Eksamen S2 Høst 2022 (LK06)- løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1 (4 poeng)

$(e^{kx})' = ke^{kx}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Deriver funksjonene

a) $f(x) = e^{2x} + x^3$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2$$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 4)$

starter med å sette $u = x^2 + 4$ slik at vi får $g(u(x)) = \ln u$

$$g'(u(x)) = (\ln u)' \cdot u' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{2x}{x^2+4}$$

Oppgave 2 (2 poeng)

En uendelig geometrisk rekke er gitt ved

$$36 - 24 + 16 - \frac{32}{3} + \cdots$$

Begrunn at rekken konvergerer, og bestem summen av rekken.

En geometrisk rekke konvergerer dersom $-1 < k < 1$ eller $|k| < 1$:

$$k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad , \quad k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-24}{36} = -\frac{2}{3}$$

$|k| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1 \implies$ rekken konvergerer

Summen av en uendelig konvergent geometrisk rekke er $S = \frac{a_1}{1-k}$

$$S = \frac{36}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{36}{1+\frac{2}{3}} = \frac{36}{\frac{5}{3}} = 36 \cdot \frac{3}{5} = \frac{108}{5}$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 8$$

a) Bruk blant annet polynomdivisjon til å vise at

$$f(x) = -2(x+1)(x-2)^2$$

Vi vet at dersom $f(x_1) = 0$ så er $(x - x_1)$ en faktor i $f(x)$ slik at vi kan gjennomføre polynomdivisjonen $f(x) : (x - x_1)$.

For å finne en x-verdi som gjør at $f(x) = 0$, prøver vi oss fram.
De vanligste verdiene er $x = -1$, $x = 0$ eller $x = 1$:

$x = -1$: $f(-1) = -2\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - 8 = -2\cdot(-1) + 6\cdot 1 - 8 = 2 + 6 - 8 = 0$ ✓

Vi vet nå at $(x+1)$ er en faktor i $f(x)$, og vi kan gjøre polynomdivisjonen

legger til $0x$ for å ikke hoppe over et ledd i divisjonen

$$\begin{array}{l}
-2x^3 + 6x^2 + 0x - 8 : (x+1) = \underline{-2x^2 + 8x - 8} \\
\underline{-(-2x^3 - 2x^2)} \\
\qquad\quad 8x^2 + 0x \\
\qquad \underline{-(8x^2 + 8x)} \\
\qquad\qquad -8x - 8 \\
\qquad\quad \underline{-(-8x - 8)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Vi har altså at $\dfrac{f(x)}{(x+1)} = -2x^2 + 8x - 8 \quad \Big| \cdot (x+1)$

$f(x) = (-2x + 8x - 8)(x+1)$

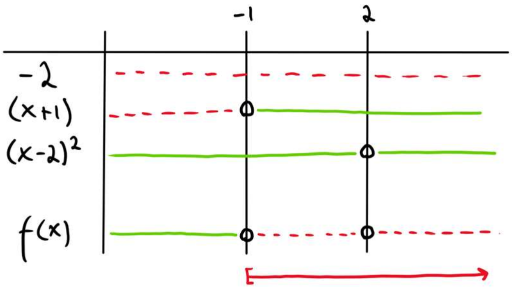
$-2x + 8x - 8 = -2(x - 4x + 4) = -2(x-2)^2$

$$\underline{\underline{f(x) = -2(x+1)(x-2)^2}}$$

b) Løs ulikheten $f(x) \leq 0$.

For å løse ulikheten $f(x) \leq 0$ trenger vi å tegne et fortegnsskjema for $f(x)$.

Da tegner vi fortegnslinjer for alle faktorene i $f(x)$:



$(x-2)^2$ er alltid positiv siden den er opphøyd i 2

$f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, \rightarrow\rangle$

på dette intervallet er $f(x) \leq 0$

c) Løs likningen

$e^{3x} - 3e^{2x} + 4 = 0$ Husk: $e^{kx} = (e^x)^k$

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 4 = 0 \iff (e^x)^3 - 3(e^x)^2 + 4 = 0$$

Hvis vi nå gjør variabelskifte $u = e^x$ får vi:

$u^3 - 3u^2 + 4 = 0$ Husk at $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 8 = -2(x^3 - 3x^2 + 4) = -2(x+1)(x-2)^2$

$$u^3 - 3u^2 + 4 = 0 \iff (x+1)(x-2)^2 = 0 \iff x = -1 \lor x = 2$$

Oppgave 4 (3 poeng)

Tre kunder er innom frukt- og grønnsakhandleren for å kjøpe epler, poteter og moreller.

Den første kunden betaler til sammen 155 kroner for 1 kg epler, 2 kg poteter og 500 g moreller. Den andre kunden betaler til sammen 330 kroner for 2 kg epler, 5 kg poteter og 1 kg moreller. Den tredje kunden betaler til sammen 195 kroner for 1,5 kg epler, 3 kg poteter og 500 g moreller.

Bestem prisen per kilogram for epler, for poteter og for moreller.

La pris epler = x , pris poteter = y og pris moreller = z.

- kunde I: kjøpte 1kg epler, 2kg poteter og 0,5kg moreller for 155kr

$$\text{I}: \quad x + 2y + \frac{1}{2}z = 155 \quad | \cdot 2 \iff 2x + 4y + z = 310$$

- kunde II: kjøpte 2kg epler, 5kg poteter og 1kg moreller for 330kr

$$\text{II}: \quad 2x + 5y + z = 330$$

- kunde III: kjøpte 1,5kg epler, 3kg poteter og 0,5kg moreller for 195kr

$$\text{III}: \quad \frac{3}{2}x + 3y + \frac{1}{2}z = 195 \quad | \cdot 2 \iff 3x + 6y + z = 390$$

La oss stille opp alle likningene under hverandre slik at vi kan bruke addisjonsmetoden:

$$\text{I} \quad 2x + 4y + z = 310$$

$$\text{II} \quad 2x + 5y + z = 330$$

$$\text{III} \quad 3x + 6y + z = 390$$

Vi ser at ved å kombinere II−I kan vi eliminere både x og z:

$$\text{II}-\text{I}: \quad \underline{y = 20}$$

Nå vet vi y, så nå ønsker vi å f.eks eliminere z slik at vi får en likning med kun x og y:

$$\text{III}-\text{II}: \quad x + y = 60 \quad , \text{ setter inn } y = 20$$

$$x + 20 = 60$$

$$\underline{x = 40}$$

Nå kan vi sette inn x = 40 og y = 20 inn i en valgfri likning, f.eks. i I:

$$\text{I}: \quad 2 \cdot 40 + 4 \cdot 20 + z = 310$$

$$160 + z = 310$$

$$\underline{z = 150}$$

$$\underline{x = 40 \,,\; y = 20 \,,\; z = 150}$$

Kiloprisene er som følger:

$$\underline{\underline{\text{epler} = 40 \text{ kr/kg} \,,\; \text{poteter} = 20 \text{ kr/kg} \,,\; \text{moreller} = 150 \text{ kr/kg}}}$$

REALFAGSPESIALISTEN

Oppgave 5 (3 poeng)

Ida sparer til en jakke som koster 1900 kroner.

Hun sparer 100 kroner den første uken. Hun vil øke sparebeløpet med et fast beløp hver uke slik at hun får råd til jakken etter 10 sparebeløp.

Hvor mye må Ida minst øke sparebeløpet med hver uke for å få råd til jakken?

La oss kalle den ekstra økningen for x, slik at sparebeløpene de ulike ukene ser ut som følger:

Uke 1:	100
Uke 2:	$100 + x$
Uke 3:	$100 + x + x = 100 + 2x$
Uke 4:	$100 + 2x + x = 100 + 3x$
⋮	⋮
Uke 10:	$100 + 8x + x = 100 + 9x$

Dersom vi legger sammen alle sparebeløpene får vi:

$$\underset{a_1}{100} + (100+x) + (100+2x) + (100+3x) + \ldots + \underset{a_{10}}{(100+9x)}$$

Vi ser at vi har en aritmetrisk rekke med 10 ledd.
Summen av alle sparebeløpene skal bli 1900
Vi får dermed:

$$S_{10} = 1900 \quad , \text{der} \quad S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 5(a_1 + a_{10})$$

$$S_{10} = 1900 \iff 5(100 + 100 + 9x) = 1900 \quad |:5$$

$$200 + 9x = 380 \iff 9x = 180 \quad |:9 \iff \underline{x = 20}$$

Ida må øke det ukentlige sparebeløpet med 20kr hver uke for å få råd til jakken etter 10 uker med sparing

Oppgave 6 (4 poeng)

Kostnadene K per dag ved produksjon av en vare er gitt ved

$$K(x) = 0{,}2x^2 + 600x + 8000 \ , \quad 0 < x < 2000$$

Her er x antall produserte enheter per dag, og $K(x)$ er gitt i kroner.

a) Bestem den produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet.

Vi skal bestemme produksjonsmengden som gir lavest kostnad per enhet. Da må vi først finne et uttrykk for enhetskostnaden:

total kostnad

$$E(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0{,}2x^2 + 600x + 8000}{x} = \underline{0{,}2x + 600 + 8000 \cdot \frac{1}{x}}$$

enhetskostnad   antall enheter

Vi skal altså finne bunnpunktet til $E(x)$. Da har vi to valg:

① Løse $E'(x) = 0$ med funksjonsuttrykket vi fant

② Utnytte at $E'(x) = 0 \iff E(x) = K'(x)$ og løse den likningen.

① $E'(x) = 0{,}2 + 8000 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$E'(x) = 0 \iff 0{,}2 + -\frac{8000}{x^2} = 0 \iff \frac{1}{5} = \frac{8000}{x^2} \quad | \cdot 5x^2$

$x^2 = 5 \cdot 8000 = 40\,000 \iff x = \pm\sqrt{40\,000} = \underline{\pm 200}$

<u>x må være mellom 0 og 2000, så vi velger den positive løsningen $x = 200$</u>

②

$E'(x) = 0 \iff E(x) = K'(x) \iff 0{,}2x + \cancel{600} + \frac{8000}{x} = 0{,}4x + \cancel{600}$

$\frac{8000}{x} = 0{,}2x \quad | \cdot x \iff 8000 = \frac{1}{5}x^2 \quad | \cdot 5 \iff x^2 = 40\,000$

$\underline{x = 200}$

<u>Produksjon av 200 enheter gir den laveste enhetskostnaden</u>

Etterspørselen avhenger av prisen p på varen. Det viser seg at etterspørselen er gitt ved

$$e(p) = 12000 - 10p$$

b) Bestem den prisen som vil gi størst daglig overskudd.

Vi får videre vite at etterspørselen av varen avhenger av prisen p:

$$e(p) = 12000 - 10p \leftarrow \text{pris}$$

↑ etterspørsel

Vi skal finne den prisen som gir størst daglig overskudd.
Vi må altså finne toppunktet til overskuddsfunksjonen $O(x)$:

Vi må løse $O'(x) = 0$, der $O(x) = I(x) - K(x)$.
Vi må altså finne $I(x)$. Vi vet at $I(x) = p \cdot x$.

Så må vi huske at x er antall solgte varer, og at etterspørselen styrer hvor mange varer vi kan selge. Altså er $x = e(p)$:

$$x = e(p) \Leftrightarrow x = 12000 - 10p \Leftrightarrow 10p = 12000 - x \quad | : 10$$

$$\underline{p = 1200 - 0{,}1x}$$ Vi setter $p = 1200 - \frac{1}{10}x$ inn for p i $I(x) = p \cdot x$:

$$I(x) = (1200 - 0{,}1x) \cdot x = \underline{-0{,}1x^2 + 1200x}$$

$$O(x) = I(x) - K(x) = -0{,}1x^2 + 1200x - (0{,}2x^2 + 600x + 8000)$$

$$O(x) = -0{,}1x^2 + 1200x - 0{,}2x^2 - 600x - 8000 = \underline{-0{,}3x^2 + 600x - 8000}$$

$$O'(x) = -0{,}6x + 600$$

$$O'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}6x + 600 = 0 \Leftrightarrow 600 = \frac{6}{10}x \quad | \cdot \frac{10}{6}$$

$$600 \cdot \frac{10}{6} = x \Leftrightarrow \underline{x = 1000}$$, Vi setter $x = 1000$ inn i $p = 1200 - 0{,}1x$:

$$p = 1200 - 0{,}1 \cdot 1000 = 1200 - 100 = \underline{\underline{1100}}$$

<u>Når prisen per vare er 1100kr får vi maksimalt overskudd</u>

Oppgave 7 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 4(x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

a) Bestem nullpunktene til f.

Vi skal bestemme nullpunktene til $f(x)$:

$f(x) = 0 \iff 4(x^2 - 5x + 4)e^{-\frac{1}{2}x} = 0$

Hverken faktorene 4 eller $e^{-\frac{1}{2}x}$ kan være null, så de kan vi trygt fjerne

$x^2 - 5x + 4 = 0$, $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$

$(x-1)(x-4) = 0 \iff \underline{\underline{x = 1 \lor x = 4}}$

b) Vis at $f'(x) = -2(x^2 - 9x + 14) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$.

Vi skal vise at $f'(x) = -2(x^2 - 9x + 14) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$:

$f(x) = \underbrace{4e^{-\frac{1}{2}x}}_{u} \cdot \underbrace{(x^2 - 5x + 4)}_{v}$

$u = 4e^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad v = x^2 - 5x + 4$

$u' = -2e^{-\frac{1}{2}x}$ $\quad v' = 2x - 5$

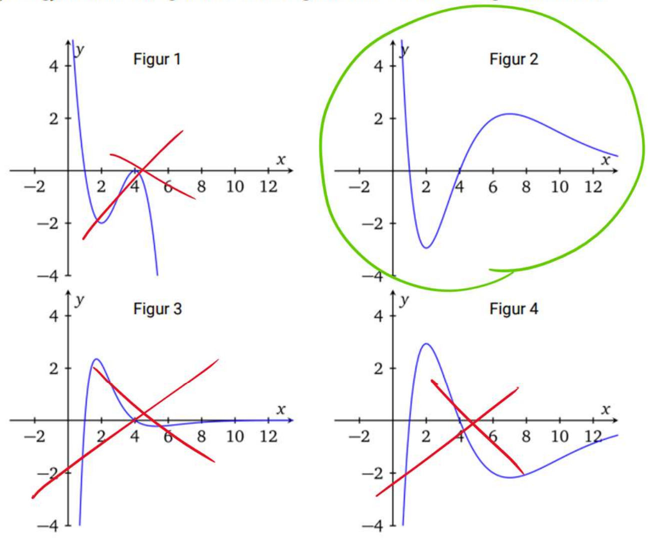
$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = -2e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (x^2 - 5x + 4) + 4e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (2x - 5)$

$f'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}\left((x^2 - 5x + 4) - 2(2x - 5)\right) = -2e^{-\frac{1}{2}x}(x^2 - 5x + 4 - 4x + 10)$

$\underline{\underline{f'(x) = -2(x^2 - 9x + 14)e^{-\frac{1}{2}x}}} = -2(x-2)(x-7)e^{-\frac{1}{2}x}$

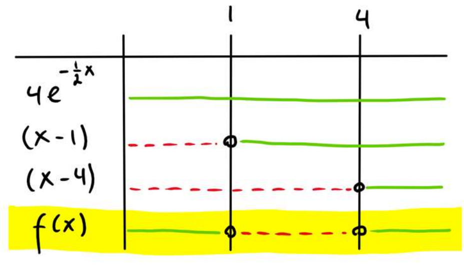
Nedenfor ser du fire grafer. En av dem er grafen til f.

c) Avgjør hvilken av grafene som er grafen til f. Husk å begrunne svaret.

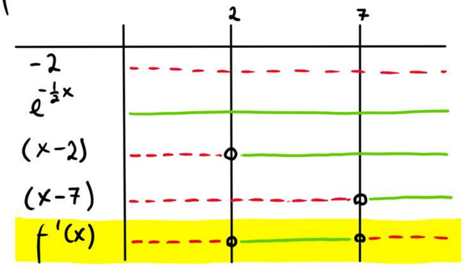


La oss tegne en fortegnslinje for $f(x)$ og $f'(x)$:

$$f(x) = 4e^{-\frac{1}{2}x}(x-1)(x-4)$$



$$f'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}(x-2)(x-7)$$



- $f(x)$ skal være positiv på $x \in \langle \leftarrow, 1\rangle$ og $x \in \langle 4, \rightarrow\rangle$
  ↳ Da kan vi utelukke figur 3 og figur 4 fordi de er negative på $x \in \langle \leftarrow, 1\rangle$.
  figur 1 kan også utelukkes fordi på figuren er grafen negativ på $x \in \langle 4, \rightarrow\rangle$

- Vi trengte ikke fortegnsskjema til $f'(x)$, men når vi først har tegnet den, ser vi at $f(x)$ skal ha et bunnpunkt i $x=2$ og toppunkt i $x=7$. Det stemmer med figur 2, i tillegg til at den stemmer overens med fortegnsskjema til $f(x)$

<u>figur 2 er altså riktig</u>

Oppgave 8 (8 poeng)

Et lykkehjul har fem felter. Et av feltene er grønt, og de fire andre er røde. Når du snurrer lykkehjulet, er sannsynligheten for at det stopper på hvert av de fem feltene, 0,2.

Tenk deg at du skal snurre lykkehjulet 100 ganger. La X være antall ganger lykkehjulet stopper på det grønne feltet.

a) Forklar at X er binomisk fordelt med $\mu_X = 20$ og $\sigma_X = 4$.

X : antall ganger lykkehjulet lander på grønt felt.

- Delforsøkene har kun to mulige utfall : $U = \{ G, \bar{G} \}$ grønn ikke grønn
- Hvert delforsøk er uavhengige av hverandre
- Sannsynligheten $p = P(\text{Grønn}) = 0{,}2$ i hvert delforsøk
- Forsøket består av et helt antall delforsøk (100 i dette tilfelle)

Alle kravene for en binomisk sannsynlighetsmodell er oppfylt av X

Forventningsverdi : $\mu_X = E[X] = np = 100 \cdot 0{,}2 = \underline{20}$

Standardavvik : $\sigma_X = SD[X] = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{16} = \underline{\underline{4}}$

b) Forklar at X er tilnærmet normalfordelt.

La $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ representere delforsøkene i X.

Sentralgrenseteoremet gir oss at dersom $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ er uavhengige stokastiske variabler, så er også

$\sum_{i=1}^{n} X_i$ tilnærmet normalfordelt dersom n er tilstrekkelig stor. Videre sier

Sentralgrenseteoremet at konvergensen mot normalfordelingen blir tilstrekkelig god når $n \geq 30$. Altså vil $\sum_{i=1}^{n} X_i$ være tilnærmet normalfordelt for $n \geq 30$.

La så i vårt tilfelle $X_i = 1$ når lykkehjulet stopper på grønt, og $X_i = 0$ når lykkehjulet ikke stopper på grønt.

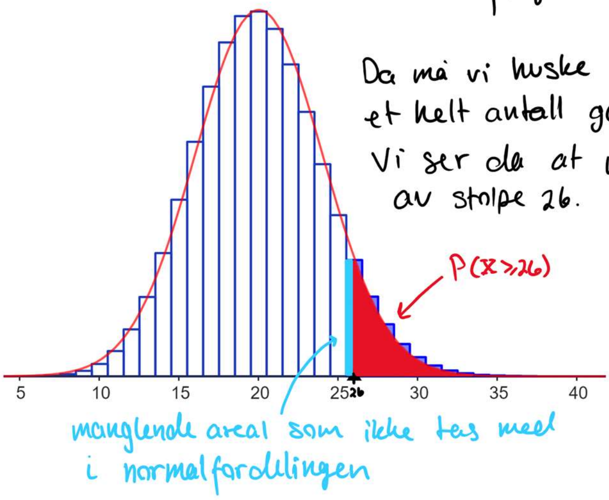
Når X er antall ganger lykkehjulet stopper på grønt på $n = 100$ forsøk, har vi at

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$$

<u>Vi har dermed fra sentralgrenseteoremet at X er tilnærmet normalfordelt</u>

c) Bestem sannsynligheten for at lykkehjulet stopper på det grønne feltet mer enn 25 ganger.

Vi kan nå regne på X som en normalfordelt sannsynlighetsfordeling.
Da ser $P(X>25)$ ut som følger:



Da må vi huske at siden lykkehjulet kun kan lande på grønn et helt antall ganger, så er $P(X>25) = P(X \geq 26)$.
Vi ser da at normalfordelingen kun tar med halvparten av stolpe 26. Når vi beregner sannsynligheten ved hjelp av normalfordelingen må vi derfor regne ut $P(X \geq 25{,}5)$.

Dette kan vi gjøre fordi normalfordelingen er en kontinuerlig fordelt sannsynlighetsmodell.

$P(X \geq 25{,}5) = 1 - P(X \leq 25{,}5)$. For å kunne bruke tabellverdier må vi transformere dette over til en standard normalfordeling. Det gjør vi med variabelskifte:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{25{,}5 - 20}{4} = \frac{5{,}5}{4} = \frac{\frac{11}{2}}{4} = \frac{11}{8} \approx \underline{1.38}$$

$$P(X \geq 25{,}5) = 1 - P(X \leq 25{,}5) = 1 - P(Z \leq 1{,}38) = 1 - 0{,}9162 = \underline{\underline{0{,}0838}}$$

d) Bestem den minste verdien k kan ha dersom $P(X \geq k) \leq 0{,}01$.
Hva forteller dette svaret deg i denne situasjonen?

Vi skal altså bestemme det minste antall ganger lykkehjulet minst kan lande på grønn (på 100 forsøk) uten at sannsynligheten overstiger 1%

For at normalfordelingen skal gi en så riktig som mulig tilnærming må vi gjøre som i forrige deloppgave, altså å beregne $P(X \geq k-0{,}5)$.

Deretter standardiserer vi: $Z = \frac{k-0{,}5-\mu_x}{\sigma_x} = \frac{k-0{,}5-20}{4} = \frac{k-20{,}5}{4}$

Vi har altså at $P\left(Z \geq \frac{k-20{,}5}{4}\right) \leq 0{,}01 \iff 1 - P\left(Z \leq \frac{k-20{,}5}{4}\right) \leq 0{,}01$

$P\left(Z \leq \frac{k-20{,}5}{4}\right) \geq 0{,}99$

Nå må vi finne den z-verdien som gir en p-verdi nærmest mulig 0,99, men som ikke er mindre:

I tabellene finner vi $P(Z \leq 2{,}33) = 0{,}9901$

Det gir oss at $\frac{k-20{,}5}{4} = 2{,}33 \quad | \cdot 4 \iff k - 20{,}5 = 9{,}32$

$k = 29{,}82 \approx \underline{\underline{30}}$

Vi har altså at $P(X \geq 30) = 1 - P(Z \leq 2{,}38) = 0{,}0087 < 0{,}01$ ✓

Det minste antallet ganger lykkehjulet minst kan treffe grønn (på 100 forsøk) uten at sannsynligheten overstiger 1% er 30 ganger

DEL 2

Oppgave 1 (8 poeng)

Ved en avfallsplass vil det i et spesifikt avfall utvikles en bakteriekultur. Ved naturlig vekst vil antall bakterier N (i millioner) være gitt ved

$$N(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}35t}$$

Her er t antall dager etter at avfallet ble levert.

Dersom antall bakterier overstiger 15 millioner, regnes avfallet som helsefarlig.

a) Hvor lang tid tar det før avfallet blir helsefarlig dersom bakteriekulturen vokser naturlig?

Vi løser likningen $N(t) = 15$ i CAS:

1	$N(t) := 0.8\, e^{0.35t}$
	$\approx$ $\mathbf{N(t) := 0.8\, e^{0.35t}}$
2	$N(t) = 15, t = 1$
	NLøs: $\{\mathbf{t = 8.37}\}$

Det tar 8,37 dager før antallet bakterier bikker 15 millioner

For å dempe bakterieveksten tilsettes det en gitt mengde av et stoff. Antall bakterier i avfallet vil da følge modellen B gitt ved

$$B(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}35t - 0{,}01t^2}$$

b) Avgjør om avfallet noen gang vil bli helsefarlig dersom denne mengden av stoffet tilsettes.

For å sjekke om avfallet noen gang blir helsefarlig, må vi sjekke om $B(t)$ noen gang overstiger 15 millioner på intervallet $x \in [0, \rightarrow\rangle$:

$$B(t) = 0{,}8 \cdot \frac{e^{0{,}35t}}{e^{0{,}01t^2}} = 0{,}8 \cdot \left(\frac{e^{0{,}35}}{e^{0{,}01t}}\right)^t$$

her ser vi at $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{e^{0{,}35}}{e^{0{,}01t}} = 0$

$B(t)$ vil derfor på et tidspunkt ha et toppunkt før den avtar, og nærmer seg null etterhvert som tiden går.

Vi sjekker toppunkt i CAS:

3	$B(t) := 0.8\, e^{0.35t - 0.01t^2}$
	$\approx$ $\mathbf{B(t) := 0.8\, e^{-0.01t^2 + 0.35t}}$
4	Ekstremalpunkt(B)
	$\approx$ $\{\mathbf{(17.5, 17.105)}\}$

Antallet bakterier er på det meste 17,1 millioner
Avfallet blir derfor helseskadelig.

c) Når øker antall bakterier raskest ifølge modellen B?
Hvor stor er bakterieveksten per dag da?

Vi bruker CAS til å finne vendepunktet:

5	Vendepunkt(B)
	$\approx \{(10.429, 10.375), (24.571, 10.375)\}$
6	$B'(10.429)$
	$\approx$ **1.467**
7	$B'(24.571)$
	$\approx$ **−1.467**

Vi fikk to vendepunkter. Da må vi putte x-verdiene inn i $B'(t)$ for å sjekke hvilket punkt som har størst stigning.

Vi ser at bakterieveksten er størst etter 10 dager. Da øker bakteriekulturen med 1,467 millioner bakterier per dag

Bedriften ønsker å redusere stoffmengden som tilsettes.

En generell modell S for antall bakterier etter t dager er gitt ved

$$S(t) = 0{,}8 \cdot e^{0{,}35t - k \cdot t^2}$$

Her er k en konstant som er avhengig av hvor mye stoff som tilsettes.

d) Hva er den laveste verdien k kan ha, dersom avfallet ikke skal bli helsefarlig?

Vi ønsker å bestemme k slik at toppunktet til $S(t)$ mindre eller lik 15:

8	$S(t) := 0.8\, e^{0.35t - kt^2}$
	$\approx$ $\mathbf{S(t) := 0.8\, e^{-kt^2 + 0.35t}}$
9	$\text{Løs}(S'(t) = 0, t)$
	$\to \left\{ t = \frac{7}{40\,k} \right\}$
10	$\text{Løs}\left(S\left(\frac{7}{40\,k}\right) \leq 15, k\right)$
	$\approx \{k < 0, k \geq 0.0104\}$

t-koordinat til toppunkt

funksjonsverdi til toppunkt

K må være positiv, altså er $k = 0{,}0104$ den minste verdien k kan ha

REALFAGSPESIALISTEN

Oppgave 2 (6 poeng)

Da Anniken fylte 15 år, satte hun 30 000 kroner inn på en konto med en fast månedlig rentesats på 0,1 prosent. Hver måned etter dette satte hun inn 500 kroner på kontoen. Det siste innskuddet gjorde hun den dagen hun fylte 20 år.

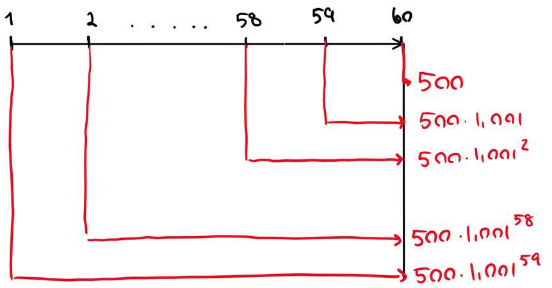
a) Hvor mye hadde hun på kontoen etter innskuddet på 20-årsdagen?

Dette kan vi dele opp i to:

- På én konto har hun 30 000 kr stående i $5 \cdot 12 = 60$ måneder med 0,1 % rente per måned. Etter 60 måneder står det

$$30\,000 \cdot 1{,}001^{60} = \underline{31\,854 \text{ kr}}$$

- På en annen konto satt hun inn 500 kr hver måned, fra måneden etter hun fylte 15 år til og med måneden hun fylte 20 år.
Til sammen gjorde hun 60 innskudd.



På denne kontoen har Anniken følgende beløp etter hun fylte 20 år:

$$500 + 500 \cdot 1{,}001 + 500 \cdot 1{,}001^2 + \ldots + 500 \cdot 1{,}001^{58} + 500 \cdot 1{,}001^{59}$$

$a_1 = 500$ $\quad$ $k = 1{,}001$ $\quad$ $a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = 500 \cdot 1{,}001^{n-1}$

Denne summen kan vi regne ut på to forskjellige måter:

① $S_{60} = a_1 \cdot \dfrac{k^{60} - 1}{k - 1} = 500 \cdot \dfrac{1{,}001^{60} - 1}{1{,}001 - 1} = \underline{\underline{30\,902 \text{ kr}}}$

②

1. $a_1 := 500$
   $\rightarrow$ $\mathbf{a_1 := 500}$
2. $k := 1.001$
   $\approx$ $\mathbf{k := 1.001}$
3. $a(n) := a_1\, k^{n-1}$
   $\rightarrow$ $a(n) := 500 \left(\dfrac{1001}{1000}\right)^{n-1}$
4. $S_{60} = \sum_{n=1}^{60} a(n)$
   $\approx$ $\mathbf{S_{60} = 30902.357}$

her brukte vi kommandoen
Sum ("uttrykk", "variabel", "start", "slutt")

Nå må vi huske å legge sammen beløpene fra begge kontoene:

Anniken har altså $31\,854 + 30\,902 = 62\,756$ kr på konto etter siste innskudd på 20-årsdagen

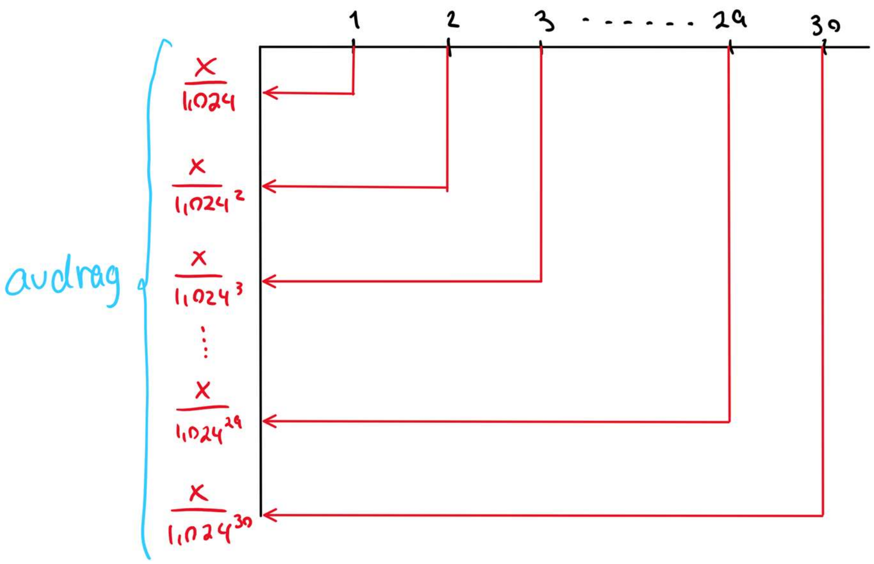
Anniken skal kjøpe leilighet og tar opp et annuitetslån på 2 millioner kroner. Lånet skal betales tilbake med en nedbetalingstid på 30 år, én termin per år og en fast årlig rentesats på 2,4 prosent. Første innbetaling er om ett år.

b) Vis at det årlige terminbeløpet er 94 286 kroner.

Terminbeløpene består av avdrag og renter. Avdragene er den delen av terminbeløpet som betaler ned gjelden, mens rentene er "avgiften" vi må betale til banken for lånet vårt.

Vi vet at etter 30 år så har vi tilsammen betalt 2 000 000 i avdrag. Vi må derfor sette opp en oversikt der vi summerer sammen alle avdragene.

La oss sette det faste årlige terminbeløpet til x. For å finne avdragene må vi dele vekk rentene fra terminbeløpene:



Summen av alle avdragene blir da:

$$\frac{x}{1,024} + \frac{x}{1,024^2} + \frac{x}{1,024^3} + \dots + \frac{x}{1,024^{30}}$$

$$a_1 = \frac{x}{1,024} \qquad k = \frac{1}{1,024} \qquad a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = \frac{x}{1,024} \cdot \left(\frac{1}{1,024}\right)^{n-1}$$

Igjen kan vi regne ut summen på to måter:

① $S_{30} = a_1 \cdot \frac{k^n - 1}{k-1} = \frac{x}{1{,}024} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1{,}024}\right)^{30} - 1}{\frac{1}{1{,}024} - 1} = \underline{21{,}212x}$

②

1. $a_1 := \frac{x}{1.024}$
   $\rightarrow a_1 := \frac{125}{128} x$
2. $k := \frac{1}{1.024}$
   $\rightarrow k := \frac{125}{128}$
3. $a(n) := a_1 k^{n-1}$
   $\rightarrow a(n) := \left(\frac{125}{128}\right)^n x$
4. $S_{30} = \sum_{n=1}^{30} a(n)$
   $\approx S_{30} = 21.212\,x$

her brukte vi kommandoen
Sum ("uttrykk", "variabel", "start", "slutt")

Deretter må vi huske at summen av avdragene skal bli 2000 000.
Vi må derfor løse likningen

$21{,}212x = 2000\,000 \quad | : 21{,}212 \iff \underline{\underline{x = 94\,286}}$

<u>Terminbeløpet er 94 286 kr</u>

Anniken frykter en renteoppgang. Hun kan maksimalt betale et terminbeløp på 110 000 kroner.

c) Bestem den høyeste rentesatsen hun har råd til å betale.

Nå vet vi terminbeløpet, lånesummen og nedbetalingstiden, men ikke renten. Vi kan gjenbruke alt vi gjorde i oppgave b), og sette renten som x istedenfor terminbeløpet:

$$\frac{110\,000}{x} + \frac{110\,000}{x^2} + \frac{110\,000}{x^3} + \ldots + \frac{110\,000}{x^{30}} = 2000\,000$$

$a_1 \qquad k = \frac{1}{x} \qquad a_n = a_1 \cdot k^{n-1} = \frac{110\,000}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$

1. $a_1 := \frac{110000}{x}$
   $\approx a_1 := \frac{110000}{x}$
2. $k := \frac{1}{x}$
   $\approx k := \frac{1}{x}$
3. $a(n) := a_1 k^{n-1}$
   $\rightarrow a(n) := 110000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}}{x}$
4. $\sum_{n=1}^{30} a(n) = 2000000$
   Løs: $\{x = \cancel{0.888}, x = 1.036\}$

Vi får at vekstfaktoren er 1,036, altså er renten 3,6 %.

<u>Den maksimale renten Anniken kan tåle er 3,6 %</u>

Oppgave 3 (10 poeng)

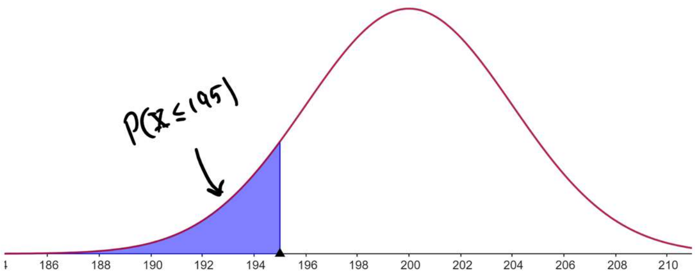
En fabrikk lager sjokoladeplater som skal veie 200 gram. La X være vekten til en tilfeldig sjokoladeplate. Vi går ut fra at X er normalfordelt med $\mu = 200$ gram og $\sigma = 4$ gram.

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt sjokoladeplate veier mindre enn 195 gram.

Her kan vi bruke sannsynlighetskalkulator :

Normalfordeling μ 200 σ 4

P(X ≤ 195) = 0.1056



$$P(X \leq 195) = 0{,}1056$$

Sjokoladeplatene blir pakket i esker på 10 plater.

b) Bestem sannsynligheten for at alle platene i en eske veier mer enn 195 gram.

Nå har vi en binomisk sannsynlighetsmodell fordi følgende krav er oppfylt:

- Forsøket består av n delforsøk (n = 10)
- Hvert delforsøk har kun to mulige utfall (veier mer enn 195g, eller ikke)
- Hvert delforsøk er uavhengige av hverandre (vi antar at de 10 sjokoladeplatene er trukket ut fra en mengde som er veldig mye større)
- Sannsynligheten p er lik i alle delforsøk

La Y: antall sjokoladeplater som veier mer enn 195g

$P(Y = 10) = \binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^0$, der $p = P(X > 195) = 1 - P(X \leq 195) = 1 - 0{,}1056 = 0{,}8944$

$P(Y = 10) = 1 \cdot 0{,}8944^{10} \cdot 0{,}1056^0 = \underline{0{,}3276}$

Sannsynligheten for at alle 10 sjokoladeplater veier mer enn 195g er 0,3276

Binomisk fordeling n 10 p 0.8944

P(10 ≤ X ≤ 10) = 0.3276

← utregning med sannsynlighetskalkulator

Eskene blir pakket i kartonger, 10 esker i hver kartong. Det er altså 100 sjokoladeplater i en kartong.

Ledelsen ved sjokoladefabrikken krever at en kartong skal veie mellom 19 900 gram og 20 100 gram.

c) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt kartong er innenfor vektkravet til ledelsen.

Vi innfører nå en ny stokastisk variabel S : vekten av 100 sjokoladeplater.

X er vekten til en tilfeldig valgt sjokoladeplate. Dermed kan S defineres som

$S = \sum_{i=1}^{100} X_i$. Siden X_i er normalfordelt, er også S normalfordelt.

La oss nå finne μ_S og σ_S :

- $\mu_S = E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = \sum_{i=1}^{100} E[X_i] = \sum_{i=1}^{100} E[X] = 100 \cdot E[X] = 100 \cdot 200 = \underline{20\,000}$

- $\sigma_S^2 = Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{100} X_i\right] = \sum_{i=1}^{100} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X] = 100 \cdot Var[X] = 100 \cdot 4^2 = 1600$

$\sigma_S = \sqrt{\sigma_S^2} = \sqrt{1600} = \underline{40}$

Bruker sannsynlighetskalkulator til å regne ut $P(19900 \leq S \leq 20100)$:

Normalfordeling μ 20000 σ 40

P(19900 ≤ X ≤ 20100) = 0.9876

<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig kartong overholder vektkravet er 0,9876</u>

Ledelsen har mistanke om at maskinen som lager sjokoladeplatene, er stilt inn slik at sjokoladeplatene veier for lite. De vil plukke ut 100 tilfeldige sjokoladeplater i en kontroll.

d) Sett opp en hypotesetest som du kan bruke for å avgjøre om det er hold i mistanken.

Her kan vi enten sette opp en hypotesetest på den samlede vekten til sjokoladene eller ved hjelp av den gjennomsnittlige vekten.
Siden vi allerede har sannsynlighetsfordelingen til den samlede vekten av 100 sjokoladeplater, bruker vi den i hypotesetesten.

$H_0 : \mu_S = 20\,000$ $\quad H_1 : \mu_S < 20\,000$.

H_0 forkastes dersom $P(S \leq s) \leq \alpha$, der α er signifikansnivået og s er den målte samlede vekten

Ledelsen velger tilfeldig ut 100 sjokoladeplater. Det viser seg at gjennomsnittsvekten til disse er 199,1 gram. Vi antar at standardavviket fremdeles er 4 gram.

e) Utfør hypotesetesten, og avgjør om det er hold i mistanken. Bruk et signifikansnivå på 5 prosent.

$S = n \cdot \bar{X} = 100 \cdot 199{,}1 = 19\,910$, $\mu_S = 20\,000$, $\sigma_S = 40$, $\alpha = 0{,}05$

Normalfordeling μ 20000 σ 40

Vi sjekker så $P(S \leq 19910)$:

P(X ≤ 19910) = 0.0122

$P(S \leq 19910) = 0{,}0122 < 0{,}05 \Rightarrow H_0$ må forkastes

<u>Ledelsen har hold i mistanken om at sjokoladeplatene veier for lite</u>