Utdanningsdirektoratet

Løsningsforslag med kommentarer til Eksempelsett

Høsten 2022

REA3058 Matematikk R2

Del 1

Oppgave 1
Regn ut integralene

a) $\displaystyle\int_0^1 (4x^2+3)\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int 4x\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

Løsning:

a) $\displaystyle\int_0^1 (4x^2+3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^3+3x\right]_0^1 = \frac{4}{3}+3 = \frac{13}{3}$

b) Bruker variabelskiftet $u = x^2+2$. Da er $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$ og

$$\int 4x\sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x = \int 2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u = 2\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{4}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2+2}+C$$

Merk at svaret i oppgave b) kan uttrykkes på flere måter. Svaret $\dfrac{4}{3}(x^2+2)^{\frac{3}{2}}+C$ godtas selvsagt også.

Oppgave 2
Vektorene $\vec{u} = [1,2,-1]$ og $\vec{v} = [-1,1,-2]$ er gitt.

Om et plan α får du vite at $\alpha \parallel \vec{u}$ og $\alpha \parallel \vec{v}$ og punktet $P(2,0,1)$ ligger i α.

a) Vis at $\vec{n} = [-1,1,1]$ er en normalvektor til planet α.

b) Bestem en likning til planet α.

Løsning:

a) Vi kan løse oppgaven på to måter. Enten ved å bestemme $\vec{u}\times\vec{v}$ eller ved å vise at $\vec{n}\perp\vec{u}$ og $\vec{n}\perp\vec{n}$.

$$\vec{n}\cdot\vec{u} = [-1,1,1]\cdot[1,2,-1] = -1+2-1 = 0$$
$$\vec{n}\cdot\vec{v} = [-1,1,1]\cdot[-1,1,-2] = 1+1-2 = 0$$

Siden skalarproduktene er 0 må vektorene stå normalt på hverandre. Det vil si at $\vec{n}\perp\alpha$.

b) Likningen til α blir

$$-(x-2)+(y-0)+(z-1) = 0 \iff x-y-z = 1$$

Oppgave 3
Løs likningen

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2\,, \quad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Løsning:

Bruker at $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ og får

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = -2$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = -2$$
$$\Updownarrow$$
$$4\cos^2 x = 1$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ har løsningene $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$ og $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, der $n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ har løsningene $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$ og $x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$, der $n \in \mathbb{Z}$

Vi får at $\mathscr{L} = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$

Oppgave 4
En aritmetisk rekke $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ har sum $s_n = 3n^2 + 4n$, $n \in \mathbb{N}$.

Bestem a_4.

Løsning:

Vi har at $a_4 = s_4 - s_3 = (3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4) - (3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3) = 64 - 39 = 25$

Her forventer vi at noen elever også vil bestemme a_1 og a_2 og på den måten finne differansen $d = 6$. Da kan de bruke formelen $a_4 = a_1 + 3 \cdot d$ for å bestemme a_4. Dette gir også full uttelling.

Oppgave 5
En uendelig geometrisk rekke $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots$ konvergerer mot 6.

Summen av de seks første leddene er $\frac{38}{9}$.

Bestem summen av de fire første leddene.

Løsning:

Ut fra opplysningene får vi følgende to likninger:

$$\frac{b_1}{1-k} = 6$$

$$b_1 \cdot \frac{1-k^6}{1-k} = \frac{38}{9}$$

Dette gir oss $1-k^6 = \frac{38}{9 \cdot 6}$. Det vil si at $k^6 = 1 - \frac{19}{27} = \frac{2^3}{3^3}$. Altså må $k^2 = \frac{2}{3}$.

Da har vi nok til å finne s_4:

$$\begin{aligned} s_4 = b_1 \cdot \frac{1-k^4}{1-k} &= \frac{b_1}{1-k} \cdot (1-(k^2)^2) \\ &= 6 \cdot \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{30}{9} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

En elev har skrevet følgende kode:

```python
1  from math import sin, pi     # Importerer sin og pi
2  
3  a = 0
4  b = pi
5  n = 1000
6  
7  def f(x):
8      return 2*sin(x+pi/6)     # Definerer funksjonen f
9  
10 I = 0
11 h = (b-a)/n
12 
13 for i in range(n)  # Lar i gjennomløpe tallene 0,1,...,n-1
14     I = I + f(a+i*h)*h
15 
16 print(round(I, 2))
```

a) Forklar hva eleven ønsker å regne ut.

b) Hva blir det eksakte svaret på oppgaven eleven ønsker å regne ut?

Løsning:

a) Eleven ønsker å regne ut $\int_0^{\pi} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x$ ved å summere arealet til 1000 rektangler i dette intervallet. Hvert intervall har bredde h, definert på linje 11. Høyden i rektanglene er $f(a + i \cdot h)$, der $i \in \{0, 1, \ldots, 999\}$. Det er for-løkken som legger til alle disse arealene til variabelen I. På linje 16 blir svaret printet ut med to desimaler.

b) Vi regner ut integralet.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\,\mathrm{d}x &= 2 \cdot \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\pi} \\
&= 2 \cdot \left(-\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Oppgave 7

a) Bruk derivasjon til å vise at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{1-x} + C_1$$

b) Bruk variabelskiftet $u = 1-x$ til å vise at

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x} + C_2$$

c) Forklar hvordan de to formlene kan begge være sanne samtidig.

Løsning:

a) $\left(\frac{x}{1-x} + C_1\right)' = \frac{1\cdot(1-x) - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} + 0 = \frac{1}{(1-x)^2}$. Dette viser at $\frac{x}{1-x}$ er en antiderivert til $\frac{1}{(1-x)^2}$.

b) Dersom $u = 1-x$, så er $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$. Vi får:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = -\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = u^{-1} + C_2 = \frac{1}{1-x} + C_2$$

c) De to formlene er begge sanne. Den eneste forskjellen er at $C_1 = 1 + C_2$:

$$\frac{x}{1-x} + C_1 = \frac{x}{1-x} + 1 + C_2 = \frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{1-x} + C_2 = \frac{x+1-x}{1-x} + C_2 = \frac{1}{1-x} + C_2$$

Del 2

Ut fra de tilbakemeldingene til settet, virker det som at arbeidsmengden på del 2 er for stor.

Oppgave 1
Tabellen nedenfor viser hvor stor del av månen som var synlig ved midnatt for noen utvalgte døgn på et bestemt sted i et bestemt år.

Døgn nr.	1	2	3	4	5	10	15	20
Synlig del	0,25	0,18	0,11	0,06	0,02	0,11	0,57	0,99

Døgn nr.	25	30	35	40	45	55	60	65
Synlig del	0,80	0,32	0,02	0,14	0,64	0,77	0,31	0,01

Her er x antall døgn etter nyttår.

a) Lag en periodisk funksjon f som er en god modell for dataene ovenfor.

Vi sier det er fullmåne når den synlige delen av månen er størst mulig.

b) Hvor lang tid går det mellom hver gang det er fullmåne ifølge modellen f?

c) Hvilke døgn var minst halve månen synlig ved midnatt i januar dette året?

Oppgaven kan løses med GeoGebra. Her velger vi å løse den ved å bruke Python. Dette er selvsagt valgfritt for elevene.

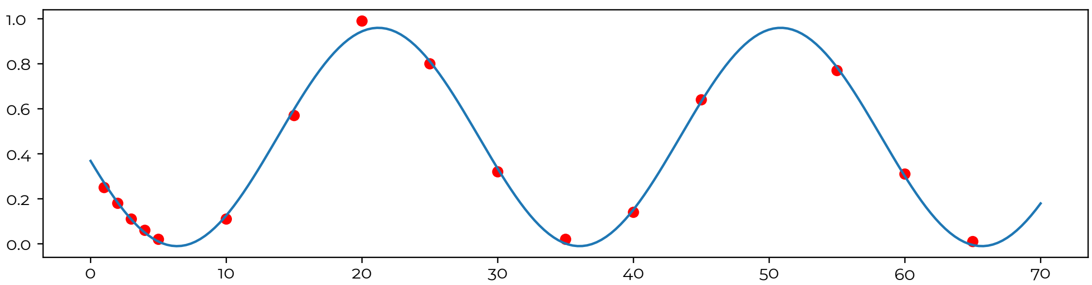
Løsning:

a) Fører tallene inn i to lister og bruker scipy.optimize sin curve_fit. Måtte prøve meg litt fram med startverdiene (po).

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

Døgn = [1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20,
        25, 30, 35, 40, 45, 55, 60, 65]
Synlig = [0.25,0.18,0.11,0.06,0.02,0.11,0.57,0.99,
          0.80,0.32,0.02,0.14,0.64,0.77,0.31,0.01]

# Lager generell modell:
def f(x, a, c, r, d):
    return a*np.sin(c*x+r)+d
```

```python

L = curve_fit(f, Døgn, Synlig, p0=[1, 0.1, 0, 0.4])[0]
# Plotter modellen:
X = np.linspace(0, 70, 200)
plt.plot(X, f(X, *L))
# Plotter de observerte punkta:
plt.scatter(Døgn, Synlig, color="r")
plt.show()
```

Vi får følgende grafisk framstilling av dataene:



Vi ser modellen passer bra. Her er

L = [0.48511025, 0.21189355, -2.9206585 , 0.4747518]

Det vil si at $f(x) = 0{,}485\sin(0{,}212x - 2{,}92) + 0{,}475$.

Merk at denne modellen ikke stemmer helt med virkeligheten. Vi vet jo at det er fullmåne ca. 1 gang i måneden. Men her er det største utslaget i modellen vår $0{,}485 + 0{,}475 = 0{,}96$.

b) Det går en periode mellom hver gang det er fullmåne. Det vil si

$$P = \frac{2\pi}{0{,}212} = 29{,}7$$

Det vil si ca 30 dager.

c) Vi løser likningen $f(x) = 0{,}5$. Gjør dette med Python:

```python
# Lager F (med de rette tallen fra modellen):
def F(x):
    return f(x, *L)

for dag in range(1, 32):
    if F(dag) >0.5:
        print(dag, end=", ")
```

Resultatet blir tallene 15, 16, ..., 28.

Det vil si at minst halve månen var ifølge modellen synlig ved midnatt fra og med døgn 15 til og med døgn 28.

Oppgave 2
En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$S(x) = \cos x + 2\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos x + \cdots$$

a) Beste området i intervallet $[-2\pi, 2\pi]$ hvor rekken konvergerer.

b) Avgjør for hvilke verdier av b likningen

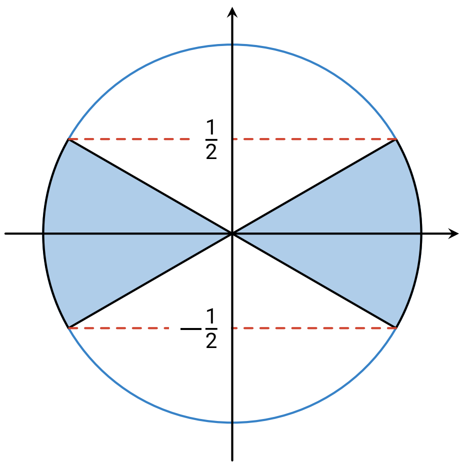
$$S(x) = b$$

har én eller flere løsninger i intervallet $[-\pi, \pi]$.

Løsning:

a) $k(x) = 2\sin x$. Vi har konvergens hvis og bare hvis $-1 < 2\sin x < 1$. Det vil si når $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Det vil si at x må være mellom $-\frac{\pi}{6}$ og $\frac{\pi}{6}$ eller mellom $\frac{5\pi}{6}$ og $-\frac{7\pi}{6}$ i ett omløp. Altså er det søkte området

$$D = \left[-2\pi, -\frac{11\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\rangle \cup \left\langle \frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$$



Vi kunne også løst oppgaven ved å bruke Sympy. Denne finner løsninger i første omløp. Da er det bare å legge til andre omløp og få samme løsning som over. Vi forventer ikke på dette tidspunkt at elevene kan bruke Sympy, men tar med en slik løsning for å vise også denne muligheten. Det kan tenkes at noen elever vil bruke Sympy.

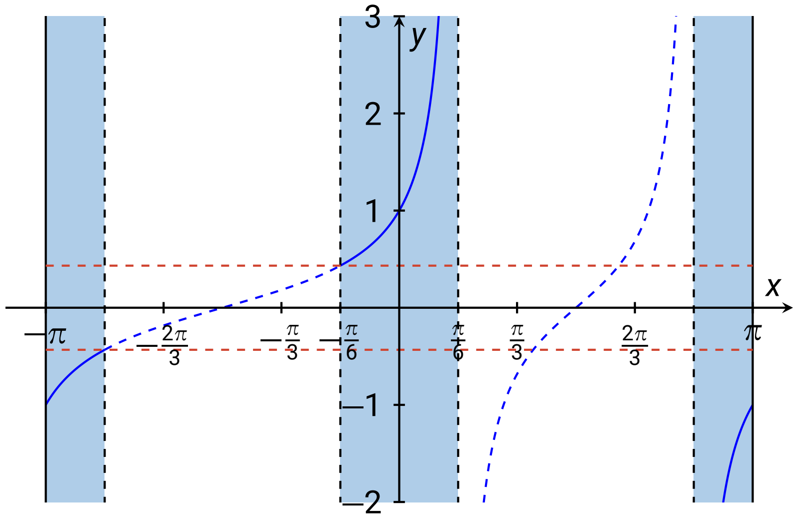
```python
import sympy as sp
x = sp.symbols("x")
R = sp.S.Reals
L = sp.solveset(4*(sp.sin(x))**2<1, domain=R)
```

Resultatet blir $L = \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$. Vi får konvergensområdet i $[-2\pi, 2\pi]$ ved å legge til tilsvarende «negative» verdier.

b) Vi har at

$$S(x) = \frac{\cos x}{1 - 2\sin x}$$

Grafen til S, når $x \in [-\pi, \pi]$ ser slik ut:



Vi ser at grafen er voksende og at den har to asymptoter i intervallet $[-\pi, \pi]$, nemlig $x = \frac{\pi}{6}$ og $x = \frac{5\pi}{6}$. Vi ser også at det er et hull i verdimengden dersom vi holder oss til de intervallene der rekken er konvergent.

Vi ser at b kan ikke ligge mellom

$$\frac{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{1 - 2\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

og

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Altså har likningen $S(x) = b$ en løsning når $b \in \left\langle -\leftarrow, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{3}}{4}, \rightarrow \right\rangle$.

Oppgave 3

En kuleflate K har sentrum i origo og radius 3.

Punktet $(-1, 2, 2)$ er et eksempel på et punkt på K som har heltallige koordinater.

Lag et program som finner antall punkt på K som har heltallige koordinater.

Løsning:

Jeg sjekker alle punkt med heltallskoordinater fra og med -3 til og med 3 om de ligger på kulefalten. Ingen punkt på kuleflaten kan ha koordinater som er større i absoluttverdi enn radiusen til kulen.

```python
K = range(-3, 4) # Heltallene jeg vil bruke
n = 0
for x in K:
    for y in K:
        for z in K:
            if x**2 + y**2 +z**2 == 3**2:
                n = n + 1
                print((x, y, z), end=",")

print()

print("Antall punkt er", n)
```

Jeg laget i tillegg en teller for å finne ut hvor mange slike punkt det er.

Resultatet blir:

(-3, 0, 0),(-2, -2, -1),(-2, -2, 1),(-2, -1, -2),(-2, -1, 2),(-2, 1, -2),
(-2,1, 2),(-2, 2, -1),(-2, 2, 1),(-1, -2, -2),(-1, -2, 2),(-1, 2, -2),
(-1, 2,2),(0, -3, 0),(0, 0, -3),(0, 0, 3),(0, 3, 0),(1, -2, -2),(1, -2, 2),
(1, 2,-2),(1, 2, 2),(2, -2, -1),(2, -2, 1),(2, -1, -2),(2, -1, 2),(2, 1, -2),
(2, 1,2),(2, 2, -1),(2, 2, 1),(3, 0, 0)

Antall punkt er 30.

Oppgave 4

Posisjonen til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [\cos t, 3\sin t, 2 - \cos 2t] \ , \quad t \in [0, 2\pi\rangle$$

a) Bestem banefarten til partikkelen når $t = \pi$.

Et plan α er gitt ved

$$3x + y + 5z = d \ , \quad d \in \mathbb{R}$$

Det finnes fire verdier for d som gjør at posisjonskurven til partikkelen tangerer α. Hver av disse fire verdiene gir oss et punkt på kurven.

b) Forklar hvorfor $\vec{r}\,'(t) \perp [3, 1, 5]$ når t svarer til et av de fire punktene.

c) Bestem koordinatene til disse fire punktene.

a) $\vec{v}(t) = [-\sin t, 3\cos t, 2\sin 2t]$. Vi får at $\vec{v}(\pi) = [0, -3, 0]$.

Det vil si at banefarten er 3 når $t = \pi$.

b) Vi har at $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ er parallell med tangenten til posisjonskurven. Det vil si at når kurven tangerer α, så må $\vec{r}\,'(t)$ være parallell med α. Men da må fartsvektoren stå normalt på normalvektorene til planet. En slik normalvektor er $[3, 1, 5]$. Det vil si at $\vec{r}\,'(t) \perp [3, 1, 5]$.

c) Vi må først bestemme t verdiene. Jeg bruker resultatet i oppgave b) til å bestemme disse:

$$\begin{gathered} \vec{r}\,'(t) \perp [3,1,5] \\ \Updownarrow \\ [-\sin t, 3\cos t, 2\sin 2t] \cdot [3,1,5] = 0 \\ \Updownarrow \\ -3\sin t + 3\cos t + 10\sin 2t = 0 \end{gathered}$$

Jeg løser likningen i GeoGebra:

1	$L := \text{Løsninger}(-3\ \sin(t) + 3\ \cos(t) + 10\ \sin(2\ t)\ =\ 0)$
	$\rightarrow$ $L := \{-3.011, -1.393, -0.178, 1.44\}$
2	$r(t) := (\cos(t), 3\ \sin(t), 2 - \cos(t))$
	$\rightarrow$ $r(t) := (\cos(t), 3\ \sin(t), 2 - \cos(t))$
3	$\{r(\text{Element}(L,1)), r(\text{Element}(L,2)), r(\text{Element}(L,3)), r(\text{Element}(L,4))\}$
	$\approx$ $\{(-0.991, -0.391, 2.991), (0.177, -2.953, 1.823), (0.984, -0.531, 1.016), (0.13, 2.974, 1.87)\}$

Vi ser koordinatene til de fire punktene på rad 3 i GeoGebra CAS over.

Vi kunne også løst oppgaven ved å bruke Python. Dette er en løsningsmetode som vi ikke forventer at elevene kan på dette tidspunkt. Vi tar likevel med et eksempel på en slik løsning:

```python
from sympy import symbols, sin, cos, solve
t = symbols("t")

L = solve(-3*sin(t)+3*cos(t)+20*sin(t)*cos(t),t)

def r(t):
    x = cos(t).evalf(3)
    y = 3*sin(t).evalf(3)
    z = 2-cos(2*t).evalf(3)
    return (x, y, z)

for t in L:
    print(r(t))
```

Resultatet blir

(0.984, -0.531, 1.06)
(0.177, -2.95, 2.94)
(-0.991, -0.391, 1.03)
(0.130, 2.97, 2.97)

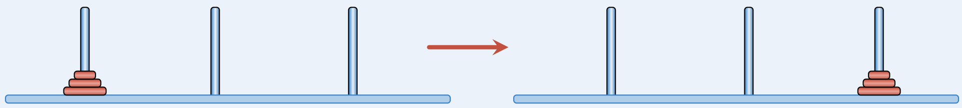
Oppgave 5
Spillet «Hanois tårn» består av tre pinner og en mengde disker med ulik radius som skal tres på pinnene.

Når spillet starter, skal alle diskene være plassert på samme pinne. Ingen av diskene skal ha en større disk liggende oppå seg.

Målet er å flytte alle diskene over på én av de to ledige pinnene. Det er bare lov å flytte én disk av gangen. Diskene som ikke flyttes, må ligge på en pinne. Det er aldri lov å plassere en større disk oppå en mindre disk.

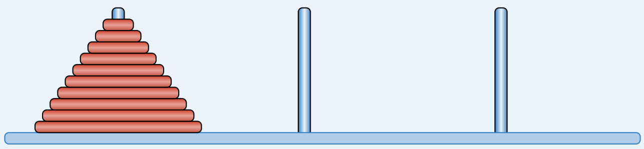
Det minste antallet forflytninger du må gjøre ved å forflytte n disker kaller vi $F(n)$.

a) Bestem $F(3)$



Det er en rekursive sammenhengen mellom $F(n)$ og $F(n-1)$.

b) Bestem denne reursive sammenhengen. Bruk denne til å bestemme $F(10)$.



Det finnes også en eksplisitt formel for F.

c) Undersøk og finn denne formelen.

d) Bevis formelen ved å bruke induksjon på antall disker n.

Løsning:

a) Jeg ser at jeg først må flytte disk 1 på stolpe 3, så tar jeg disk 2 på stolpe 2, flytter disk 1 over disk 2, så disk 3 på stolpe 3, disk 1 over på stople 1, så disk 2 på stolpe 3 (over disk3) og til slutt disk 1 over disk 2. Til sammen 7 flytt. Altså er $F(3) = 7$.

b) Etter å ha utforsket litt hvordan jeg flytter, ser jeg at jeg først kan flytte de $n-1$ øverste diskene over på stople 2. Det er $F(n-1)$ flytt. Så flytter jeg disk

n over på stolpe 3 og til slutt de $n-1$ diskene over disk n på stolpe 3. Vi får med andre ord:

$$\begin{aligned} F(n) &= F(n-1)+1+F(n-1) \\ &= 2F(n-1)+1 \end{aligned}$$

For å finne $F(10)$ lager jeg et lite program:

```
F = 0   # vi trenger 0 flytt dersom n = 0
for i in range(10):
    F = 2*F+1
print(F)
```

Vi får at $F(10) = 1023$.

c) Jeg endrer litt på programmet, slik at jeg ser $F(n)$ for de ulike verdiene av n.

```
F = 0   # vi trenger 0 flytt om n = 0
for i in range(10):
    F = 2*F+1
    print(F, end=",")

```

Resultatet blir tallene 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023. Det ser ut til at

$$F(n) = 2^n - 1$$

d) Viser formelen $F(n) = 2^n - 1$ ved å bruke induksjon på n.

1) Vi ser at formelen stemmer når $n = 1$, siden $F(1) = 2^1 - 1 = 1$ og vi behøver å ta ett flytt om det er én disk.

2) Anta $F(k) = 2^k - 1$ er sann. Jeg vil vise at da må nødvendigvis også formelen $F(k+1) = 2^{k+1} - 1$ være sann. Den rekursive sammenhengen gir meg

$$\begin{aligned} F(k+1) &= 2 \cdot F(k) + 1 \\ &= 2 \cdot (2^k - 1) + 1 \qquad \text{(ved induksjonshypotesen)} \\ &= 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

Vi ser at vi får den rette formelen.

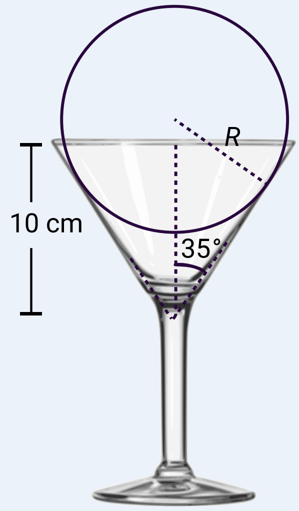
Vi har med andre ord vist at formelen $F(n) = 2^n - 1$ er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Oppgave 6

Et glass er formet som en kjegle med høyde 10 cm. Høyden i kjeglen danner en vinkel på 35° med sideflaten i kjeglen. Glasset er fullt med vann. En kule med radius R blir senket sakte ned i glasset. Se figuren til høyre.

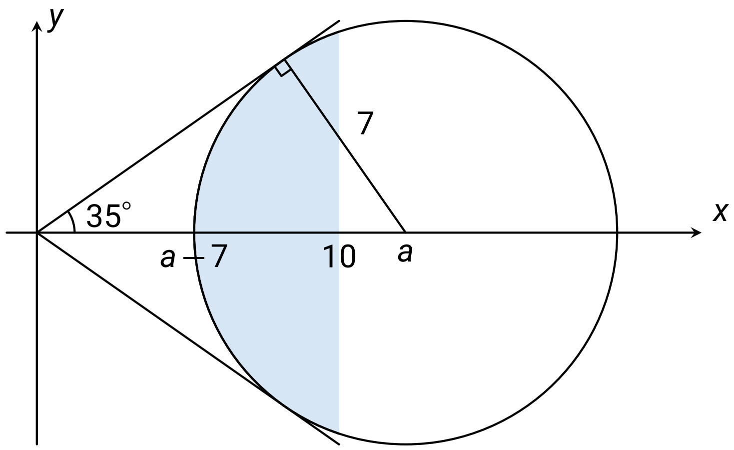
a) Bestem hvor mye vann som vil renne over dersom $R = 7\,\text{cm}$.

b) Bestem R slik at mest mulig vann renner ut av glasset.



Løsning:

a) Jeg roterer hele figuren 90 grader og må finne koordinatene til sentrum i sirkelen vi kan bruke til å få kuleflaten som et omdreiingslegeme.



Vi lar sirkelen ha sentrum i $(a, 0)$. Ut fra figuren ser vi at $a = \dfrac{7}{\sin 35^\circ}$. Dette gir oss at sirkelen er gitt ved likningen

$$y^2 + \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2 = 7^2 \iff y^2 = 49 - \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2$$

Det søkte volumet blir derfor

$$V = \pi \int_{a-7}^{10} \left(49 - \left(x - \frac{7}{\sin 35^\circ}\right)^2\right) \mathrm{d}x$$

Jeg regner dette i GeoGebra CAS:

$$a := \frac{7}{\sin(35^\circ)}$$

$$V := \pi \int_{a-7}^{10} 49 - (x-a)^2 \, dx$$

$$\approx \mathbf{V := 390.29}$$

Vi ser at 0,39 dL renner ut av glasset.

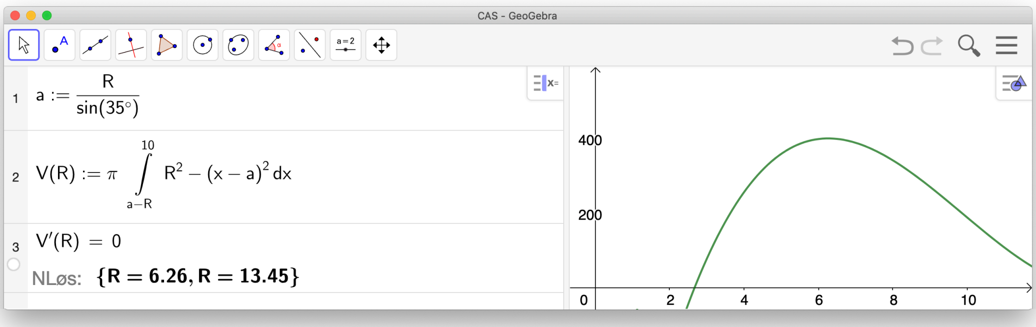
b) Vi får samme situasjon, men nå vil $a = \dfrac{R}{\sin(35^\circ)}$ og likningen for sirkelen er

$$y^2 = R^2 - (x-a)^2$$

Volumet av vannet som renner over blir da

$$V(R) = \pi \int_{a-R}^{10} \left(R^2 - (x-a)^2\right) dx$$

Løser også denne i GeoGebra CAS:



Vi ser at mest mulig vann vil renne ut av glasset dersom $R \approx 6{,}26$ cm. At det er denne verdien som gir mest vann ser vi av grafen.

Strengt att burde vi også ha sjekket tilfellet der hele kulen kommer under vann. Det vil si når $a + R < 10$. Dette er det samme som at $R < 3{,}645$. I dette tilfellet må vi regne ut

$$V(R) = \pi \int_{a-R}^{a+R} \left(R^2 - (x-a)^2\right) dx$$

Vi får at volumet av vannet som renner ut blir mindre i dette tilfellet. Vi forventer ikke at elevene går inn i en slik analyse av situasjonen. Ut fra selve situasjonen er det rimelig å anta at volumet blir mindre i dette tilfellet siden R blir så liten i slike tilfeller.

Utdanningsdirektoratet

udir.no