R1 Eksamen H2022 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

December 1, 2022

Figure 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (3 poeng)

a)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 \\
f'(x) &= 0 \Rightarrow x = 0 \\
f'(-1) &= 4 \cdot (-1)^3 = -4 < 0 \\
f'(1) &= 4 \cdot (1)^3 = 4 > 0
\end{aligned}
$$

Den deriverte av f er avtakende fra $(-\infty, 0]$ og voksende fra $[0, +\infty)$ og derfor f har ikke invers over hele definisjonsmengden.

b)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= e^{-(x-2)^2} \\
g'(x) &= e^{-(x-2)} \cdot \left(-(x-2)^2\right)_2' \\
&= -2(x-2)\, e^{-(x-2)^2} \\
g'(x) &= 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\
e^{-(x-1)^2} &> 0 \text{ for alle } x \\
x - 2 &> 0 \text{ for alle } x \in [2 \rightarrow) \\
&\Rightarrow g'(x) < 0 \text{ for alle } x \in [2, \rightarrow)
\end{aligned}
$$

Siden den deriverte av g er strengt avtagende i definisjonsmengden så g har invers i intervallet.

Oppgave 2 (2 poeng)

Metode 1:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h} &= \frac{4^2-4^2}{0}=\frac{0}{0} \quad \text{ubestemt form}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\left((4+h)^2-4\right)'}{h'} \quad \text{(L'Hopitals regel)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\,(4+h)\,.1}{1}=\frac{2\,(4+0)\cdot 1}{1}=8\end{aligned}$$

Metode 2:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{Definisjon av den deriverte i punktet } x=a\\ f(x) &= x^2\\ f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h}\\ f'(x) &= 2\cdot x\\ f'(4) &= 2\cdot 4=8\end{aligned}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h}=8$$

Oppgave 3 (2 poeng)

$$\begin{aligned} 3\sqrt{11} &= \sqrt{9}\cdot\sqrt{11}=\sqrt{9\cdot 11}=\sqrt{99}<\sqrt{100}=10\\ 10\cdot\lg(9) &< 10\cdot\lg(10)=10\cdot 1=10\\ 5\cdot\ln(9) &= 5\cdot ln\left(3^2\right)>5\cdot ln\left(e^2\right)=5\cdot 2\cdot 1n\,(e)=5\cdot 2\cdot 1=10\end{aligned}$$

så $3\sqrt{11}<10$ og $10\cdot\lg(9)<10$

Oppgave 4 (3 poeng)

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= [5-1, 9-1]=[4,8]\\ \overrightarrow{BP} &= [5-9, 9-7]=[-4,2]\\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP} &= 4\cdot(-4)+8\cdot 2=-16+16=0\Rightarrow \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}\Rightarrow \angle APB=90^\circ\end{aligned}$$

b)

Metode 1:

$$l\begin{cases}x=5+8t\\ y=9+6t\end{cases}\qquad \text{Parameterframstilling for linjen l}$$

$$Q\left(5+8t,9+6t\right)$$

$$\overrightarrow{AQ}=[5+8t-1,9+6t-1]=[4+8t,8+6t]$$

$$\overrightarrow{BQ}=[5+8t-9,9+6t-7]=[-4+8t,2+6t]$$

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$$

$$(4+8t)\cdot(-4+8t)+(8+6t)\left(2+6t\right)=0$$

$$-\left(4+8t\right)\left(4-8t\right)+16+48t+12t+36t^2=0$$

$$-\left(16-64t^2\right)+16+48t+12t+36t^2=0$$

$$-16+64t^2+16+48t+12t+36t^2=0$$

$$100t^2+60t=0$$

$$t\left(100t+60\right)=0$$

$$t=0\Rightarrow Q\left(5,9\right)=P$$

$$t=-\frac{60}{100}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}\Rightarrow Q\left(5+8\cdot(\frac{-3}{5}),9+6\cdot(-\frac{3}{5})\right)=Q\left(\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)=Q\left(0,2\,,5,4\right)$$

Metode 2 :

$$Q\left(x,y\right),P\left(5,9\right)$$
$$\overrightarrow{QP}=\left[5-x,9-y\right]$$
$$\overrightarrow{AQ}=\left[x-1,y-1\right]$$
$$\overrightarrow{BQ}=\left[x-9,y-7\right]$$
$$\overrightarrow{AB}=\left[9-1,7-1\right]=\left[8,6\right]$$
$$\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{QP}=k\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$\left[5-x,9-y\right]=\left[8k,6k\right]$$
$$\begin{cases}5-x=8k\Rightarrow k=\dfrac{5-x}{8}\\9-y=6k\Rightarrow 9-y=6\cdot\dfrac{5-x}{8}\end{cases}$$
$$9-y=3\cdot\frac{(5-x)}{4}$$
$$36-4y=15-3x$$
$$3x=4y-21\Rightarrow x=\frac{4}{3}y-7$$
$$\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$$
$$\left(x-1\right)\left(x-9\right)+\left(y-1\right)\left(y-7\right)=0$$
$$\left(\frac{4}{3}y-7-1\right)\left(\frac{4}{3}y-7-9\right)+\left(y-1\right)\left(y-7\right)=0$$
$$\left(\frac{4}{3}y-8\right)\left(\frac{4}{3}y-16\right)+\left(y-1\right)\left(y-7\right)=0$$
$$\frac{16}{9}y^2-\frac{64}{3}y-\frac{32}{3}y+128+y^2-7y-y+7=0$$
$$\frac{25}{9}y^2-40y+135=0$$
$$y^2-\frac{72}{5}y+\frac{243}{5}=0$$
$$\left(y-\frac{27}{5}\right)\left(y-9\right)=0$$
$$y=\frac{27}{5}\Rightarrow x=\frac{4}{3}\cdot\frac{27}{5}-7=\frac{36}{5}-7=\frac{1}{5}\Rightarrow Q(\frac{1}{5},\frac{27}{5})$$
$$y=9\Rightarrow x=\frac{4}{3}\cdot 9-7=12-7=5 \text{ det er det samme punktet P}$$

Oppgave 5 (3 poeng)

Marianne prøver å finne når den deriverte av f blir -3 så finner ligningen til tangenten som har stigning -3 og der $x \geq 1,5$.
I programmet:
Funksjonen blir definert først så den deriverte numerisk . Det velges en startverdi for x $a = 1.5$ og while-løkken kjøres så lenge den deriverte er mindre enn -3 . Etter while-løkken regnes det skjæring med y-aksen (b) så printes ut ligningen for tangenten.

Vi bruker algebraisk metode for å finne verdien av b framfor å følge programmet siden det blir mange kjøringer inni while-løkken.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{6x-3}{x-1} \\
f'(x) &= \frac{6\cdot(x-1)-(6x-3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{6x-6-6x+3}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \\
f'(x) &= -3 \\
-3 &= \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow -3(x-1)^2 = -3 \\
(x-1)^2 &= 1 \Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\
x-1 &= 1 \Rightarrow x = 2 \\
x-1 &= -1 \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Siden startverdien fra programmet er $a = 1,5$ så dropper vi løsningen $x = 0$

$$\begin{aligned}
x &= 2 \\
f(2) &= \frac{6\cdot 2-3}{2-1} = 9 \\
y &= ax+b \\
y &= f'(x)\cdot x+b \\
y &= -3x+b \\
9 &= -3\cdot 2+b \\
b &= 9+6 = 15 \\
y &= -3x+15
\end{aligned}$$

Vi tester det og får

```
In [3]: def f(x):
           return (6*x-3)/(x-1)     # Definerer funksjonen f(x) = (6x-3)/(x-1)

        h = 0.00001

        def Df(x):
            return (f(x+h)-f(x))/h

        a = 1.5                      # En startverdi
        while Df(a)< -3:
                a = a+0.001
        b =f(a)- Df(a)*a             # Regner ut konstant leddet

        print("y = -3x+", b)

        y = -3x+ 14.999940000478432
```

Figure 2

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (6 poeng)

a)

Vi setter punktene i regneark i Geogebra og lager vi liste med punkter så bruker jeg regresjon (RegLogist()) for finne funksjonen. Se skjermbilder nedenfor.

	A	B	C
1	År	År etter 1950	Produksjon (GWh)
2	1950	0	16924
3	1960	10	31121
4	1970	20	57606
5	1981	31	93397
6	1990	40	121848
7	2000	50	142816
8	2012	62	147716
9	2020	70	154197

Figure 3

l1 = {A, B, C, D, E, F, G, H}

→ {(0, 16924), (10, 31121), (20, 57606), (31, 93397), (40, 121848), (50, 142816), (62, 147716), (70, 154197)}

g(x) = RegLogist(l1)

$$\rightarrow \frac{157303.07}{1 + 9.64\, e^{-0.09x}}$$

Figure 4

Grafen til funksjonen $g(x)$ er vist nedenfor:

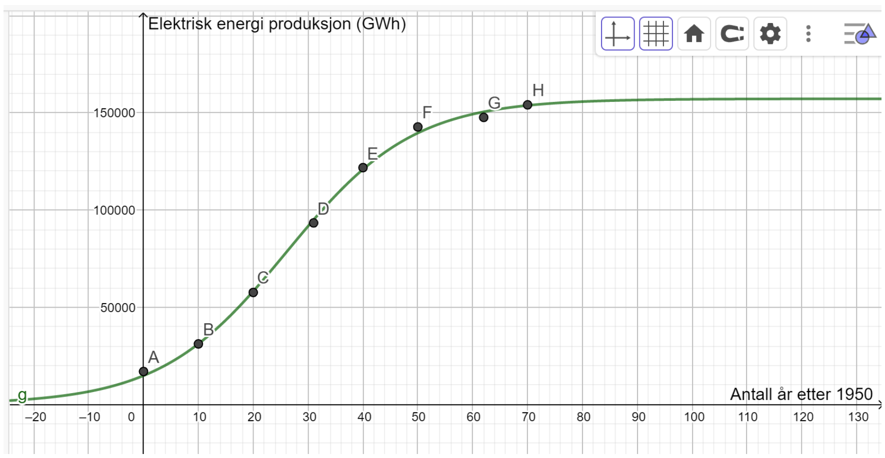

Figure 5

b)

Vi bruker Cas for finne vendepunkt til funksjonen $g(x)$ og punktet er $x = 26,13$ (rad 2 og 3). Vi bekrefter at det er vendepunkt ved å sjekke at den andrederiverte endrer fortegn før og etter punktet (rad 4 og 5). Produksjonen øker mest i vendepunktet som tilsvarer året 1976 (rad 6 og 7).

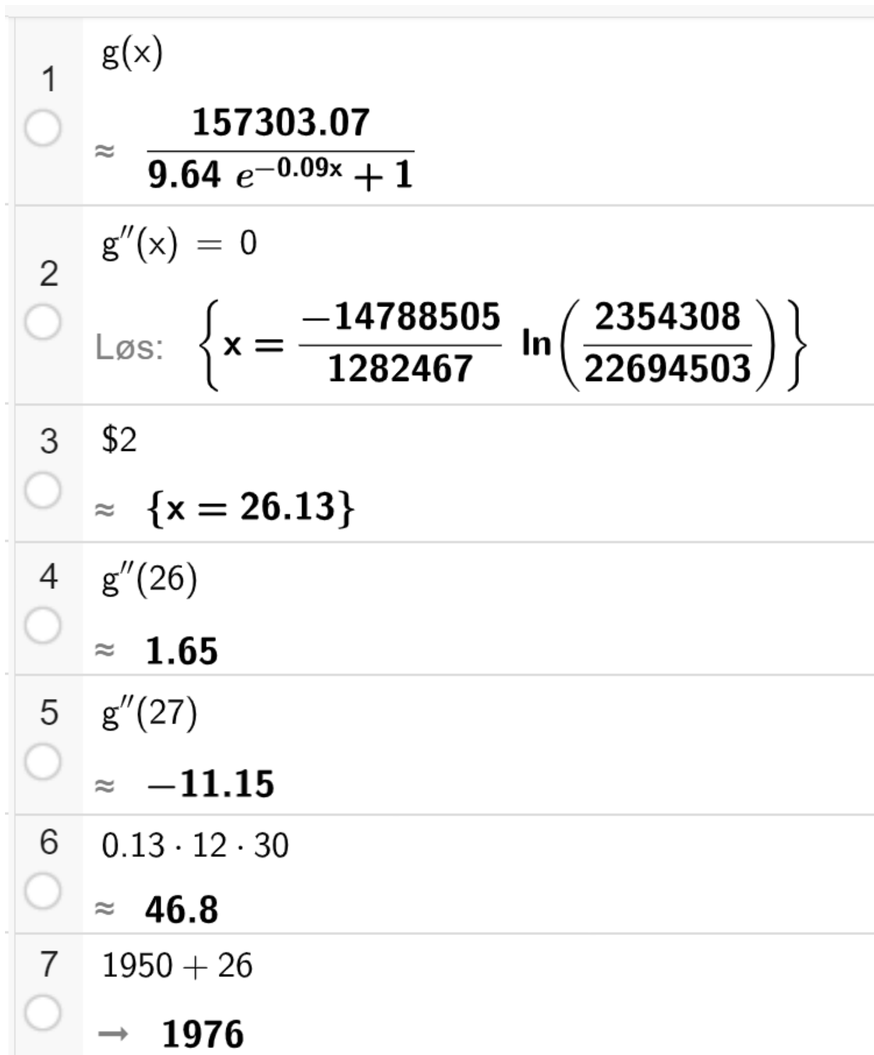

Figure 6

c)

Vi setter punktene i regneark i Geogebra og lager liste med punkter så bruker vi regresjon (RegLogist()) for finne funksjonen ($f(x)$). Vi ser fra grafen at logistisk modell passer godt med dataene.

Vi tegner grafene til produksjon og forbruk av elektrisk energi i samme koordinatsystem så finner vi skjæringspunktet mellom dem og ser at produksjonen er større enn forbruk når $x > 15,39$ som tilsvarer året 1965 og $0,39 \cdot 12 = 4,68$ måneder og $0,68 \cdot 30 = 20$ dager. Norge vil være selvforsynt etter 20 april 1965. Påstanden er vist algebraisk også.

Se skjermbilder nedenfor.

	A	B	C	D
1	År	År etter 1950	Produksjon (GWh)	Forbruk (GWh)
2	1950	0	16924	16924
3	1960	10	31121	31253
4	1970	20	57606	56770
5	1981	31	93397	88168
6	1990	40	121848	105941
7	2000	50	142816	123761
8	2012	62	147716	129900
9	2020	70	154197	133725

Figure 7

$l2 = \{I, J, K, L, M, N, O, P\}$

$\rightarrow \{(0, 16924), (10, 31253), (20, 56770), (31, 88168), (40, 105941), (50, 123761), (62, 129900), (70, 133725)\}$

$f(x) = \text{RegLogist}(l2)$

$\rightarrow \dfrac{136386.59}{1 + 7.44\, e^{-0.08x}}$

$Q = \text{Skjæring}(g, f, (15.39, 44462.78))$

$\rightarrow (15.39, 44462.78)$

$a = 1950 + 15$

$\rightarrow 1965$

$l3 = \text{Løs}(g(x) > f(x))$

$\rightarrow \{x > 15.39\}$

Figure 8

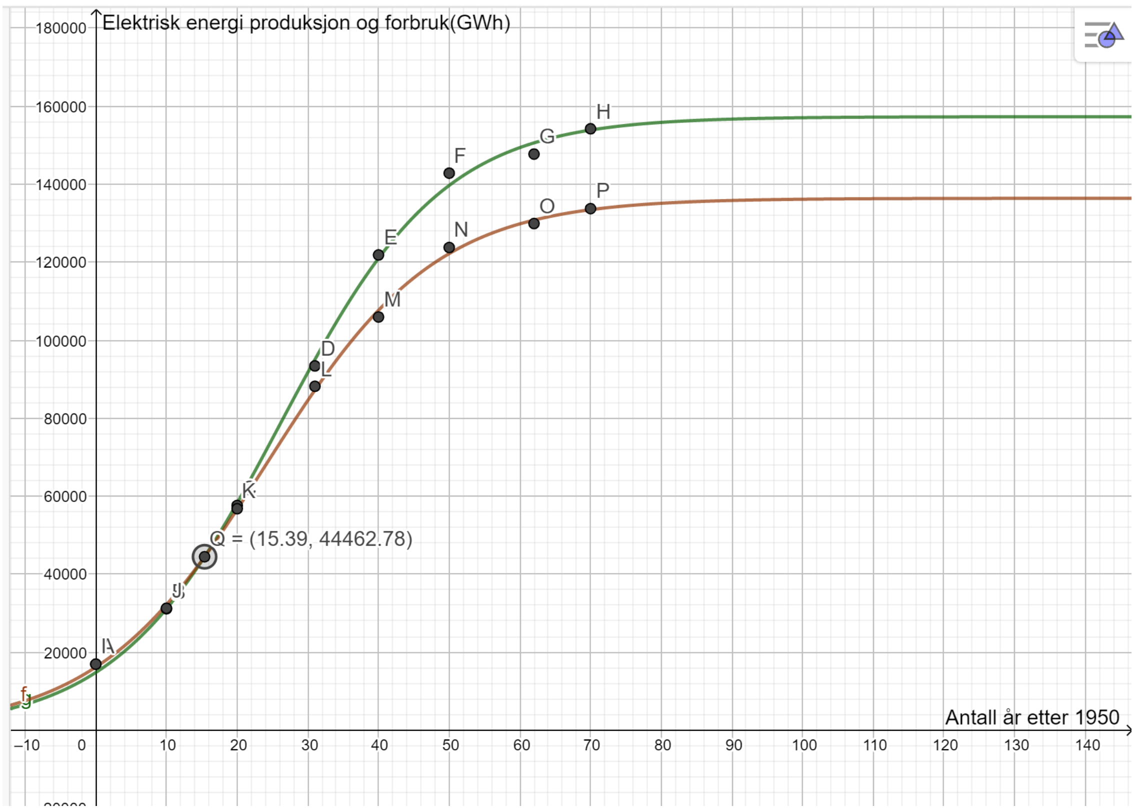

Figure 9

Vi kan bekrefte at Norge vi bli selvforsynt via grenseverdier også:

$b = \text{Grenseverdi}(g(x), \infty)$

$\rightarrow$ 157303.07

$c = \text{Grenseverdi}(f(x), \infty)$

$\rightarrow$ 136386.59

$d = b > c$

$\rightarrow$ true

Figure 10

Oppgave 2 (4 poeng)

a)

$Q(t)$ har invers siden den deriverte er større enn null i definisjonsmengden noe som betyr at funksjon er strenget voksende.

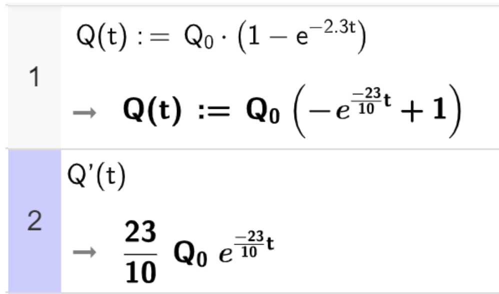

Figure 11

Vi vinner invers via Cas ved å sette funksjonen som en ligning og finne t som funksjon av Q:

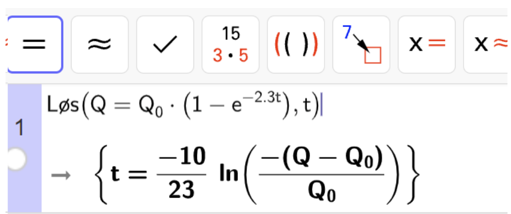

Figure 12

b)

Vi bruker Cas of finner ut at det vi ta omtrent 1 sekund før blitsen har fått 90% av den maksimale ladningen

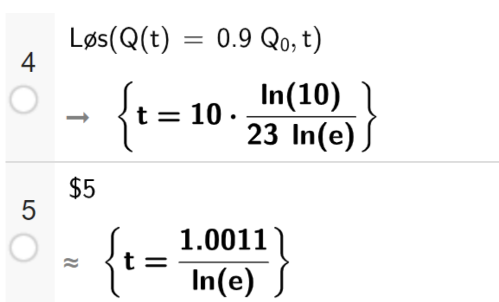

Figure 13

Oppgave 3 (7 poeng)

a)

Vi bruker Cas og ser at det finnes en verdi for parameteren t som gjør at koordinatorene til punktet C passer inn i ligningen til linjen .De kan bekreftes grafisk også.

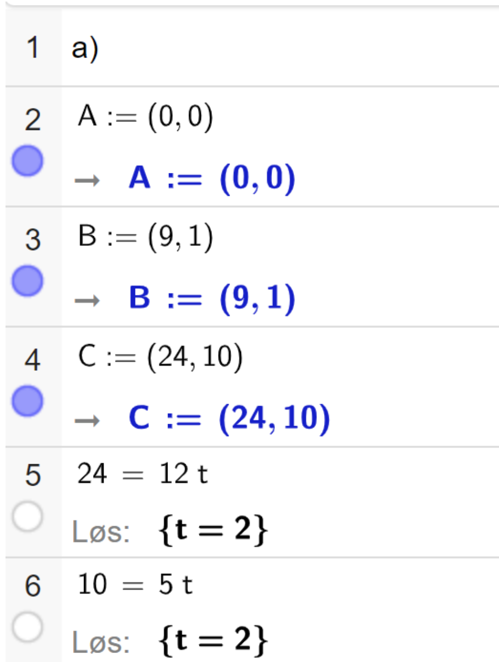

Figure 14

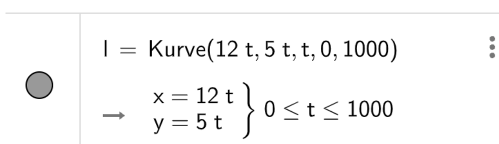

Figure 15

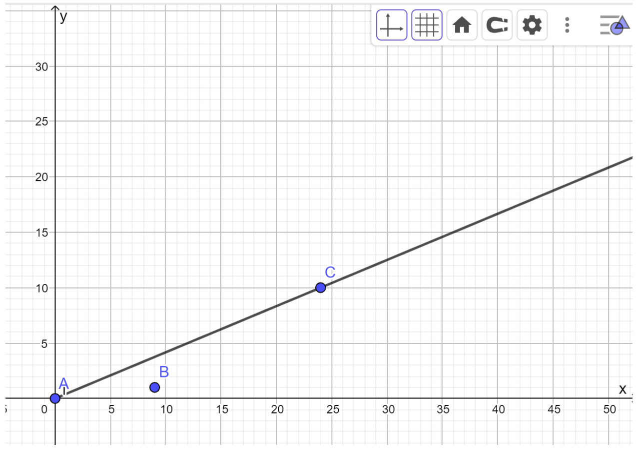

Figure 16

b)

Man kan finne vinkel via Cas ved å bruke kommando Vinkel(Vektor,Vektor) (rad 10) og siden vinkelen kommer ut i radianer så deler vi på grad symbolet for å få i grader.

Man kan finne vinkelen også ved å bruke skalarprodukt til de to vektorene som danner vinkelen (rad 11) så må man velge kun den positive verdien. Vinkelen blir $16,28°$

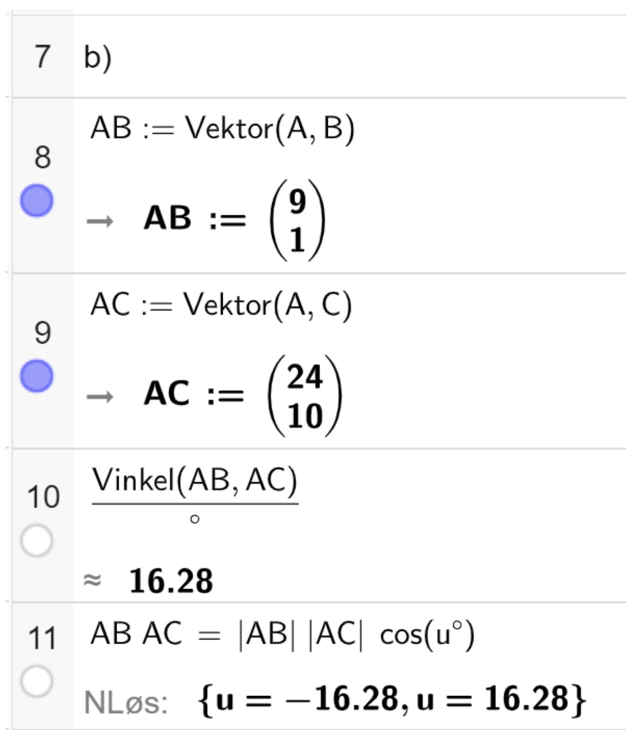

Figure 17

c)

Punktet D er på linjen l så koordinatene til D er som vist i rad 13. Vi finner vektorene som danner vinkelen så skalarprodukt for å finne parameteren t (rad 14,15,16,17). Vi får to verdier for parameteren t . $t = 0$ gir oss punktet A så den rette verdien blir $t = 0,556$ og koordinatene til punktet D blir $(6,672\ ,2,78)$ (rad 18)

12	c)
13	$D := (12\,t, 5\,t)$ $\approx\ \mathbf{D := (12\,t, 5\,t)}$
14	$DA := \text{Vektor}(D, A)$ $\rightarrow\ \mathbf{DA := \begin{pmatrix} -12\,t \\ -5\,t \end{pmatrix}}$
15	$DB := \text{Vektor}(D, B)$ $\rightarrow\ \mathbf{DB := \begin{pmatrix} 9 - 12\,t \\ 1 - 5\,t \end{pmatrix}}$
16	$DA\ DB = \lvert DA\rvert\ \lvert DB\rvert\ \cos(120°)$ Løs: $\mathbf{\left\{t = 0, t = \frac{-11\sqrt{3} + 113}{169}\right\}}$
17	$16 $\rightarrow\ \mathbf{\left\{t = 0, t = \frac{1}{169}\left(-11\sqrt{3} + 113\right)\right\}}$
18	$D_1 := (12 \cdot 0.556, 5 \cdot 0.556)$ $\approx\ \mathbf{D_1 := (6.672, 2.78)}$

Figure 18

d)

Punktet E er på linjen l så koordinatene til D er som vist i rad 20. Vi bruker areal setning med utgangspunkt i vektorene $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}$ for å finne parameteren t (rad 21,22,23). Vinkelen mellom de to vektorene er det samme som vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og linjen l siden A og E er på linjen l. Vi får to verdier for parameteren t (rad 23) og dermed to punkter (rad 24 og 25). Siden $t > 0$ så dropper vi den negative verdien og koordinatene til E er som vist i rad 24

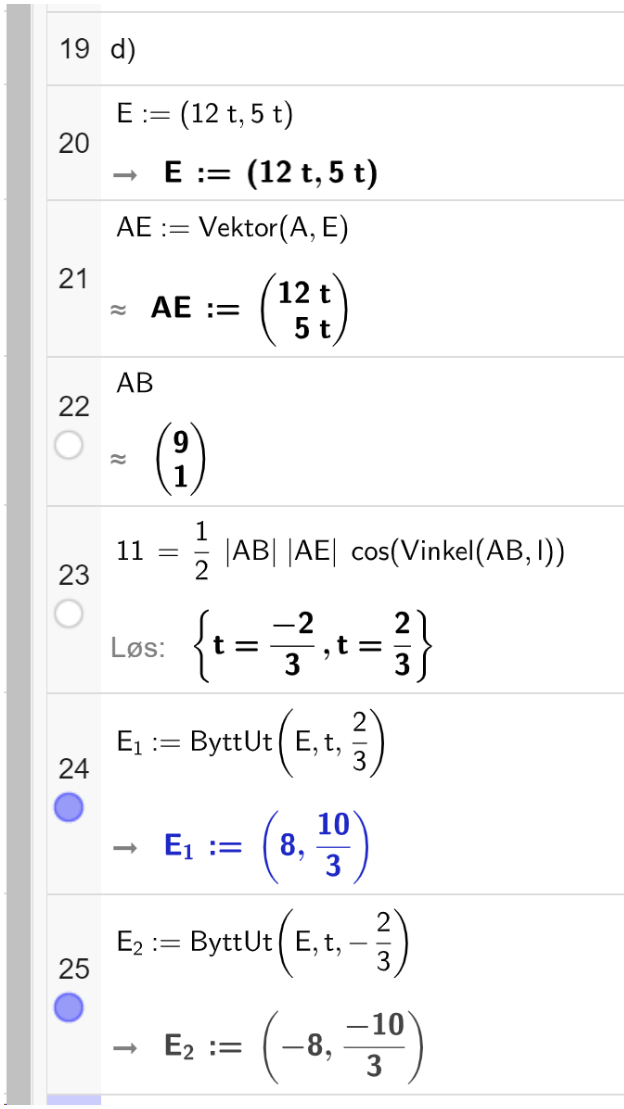

Figure 19

Grafiskframstilling av løsningene:

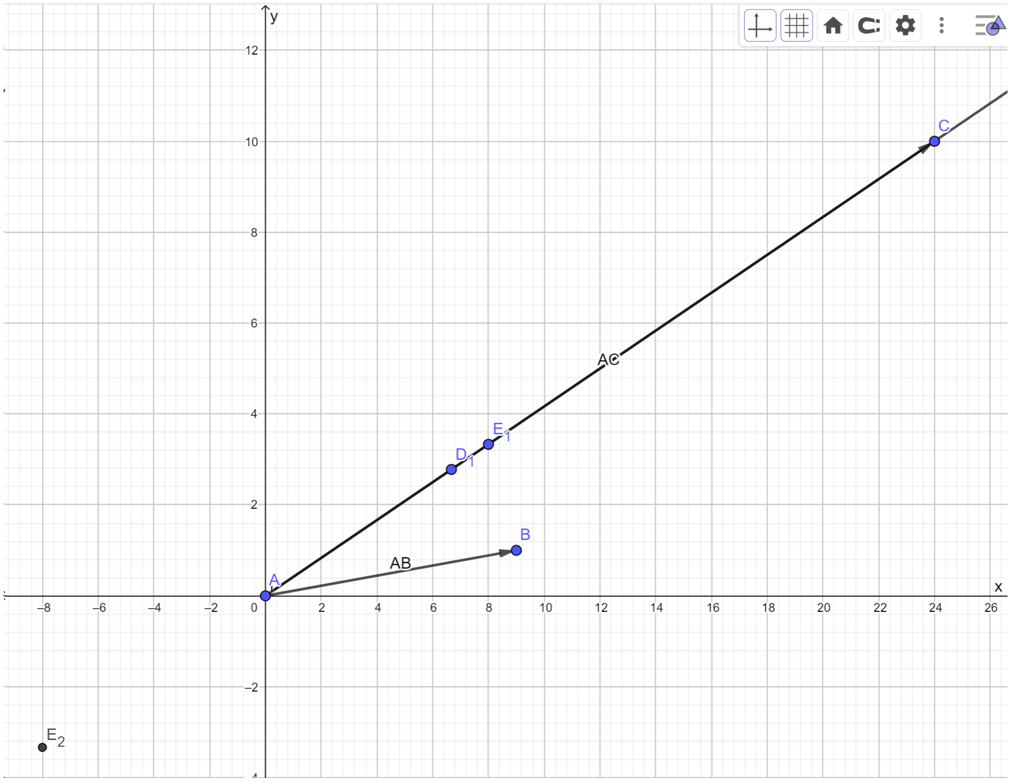

Figure 20

Oppgave 4 (3 poeng)

a)

Påstanden er feil

$$f\left(x\right)=x^2$$
$$f\left(2\right)=4$$
$$f\left(-2\right)=4$$
$$2\neq-2$$

b)

Påstanden er sann fordi ln(x) er voksende funksjon i intervallet $(0,\infty)$

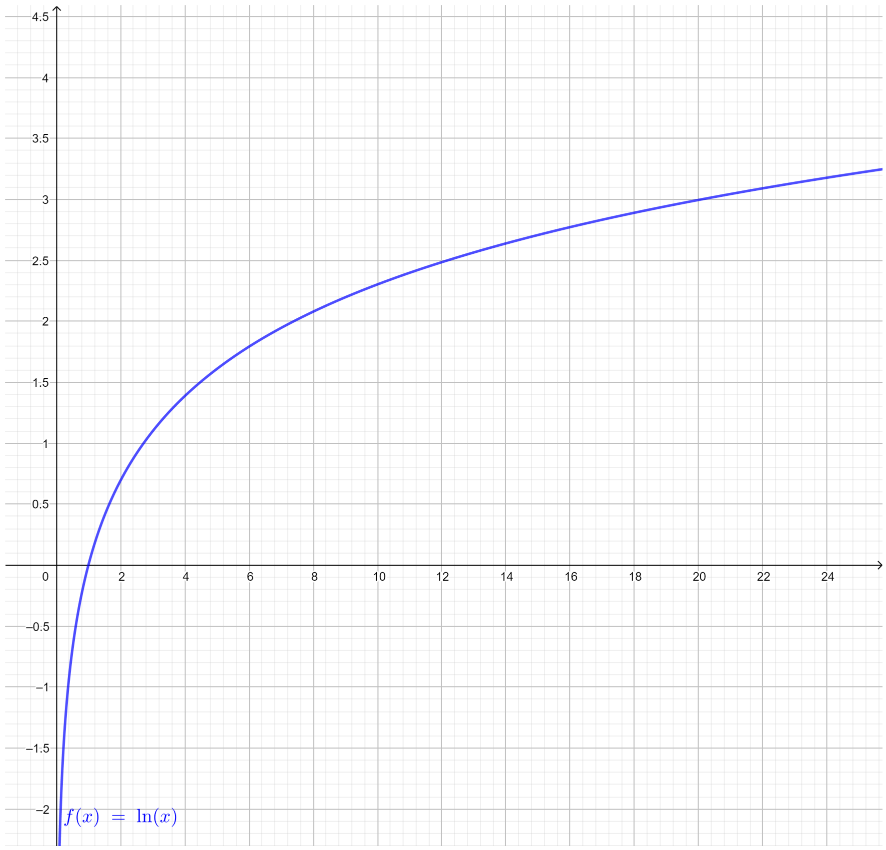

Figure 21

c)

Påstanden er sann

$$(ln\,(ax))' = \frac{1}{ax} \cdot (ax)' = \frac{1}{a \cdot x} \cdot a = \frac{1}{x} = (ln\,(x))'$$

Oppgave 5 (5 poeng)

a)

Vi bruker Cas . Vi finner tangenten i punktet $(a, f(a))$ ved bruk av kommando Tanget(punkt,funksjon) så skjæring med x-aksen (rad 4) og y-aksen rad (3) så finner vi arealet av trekanten OAB som funksjon av a (rad 5) . vi setter $a = \frac{1}{2}$ i funksjonen for areal og da blir arealet lik $0,781$.

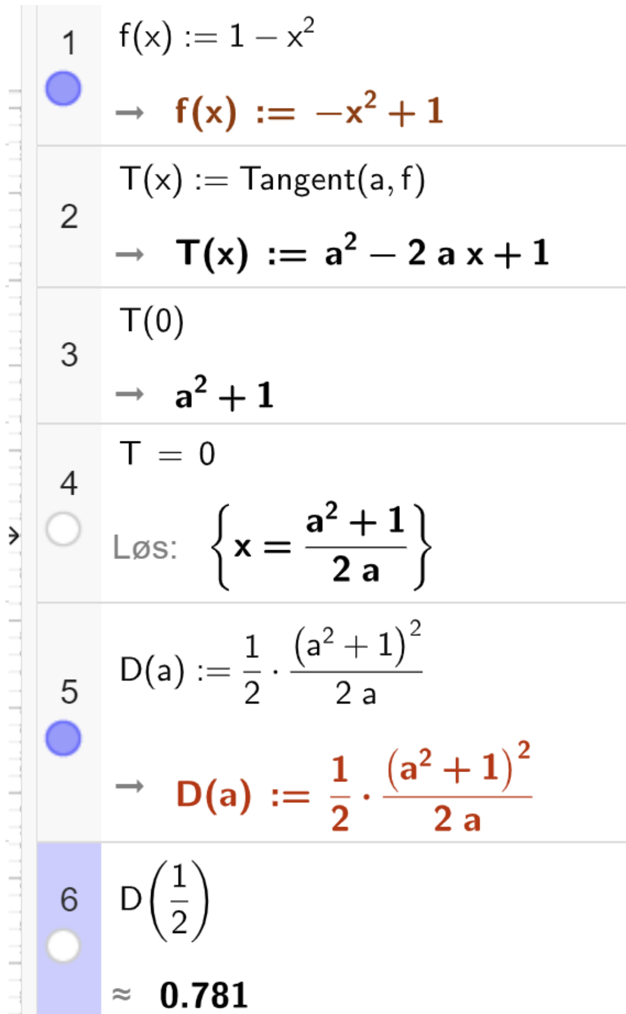

Figure 22

b)

Arealet er minst når den deriverte er null og den andrederiverte er positivt (bunnpunktet). Vi løser ligningen og velger kun den positive verdien av a siden $a \in (0, 1)$. Minste areal er $D = 0,77$.

7 b)

8 Derivert(D) $= 0$

Løs: $\left\{a = \frac{-\sqrt{3}}{3}, a = \frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

9 D(HøyreSide($8, 2))

$\approx$ **0.77**

10 D'

$\rightarrow$ $\mathbf{D'}$

11 $D''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\rightarrow$ $\mathbf{2\sqrt{3}}$

Figure 23

Vi bekrefter at arealet er minst ved å bruke andrederiverttest (rad 11).

Oppgave 6 (2 poeng)

Programmet er vist i figuren nedover:

```
In [4]: import numpy as np
x1,y1 = [float(num) for num in input('Skriv koordinatne til A separert med komma:').split(',')] # Ta to input fra brukeren
x2,y2=[float(num) for num in input('Skriv koordinatne til B separert med komma:').strip().split(',')]
x3,y3=[float(num) for num in input('Skriv koordinatne til C separert med komma:').strip().split(',')]
OA=np.array([x1-0,y1-0])  # Lage vektorene
OB=np.array([x2-0,y2-0])
OC=np.array([x3-0,y3-0])
print(OA,OB,OC)
OT=(1/3)*(OA+OB+OC) # Regne tyngdepunkt
print(f'Kordinatene til tyngdepunktet er {round(OT[0],2),round(OT[1])}')
```

```
Skriv koordinatne til A separert med komma:7,6
Skriv koordinatne til B separert med komma:4,3
Skriv koordinatne til C separert med komma:0,3
[7. 6.] [4. 3.] [0. 3.]
Kordinatene til tyngdepunktet er (3.67, 4)
```

Figure 24

Oppgave 7 (10 poeng)

a)

Vi bruker Cas og ser at $k < 2$. Merk at $k \neq 2$ fordi da nevneren blir null i de to løsningene (rad 3)

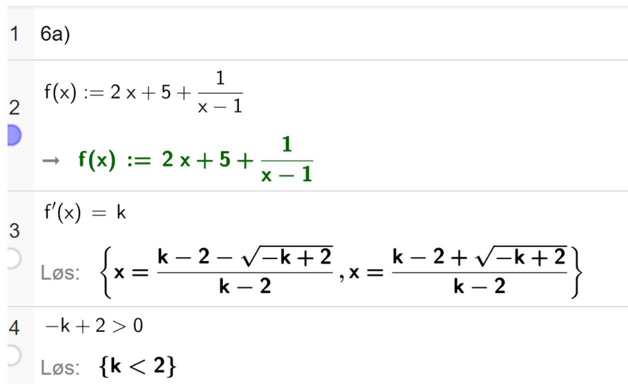

Figure 25

b)

En andregradsligning $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ har to løsninger $x_{1,2} = x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ og symmetrilinje $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$.

Vi bruker Cas og sjekker symmetri for en generell verdi for k:

Vi definerer en funksjon H (rad 6) så setter vi den lik null for å finne løsningene . Så finner vi symmetrilinjen (rad 8) og sjekker at løsningene er symmetriske (rad 9).

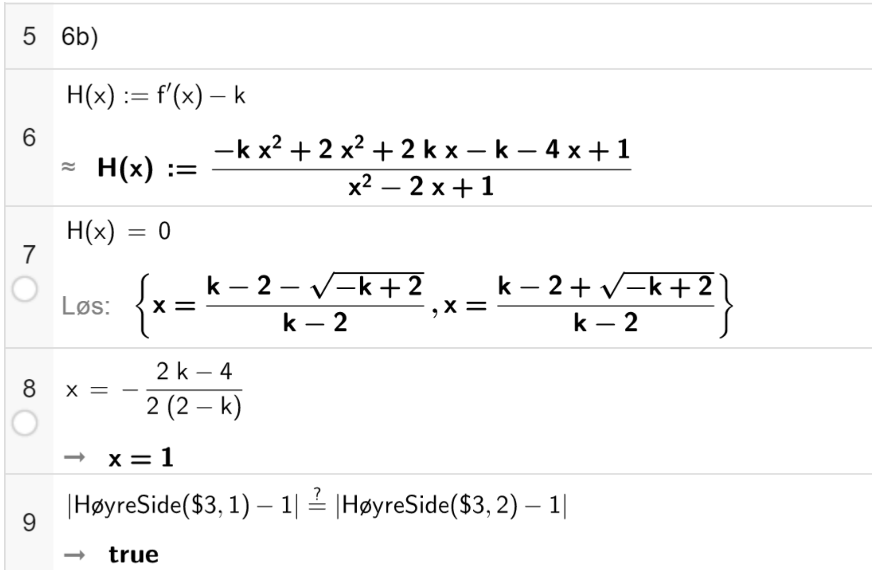

Figure 26

Løsning via Python programmering:

```python
import numpy as np
def h(k,x): # Funksjon h=f'(x)-k
    H=(2*x**2-4*x+1)/(x**2-2*x+1)-k
    return H
def symmetri(k):   # Funksjon for å sjekke symmetri
    x1=(k-2-np.sqrt(-k+2))/((k-2)) # Første løsning for f'(x)=k
    x2=(k-2+np.sqrt(-k+2))/((k-2)) # Andre løsning  for f'(x)=k
    s=(x1+x2)/2
    diff=abs(x1-s)-abs(x2-s) # Differansen mellom y-verdiene for de to løsningene
    if diff<=10**(-8):        # Symmetri betingelse
        print('Løsningne er symmetriske om linjen x= 1')
        return ( k,round(x1,2),round(x2,2) )
    else:
            print('Løsningne er ikke symmetriske')
```

```python
for k in np.arange (1,-10,-1):
    print(symmetri(k))
```

```
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(1, 2.0, -0.0)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(0, 1.71, 0.29)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-1, 1.58, 0.42)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-2, 1.5, 0.5)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-3, 1.45, 0.55)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-4, 1.41, 0.59)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-5, 1.38, 0.62)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-6, 1.35, 0.65)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-7, 1.33, 0.67)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-8, 1.32, 0.68)
Løsningne er symmetriske om linjen x= 1
(-9, 1.3, 0.7)
```

Figure 27

c)

Vi bruker Cas og ser at $a > 4$. Merk at $a \neq 4$ fordi da nevneren blir null i de to løsningene (rad 3)

1. $g(x) := a\,x + b + \frac{1}{x + d}$

   $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := a\,x + b + \frac{1}{d + x}}$

2. $g'(x) = 4$

   Løs: $\left\{ x = \frac{-(\sqrt{a-4}\,d + 1)}{\sqrt{a-4}}, x = \frac{-(a-4)\,d + \sqrt{a-4}}{a-4} \right\}$

3. $a - 4 > 0$

   Løs: $\{a > 4\}$

Figure 28

d)

Vi bruker Cas .Ligningen har løsning når $k < 3$ fordi utrykket under kvadratrot må være positivt eller null men siden det står $k - 3$ i nevneren så må vi kreve også at $k \neq 3$ (rad 2,3). Løsningene er symmetriske rundt linjen $x = -d$ (rad 4,5) siden de har samme avstand til linjen.

1. $g(x) := 3\,x + b + \frac{1}{x + d}$

   $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := b + 3\,x + \frac{1}{d + x}}$

2. $g'(x) = k$

   Løs: $\left\{ x = \frac{-(\sqrt{-k+3}\,d + 1)}{\sqrt{-k+3}}, x = \frac{-(k-3)\,d - \sqrt{-k+3}}{k-3} \right\}$

3. $-k + 3 > 0$

   Løs: $\{k < 3\}$

4. $s := \frac{\text{HøyreSide}(\$2,\ 1) + \text{HøyreSide}(\$2,\ 2)}{2}$

   $\rightarrow$ $\mathbf{s := -d}$

5. $|\text{HøyreSide}(\$2, 1) - s| \stackrel{?}{=} |\text{HøyreSide}(\$2, 2) - s|$

   $\rightarrow$ **true**

Figure 29

e)

Vi bruker Cas til å løse ligningssystemet og finner at $b = 5, d = -2$ (rad 9).

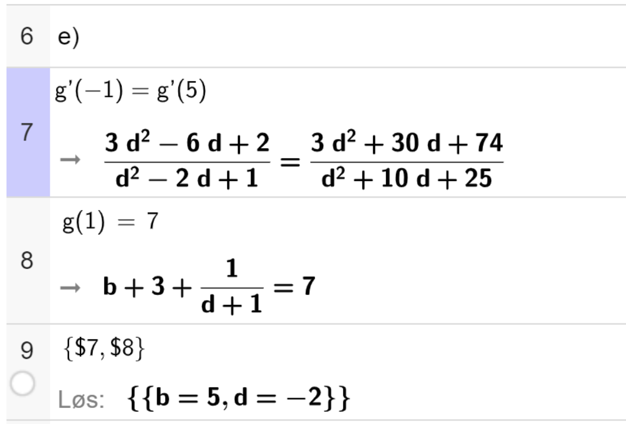

Figure 30