+0{,}2+0{,}4 \\ &=1 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{E(X)=1 \text{ og } Var(X)=1}}$$

Oppgave 4

a) Eleven ønsker å regne ut summen av de ti første leddene i en aritmetisk rekke der $a_1=3$ og den faste differansen mellom leddene er 4.

b) Bestemmer først verdien til ledd nummer 100:

$a_{100}=3+(100-1)\cdot 4=3+99\cdot 4=399$.

Da kan jeg regne ut summen av de 100 første leddene i rekka:

$$S_{100}=\frac{3+399}{2}\cdot 100=\frac{402}{2}\cdot 100=201\cdot 100=20100.$$

Dersom N settes til 100 i linje 4, blir resultatet 20100 når programmet kjøres.

Oppgave 5

Det maksimale nivået virkestoff som Knut vil ha i kroppen er summen av ei uendelig geometrisk rekke der $a_1 = 7$ og $k = 0,9$.

$$S = \frac{7}{1-0,9} = \frac{7}{0,1} = 70.$$

Med dosen Knut tar, vil han maksimalt ha 70mg virkestoff i kroppen.
Det legen sier, stemmer.

Oppgave 6

a)

$$\begin{aligned} P(X > 600) &= 1 - P(X \leq 600) \\ &= 1 - P\left(z \leq \frac{600-500}{50}\right) \\ &= 1 - P(z \leq 2) \\ &= 1 - 0,9772 \\ &= 0,0228 \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at et tilfeldig valgt batteri vil ha en levetid på mer enn 600 timer er omtrent 2,3 %.

b)

$$\begin{aligned} P(X > t) &= 0,758 \\ 1 - P(X \leq t) &= 0,758 \\ 1 - P\left(z \leq \frac{t-500}{50}\right) &= 0,758 \\ P\left(z \leq \frac{t-500}{50}\right) &= 0,242 \end{aligned}$$

Tabellen med standard normalfordeling gir da at $\frac{t-500}{50} = -0,7$.

$$\begin{aligned} \frac{t-500}{50} &= -0,7 \\ t - 500 &= -0,7 \cdot 50 \\ t &= -35 + 500 \\ t &= 465 \end{aligned}$$

c) Forventet levetid for disse batteriene er 500 timer, så da må vi ha en grafisk fremstilling som har toppunkt for $x = 500$.
Vi kan altså umiddelbart utelukke *B* og *C*, og heller se nærmere på *A* og *D*.

Tabellen med standard normalfordeling forteller oss at
$P(-3 \leq z \leq 3) = 0{,}9990 - 0{,}0013 = 9997 = 99{,}97\%$.

Det betyr at 99,97 % av arealet under kurven i den grafiske fremstillingen som illustrerer *X* skal ligge mellom $x = 350$ og $x = 650$.
Fremstilling *D* har for mye "areal til overs" i begge ender til at dette kan stemme.
Samtidig kan man se at man så å si hele arealet under kurven i fremstilling *A* ligger i dette intervallet.

<u>Det er fremstilling *A* som illustrerer *X*.</u>

Del 2

Oppgave 1

a) Jeg forutsetter at første innbetaling var én måned etter at Anders tok opp lånet. Summen av nåverdiene til alle terminbeløpene, på det tidspunktet Anders tok opp lånet, utgjør da en geometrisk rekke med 36 ledd, der

$$a_1 = \frac{x}{1{,}0049} \text{ og } k = \frac{1}{1{,}0049}.$$

Summen av rekka er 150 000.

CAS

1: (x/1.0049)*((1/1.0049)^36−1)/((1/1.0049)−1)=150000

$$\checkmark \quad \frac{x}{1.0049} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.0049}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{1.0049} - 1} = 150000$$

2: x / 1.0049 ((1 / 1.0049)^36 − 1) / (1 / 1.0049 − 1) = 150000

NLøs: $\{x = 4555.1392\}$

<u>Terminbeløpet var 4555,14 kroner.</u>

b) Bestemmer summen av nåverdiene til de 12 siste terminbeløpene, like etter at terminbeløp 24 ble betalt inn.
Summen av disse 12 nåverdiene utgjør en geometrisk rekke med 12 ledd, der

$$a_1 = \frac{4555{,}14}{1.0049} \text{ og } k = \frac{1}{1{,}0049}.$$

CAS

1: (4555.14/1.0049)*((1/1.0049)^12−1)/((1/1.0049)−1)

$$\checkmark \quad \frac{4555.14}{1.0049} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.0049}\right)^{12} - 1}{\frac{1}{1.0049} - 1}$$

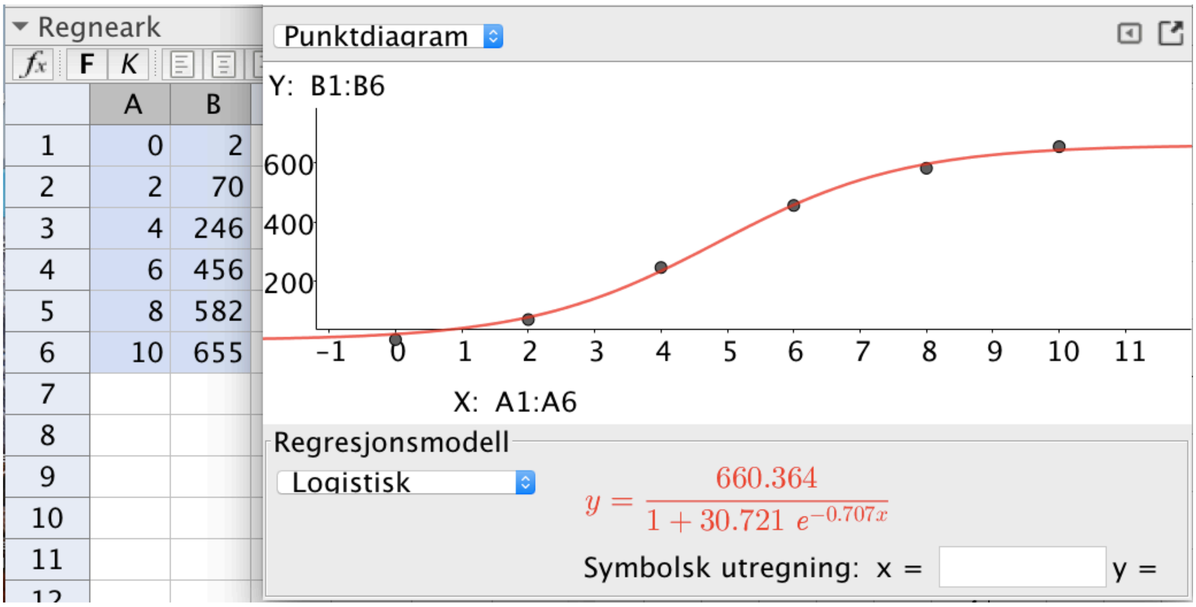
2: 4555.14 / 1.0049 ((1 / 1.0049)^12 − 1) / (1 / 1.0049 − 1)

$\approx$ 52959.7956

Da bilen til Anders ble totalskadd, var restlånet på rett under 53000 kroner, så utbetalingen fra forsikringsselskapet var tilstrekkelig for å betale dette ned.

Oppgave 2

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra og gjennomfører regresjonsanalyse. En logistisk modell vil passe bra, siden økningen i antall kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge øker mye i starten av perioden, før veksten avtar og flater ut. Dette gir også mening da det er vanlig med rask vekst når noe er nytt og kommer ut på markedet, men veksten vil avta og flate ut etter hvert som markedet mettes – man når bæreevnen.

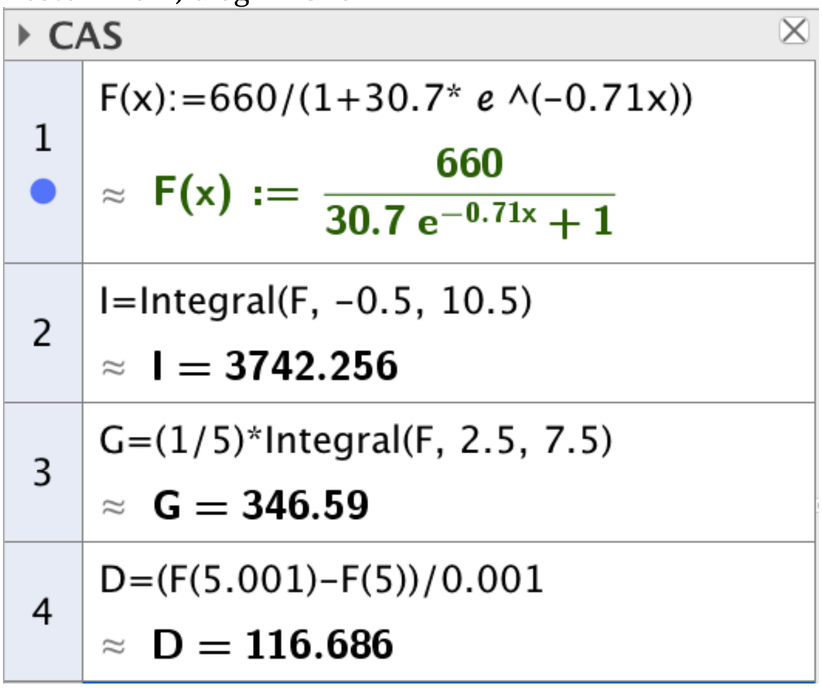


	A	B
1	0	2
2	2	70
3	4	246
4	6	456
5	8	582
6	10	655

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{660}{1 + 30{,}7 \cdot e^{-0{,}71x}}}}$$

b)

Bestemmer *I*, *G* og *D* i CAS:



GeoGebra slet litt med å få regnet ut S, så velger derfor å bestemme S ved hjelp av et lite program.

```python
from math import exp    #Trenger Eulers tall.

#Definerer funksjonen F
def F(x):
    return 660/(1+30.7*exp(-0.71*x))

S = 0

#Lager en for-løkke som regner ut og summerer F(i) for i fra og med 0 til og med 10.
for i in range(0,11):
    S = S + F(i)
print(S)

```

```
3742.3462761898254
```

$$\underline{\underline{I = 3742{,}26 \quad , \quad G = 346{,}59 \quad , \quad S = 3742{,}35 \quad \text{og} \quad D = 116{,}69}}$$

c) *I* forteller at det ble brukt totalt ca. 3742 millioner kroner, altså i overkant av 3,7 milliarder kroner, på strømming av musikk i Norge i 11-årsperioden fra midten av 2007 til midten av 2018.

G forteller oss at det ble brukt i gjennomsnitt ca.347 millioner kroner per år på strømming av musikk i Norge i femårsperioden fra midten av 2010 til midten av 2015.

Tolkningene av hva *I* og *G* forteller oss forutsetter at vi antar at $x = 0$ svarer til 1.januar 2008, $x = 1$ svarer til 1.januar 2009 osv., slik at $F(x)$ tar for seg en kontinuerlig endring i antall kroner brukt på strømming av musikk.

Dersom vi tenker oss at $F(0)$ forteller hvor mye penger som ble brukt i 2008, $F(1)$ forteller hvor mye som ble brukt i 2009 osv., vil det totale antallet kroner som brukes på musikk fra og med 2008 til og med 2018 være gitt ved *S*.
S forteller oss da at det samlet sett ble brukt ca.3752 millioner kroner på strømming av musikk i 11-årsperioden fra og med 2008 til og med 2018.

D gir oss en tilnærmet verdi for den momentane vekstfarten når $x = 5$, som da forteller at antallet kroner som ble brukt på strømming av musikk i Norge økte med omtrent 117 millioner kroner per år i 2013.

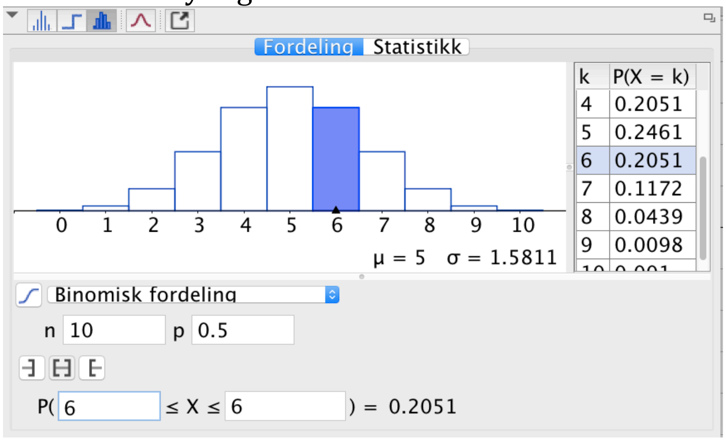
Oppgave 3

a) Jeg ser på dette som et binomisk forsøk, og må dermed gjøre følgende antagelser:

- Det er kun de to colatypene *Coca-Cola* og *Pepsi-Cola* som anvendes i forsøket.
- Marte er ikke så god til å smake forskjell mellom colatypene som hun hevder, så sannsynligheten for at hun gjetter riktig er 0,5.
  Oppgaveteksten presiserer for så vidt at hun skal tippe tilfeldig, så denne forutsetningen er egentlig allerede ivaretatt.

- Delforsøkene er uavhengige av hverandre. Det betyr at sannsynligheten for at Marte gjetter riktig ved en tilfeldig smaking, ikke påvirkes av den/de foregående smakingen(e).

Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.

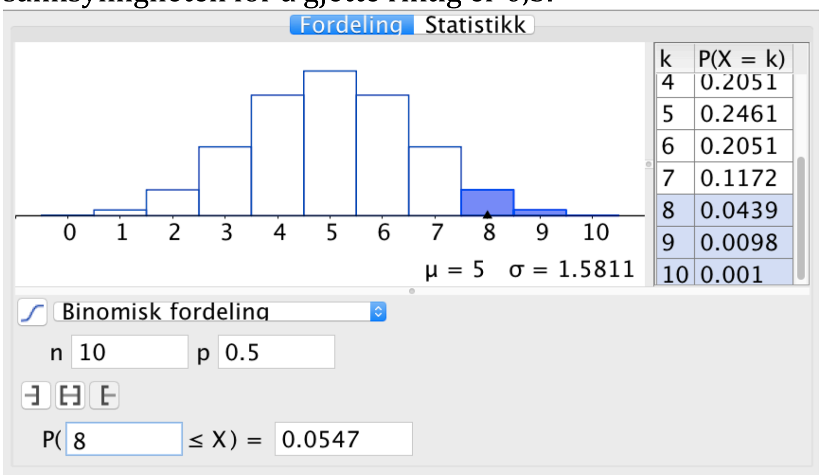


$$P(X=6)=\underline{\underline{0,2051\approx 20,5\%}}$$

b) Setter opp en nullhypotese og en alternativ hypotese.
Nullhypotesen er at Marte ikke kan gjenkjenne de to colatypene, slik at sannsynligheten for å gjette riktig er 0,5.
Den alternative hypotesen støtter Marte sin påstand, slik at sannsynligheten for å gjette riktig må være større enn 0,5.

$$H_0 : p = 0,5$$
$$H_A : p > 0,5$$

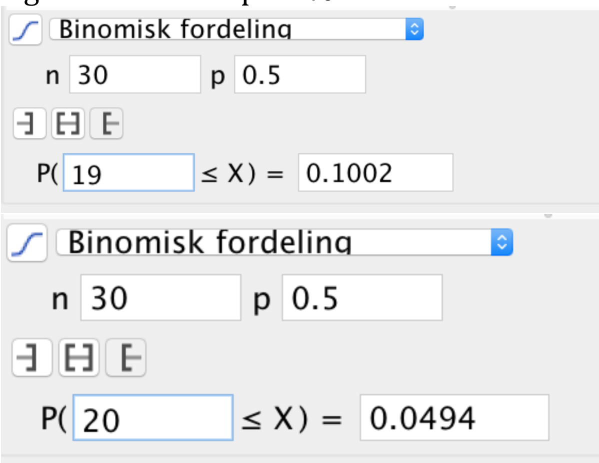
Bestemmer sannsynligheten for gjette riktig i minst 8 av 10 tilfeller, gitt at sannsynligheten for å gjette riktig er 0,5.



Får en *p*-verdi på ca.5,5%, som er over signifikansnivået. Vi kan altså ikke forkaste nullhypotesen.

<u>Det er altså *ikke* grunnlag for å si at Marte kan gjenkjenne de to colatypene.</u>

c) Bruker sannsynlighetskalkulatoren, og justerer X til p-verdien kommer under signifikansnivået på 5 %.



Marte må gi minst 20 riktige svar for å overbevise Birger.

Oppgave 4

I tilbud 1 vil ukelønnen, uke for uke, danne en aritmetisk tallfølge med fast differanse 10. I tilbud 2 vil ukelønnen, uke for uke, danne en geometrisk tallfølge med $k = 1{,}05$.

a) Lager oversikten i et regneark.

	A	B	C
1	Uke	Tilbud 1	Tilbud 2
2	1	kr 100,00	kr 100,00
3	2	kr 110,00	kr 105,00
4	3	kr 120,00	kr 110,25
5	4	kr 130,00	kr 115,76

Formler:

	A	B	C
1	Uke	Tilbud 1	Tilbud 2
2	1	=100	100
3	2	=B2+10	=C2*1,05
4	3	=B3+10	=C3*1,05
5	4	=B4+10	=C4*1,05

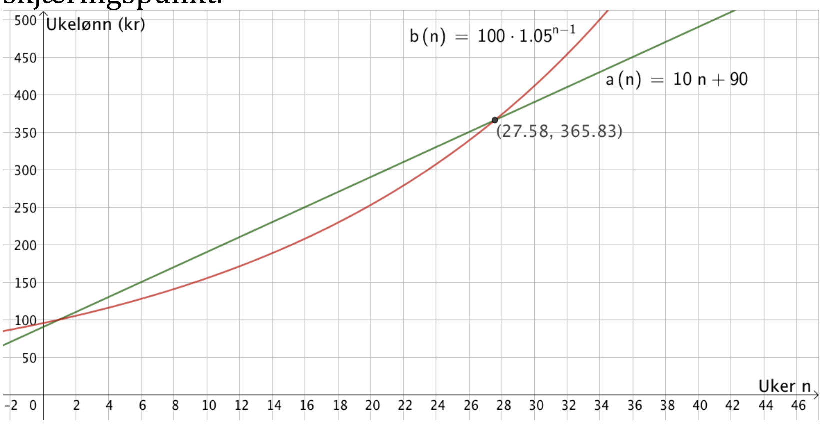
b) En eksplisitt formel for ukelønnen i uke n ved tilbud 1 er

$$a_n = 100 + (n-1)\cdot 10 = 100 + 10n - 10 = 10n + 90$$

En eksplisitt formel for ukelønnen i uke n ved tilbud 2 er

$$b_n = 100 \cdot 1{,}05^{n-1}$$

Tegner grafene til $a(n) = 10n + 90$ og $b(n) = 100 \cdot 1{,}05^{n-1}$ og finner skjæringspunkt.



Det tar 28 uker før tilbud 2 vil gi mer ukelønn enn tilbud 1.

c) Denne oppgaven kan løses ved hjelp av regneark, hvor man summerer opp ukelønnen uke for uke i egne kolonner for de to tilbudene. Da må man utvide helt til summen for tilbud 2 passerer summen for tilbud A. Det kan imidlertid bli et veldig stort regneark, med unødvendig mye info, all den tid man bare er interessert i når den ene summen blir større enn den andre.
Jeg velger derfor her å lage et program som gjør jobben.

```python
#Definerer funksjonene a og b
def a(n):
    return 10*n+90

def b(n):
    return 100*1.05**(n-1)

#Lager to lister hvor ukelønnen uke for uke legges til etter hvert som ukene går
L_a = []
L_b = []

n = 0
while sum(L_b)<=sum(L_a):     #Løkken kjører så lenge summen i tilbud 2 er lavere enn, eller lik, summen i tilbud 1
    n = n+1
    L_a.append(a(n))
    L_b.append(b(n))

print("uke","Sum tilbud 1","Sum tilbud 2",sep = "\t") #sep = "\t" gjør slik at teksten får én "tabulator-avstand"
print(n,sum(L_a),"    ",round(sum(L_b),2),sep = "\t") #Legger inn "tom tekst" for at tallene passer greit med overskriftene
```

```
uke	Sum tilbud 1	Sum tilbud 2
39	11310		11409.5
```

<u>Det tar 39 uker før tilbud 2 til sammen vil gi mer lønn enn tilbud 1</u>

Oppgave 5

a)

```python
import numpy as np

N = 20      #Antall simuleringer
A = []      #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole A
B = []      #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole B
C = []      #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole C


for i in range(N):              #Løkke som kjører N ganger
                                   #Nummererer skolene, slik at skole A er 0, skole B er 2 og skole C er 2
    skole = np.random.randint(3)   #Trekker ut en tilfeldig skole

    if skole == 0:
        karakter = np.random.normal(3.8,1.2)
        A.append(karakter)
    elif skole == 1:
        karakter = np.random.normal(3.4,1.4)
        B.append(karakter)
    else:
        karakter = np.random.normal(4.1,1.1)
        C.append(karakter)

Gjennomsnitt = (sum(A)+sum(B)+sum(C))/N     #Regner ut gjennomsnittet av de estimerte karakterene

print("Simuleringen gir gjennomsnittskarakter",round(Gjennomsnitt,1))
```

```
Simuleringen gir gjennomsnittskarakter 3.7
```

NB! Her vil jo resultatet stort sett variere fra gang når man kjører programmet, så gjennomsnittskarakter på 3,7 er jo ikke et fasitsvar, men resultatet av én simulering.

b)

```python
import numpy as np

N = 10000     #Antall simuleringer
H = []     #Liste som fylles opp av de gjennomsnittskarakterene som er høyere enn 4

for j in range(N):   #Antall simuleringer
    A = []     #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole A
    B = []     #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole B
    C = []     #Liste med estimerte karakterer til elever som blir trukket fra skole C

    for i in range(20):                 #Løkke som kjører 20 ganger, altså trekker 20 elever
                                         #Nummererer skolene, slik at skole A er 0, skole B er 2 og skole C er 2
        skole = np.random.randint(3)    #Trekker ut en tilfeldig skole

        if skole == 0:
            karakter = np.random.normal(3.8,1.2)
            A.append(karakter)
        elif skole == 1:
            karakter = np.random.normal(3.4,1.4)
            B.append(karakter)
        else:
            karakter = np.random.normal(4.1,1.1)
            C.append(karakter)

    Gjennomsnitt = (sum(A)+sum(B)+sum(C))/20     #Regner ut gjennomsnittet av de estimerte karakterene

    if Gjennomsnitt > 4:            #I de tilfellene gjennomsnittet estimeres til over 4, legges dette til i listen H
        H.append(Gjennomsnitt)

#Antall elementer i listen H vil være antallet ganger gjennomsnittet ble estimert til over 4 i løpet av N simuleringer
#Når antallet simuleringer blir stort, vil andelen simuleringer som ga over 4 i i snitt også være et estimat for
#sannsynligheten for at snittet var høyere enn 4.

print("Estimert sannsynlighet for at de 20 elevenes karaktersnitt er over 4 er",round((len(H)/N)*100,1),"%")
```

```
Estimert sannsynlighet for at de 20 elevenes karaktersnitt er over 4 er 20.4 %
```

Ved å kjøre en simulering der 20 elever trekkes ut 10000 ganger, ble sannsynligheten for at karaktersnittet til disse 20 elevene er høyere enn 4 estimert til 20,4%.