Løsningsforslag eksamen 1P (LK20) – Høst 2021

Del 1

Oppgave 1

Når 15 elever utgjør 60 %, vil 5 elever utgjøre 20 %.
$5 \cdot 20\% = 100\%$ og $5 \cdot 5 = 25$.

Det er 25 elever i klassen

Oppgave 2

Når verdien har avtatt med 40 000 kroner det første året, er ny verdi 360 000 kroner.
10 % av 360 000 kroner, er ikke det samme som 10 % av 400 000 kroner, men mindre.
Vi ser altså at verditapet per år i kroner vil minke for hvert år, selv om det prosentvise verditapet er konstant.
$100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9$, så vekstfaktoren ved 10 % nedgang er 0,9.
Bilens verdi for tre år siden må altså multipliseres med 0,9 tre ganger for at vi skal komme dagens verdi.
La oss kalle bilens verdi da den ble kjøpt for *x*.
Da kan vi løse en likning og komme frem til et uttrykk for bilens verdi for tre år siden.

$$x \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 400000$$

$$x \cdot 0{,}9^3 = 400000$$

$$x = \underline{\underline{\frac{400000}{0{,}9^3} = 400000 \cdot 0{,}9^{-3}}}$$

Oppgave 3

a)

$$9t + 7 = 52$$

$$9t = 52 - 7$$

$$t = \frac{45}{9}$$

$$t = 5$$

Det går 5 timer før temperaturen i vannet er 52°C

b) Her er temperaturen *T* en lineær funksjon av tiden *t*. Tallet 9 er stigningstallet og tallet 7 er konstantleddet.
Det betyr at temperaturen til vannet i tanken øker med 9°C per time etter at strømmen kobles til. Det kalde vannet Morten fyller tanken med, før han kobler til strømmen, har en temperatur på 7°C.
(Når $t = 0$ har vi $T = 7$).

Oppgave 4

$$\text{Tid} = \frac{\text{Strekning}}{\text{Hastighet}}$$

$$\frac{12km}{80\,km/h} + \frac{12km}{60\,km/h} = \frac{12}{80}h + \frac{12}{60}h = \frac{3}{20}h + \frac{4}{20}h = \frac{7}{20}\cdot 60\,\text{min} = 7\cdot 3\,\text{min} = 21\,\text{min}$$

<u>Audun bruker 21 minutter på å kjøre gjennom tunnelen.</u>

Denne løsningsmetoden krever at en har god kontroll på formelregning og brøkregning. Det går også an å løse oppgaven ved hjelp av et resonnement:
Kjører man 60 km/h bruker man 1 minutt per kilometer. Siden 80km/h er 1/3 raskere, vil man komme 4/3 km på 1 minutt. Da bruker man 3 minutter på 4km, og dermed 9 minutter på 12 km. De siste 12 kilometerne kjører Audun i 60 km/h, og bruker da 12 minutter på disse.
Til sammen bruker da Audun 9 minutter + 12 minutter, som er 21 minutter.

Det finnes enda flere måter å komme frem til riktig løsning, og det går fint så lenge man forklarer tankegangen sin underveis.

Oppgave 5

a)

$$f(x) = ax + b = \frac{-1-3}{2-0}x + 3 = \frac{-4}{2}x + 3 = -2x + 3$$
$$g(x) = cx + d = \frac{-1-(-2)}{2-0}x - 2 = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\underline{\underline{f(x) = -2x + 3 \;\text{ og }\; g(x) = \frac{1}{2}x - 2}}$$

b) Grunnlinja i trekanten er gitt ved avstanden mellom nullpunktene til funksjonene, mens høyden i trekanten er gitt ved y-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafene.
(Men med positiv verdi, siden det er snakk om *avstanden* i rett linje fra x-aksen til punktet).
Høyden i trekanten er altså 1.
Bestemmer nullpunktene til funksjonene:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x + 3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}x - 2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Avstanden mellom nullpunktene er da $4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

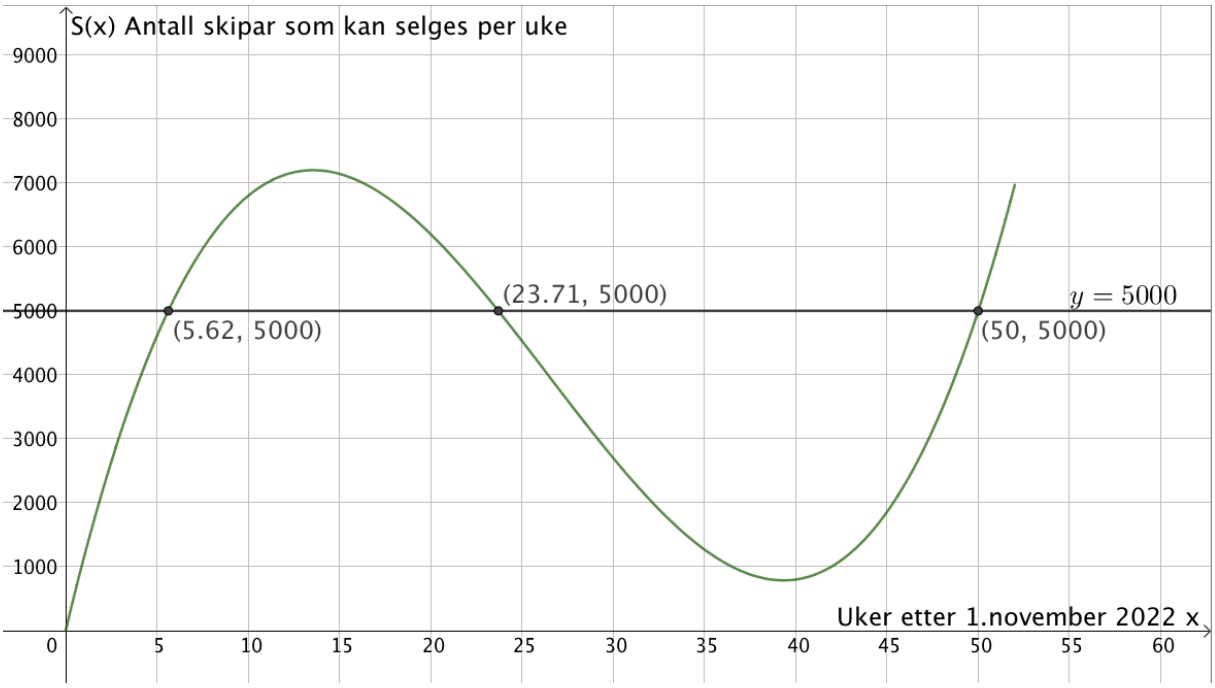
Vi kan da beregne arealet:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

Del 2

Oppgave 1

a) Tegner grafen til S sammen med linja $y=5000$, og finner skjæringspunktene mellom grafen og linja ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



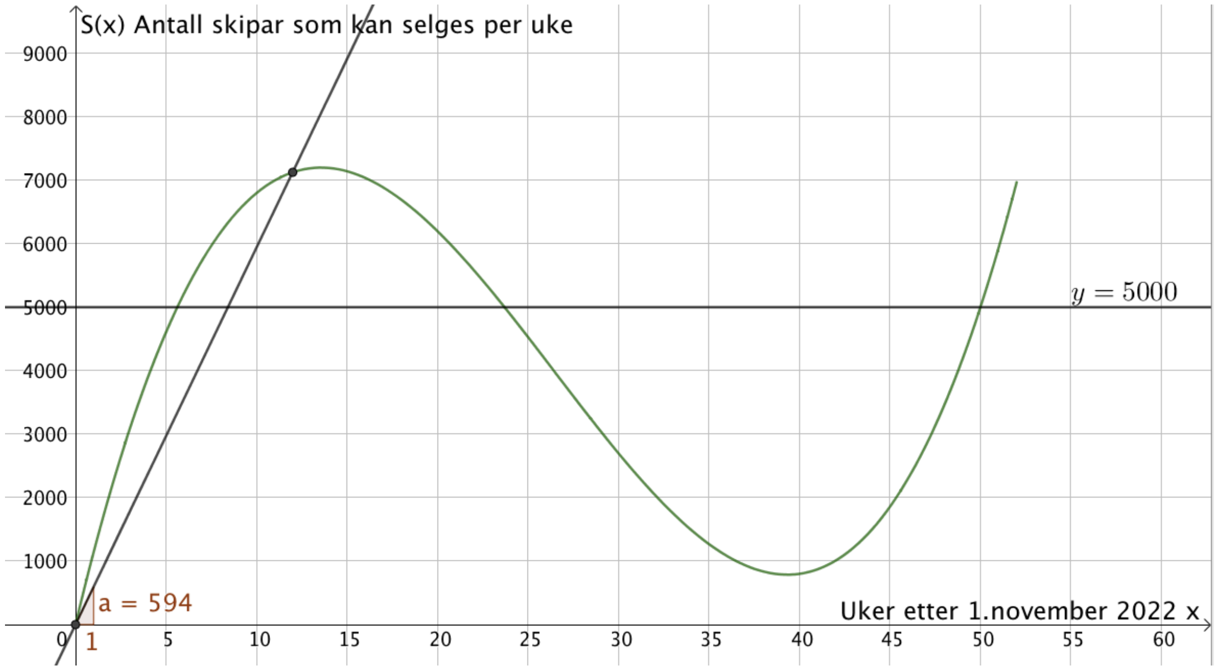
Vi ser at butikken vil kunne selge mer enn 5000 skipar per uke i en 18-ukersperiode fra starten av desember 2022 og ut på vårparten i 2023, samt de siste to ukene av oktober 2023.

<u>I følge modellen kan butikken selge mer enn 5000 skipar per uke i 20 uker</u>.

b) Markerer punktene ved å skrive $(0,S(0))$ og $(12,S(12))$ i inntastingsfeltet.

Tegner linja gjennom punktene og bestemmer stigningstallet ved hjelp av *stigning.*

(Se bildet øverst på neste side)



<u>Stigningstallet til linja gjennom punktene (0, S(0)) og (12, S(12)) er 594</u>.

Svaret forteller at antall skipar butikken kan selge per uke, øker med 594 per uke i gjennomsnitt de 12 første ukene etter salgsstarten 1.november 2022.

Oppgave 2

a) $10{,}2 \cdot 9kcal + 12{,}4 \cdot 4kcal + 0{,}3 \cdot 3kcal = 91{,}8kcal + 49{,}6kcal + 0{,}9kcal = 142{,}3kcal$
<u>Energiinnholdet i 100 gram kokt egg er 142,3kcal</u>

b) $125g \cdot 0{,}88 = 110g$, så Tobias spiser 110 gram egg.
(Energiinnholdet i 110 gram egg er 10% høyere enn i 100 gram egg)

$$\frac{\text{Energiinnholdet i 110 gram egg}}{\text{Energibehov per dag}} = \frac{142{,}3kcal \cdot 1{,}1}{3000kcal} = \frac{156{,}53}{3000} \approx 0{,}052 = 5{,}2\%$$

<u>De to eggene utgjorde omtrent 5,2 % av Tobias' daglige energibehov.</u>

Oppgave 3

a) Dersom bestanden øker lineært har vi en modell på formen $L(x) = ax + b$, der a er stigningstallet (hvor mange individer bestanden øker med per år), mens b er antall individer i bestanden i starten av perioden.
En dobling av bestanden, betyr en økning på 500 individer.

$a = \frac{500}{10} = 50$, så bestanden må øke med 50 individer per år.

$$\underline{\underline{L(x) = 50x + 500}}$$

b) Vi har en eksponentiell modell på formen $E(x) = a \cdot b^x$, der *a* er antall individer i bestanden i starten av perioden, mens *b* er vekstfaktoren til den prosentvise økningen per år.

Vi har da:

$$500 \cdot b^{10} = 1000$$

$$b^{10} = \frac{1000}{500}$$

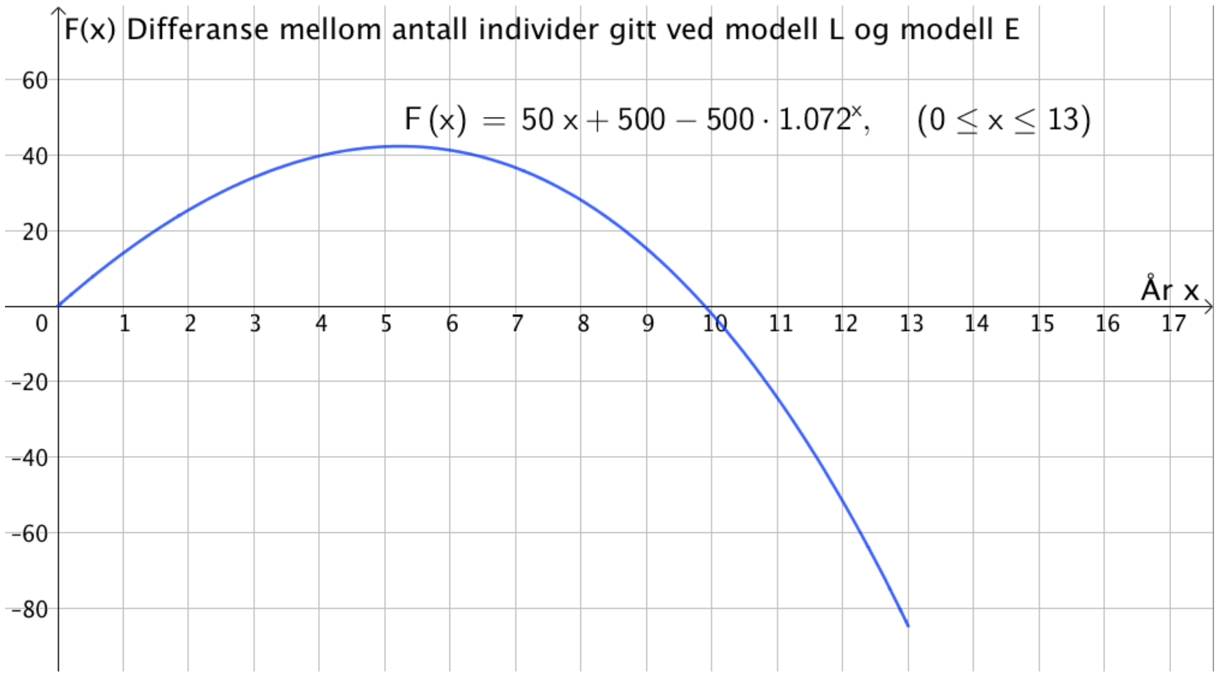
$$b^{10} = 2$$

$$b = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}072$$

(Siden *b* her er vekstfaktor, vet vi at *b*>0, så finner bare positiv løsning av likningen)

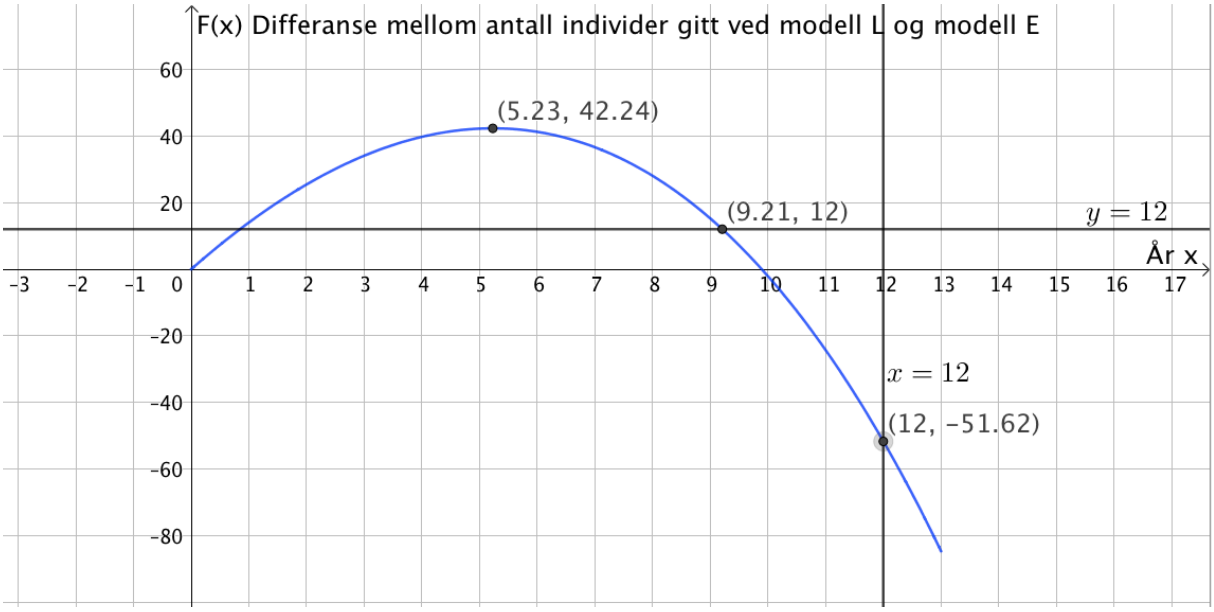
$$\underline{\underline{E(x) = 500 \cdot 1{,}072^x}}$$

c)



d) Bruker kommandoen *"Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og bestemmer toppunktet på grafen til *F*.
Tegner linjene *x* = 12 og *y* = 12 og bestemmer skjæringspunktet mellom hver av dem og grafen til *F* ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*

(Se bildet øverst på neste side)



Koordinatene til toppunktet på grafen til *F* og skjæringspunktet mellom de rette linjene og grafen til *F*, fremgår tydelig på bildet over.

Koordinatene til toppunktet forteller at den største forskjellen mellom estimatene i de ulike modellene forekommer etter litt over 5 år. Da vil det være omtrent 42 flere individer i bestanden om man følger antagelsen i den lineære modellen sammenlignet med antagelsen i den eksponentielle modellen.

Skjæringspunktet mellom grafen til *F* og linja *x*=12, forteller at den eksponentielle modellen angir omtrent 52 flere individer enn den lineære etter 12 år.

Skjæringspunktet mellom grafen til *F* og linja *y*=12, forteller at den lineære modellen angir 12 flere individer enn den eksponentielle etter litt over 9 år.

Oppgave 4

Påstand 1:
Denne påstanden stemmer ikke nødvendigvis, for det er ikke gitt at utgiftene til klassefesten er konstant, uavhengig av antall deltakere. Hvis det koster 5000 kroner å arrangere festen om 10 elever deltar, men 8000 om 20 elever deltar, vil ikke beløpet hver elev må betale være omvendt proporsjonal med antallet elever.
Hvis vi forutsetter at utgiftene har en fast størrelse, uavhengig av antall deltakere, vil det derimot være slik at pris per deltaker er omvendt proporsjonalt med antall deltakere, da produktet av disse størrelsene alltid vil være lik den faste utgiften til arrangementet.

Påstand 2:
Denne påstanden stemmer ikke. Dersom to størrelser *x* og *y* er proporsjonale, vil forholdet mellom dem være konstant og sammenhengen mellom dem kan beskrives ved hjelp av ei rett linje gjennom origo. $y = 2x + 4$ er likningen til ei rett linje som *ikke* går gjennom origo, men her vil likevel *y* øke når *x* øker. Det er altså *ikke* slik at to størrelser alltid er proporsjonale dersom det er slik at når den ene øker, øker også den andre.

Påstand 3:
Denne påstanden er ikke nødvendigvis sann. Dersom to størrelser er omvendt proporsjonale på produktet av dem være konstant. Det innebærer at det også må være slik at den ene størrelsen blir redusert til en tredjedel når den andre tredobles, for eksempel at den ene størrelsen endres fra 6 til 2 når den andre endres fra 12 til 36. Eventuelt at den ene reduseres til en tiendedel når den andre tidobles, for eksempel at den ene reduseres fra 10 til 1 når den andre øker fra 20 til 200.
Det er altså ikke nok å se på dobling/halvering alene for å avgjøre om to størrelser er omvendt proporsjonale.

Påstand 4:

$$\frac{\text{Areal}}{\text{Omkrets}} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$$

$\frac{r}{2}$ er ikke konstant, så arealet er ikke proporsjonalt med omkretsen.
Når vi skal sjekke en påstand, holder det å finne ett mot-eksempel for å kunne forkaste påstanden. Så vi kan også bruke konkrete beregninger til å begrunne at påstanden ikke stemmer.
Hvis vi setter $r = 1$, har vi $A = \pi$ og omkretsen er 2π.
Hvis vi videre setter $r = 2$, har vi $A = 4\pi$, og omkretsen er også 4π.
Vi ser altså at når arealet blir fire ganger større, blir omkretsen bare to ganger større. Arealet og omkretsen er altså ikke proporsjonale størrelser.

Oppgave 5

$150\% = 1{,}5$, så vekstfaktoren ved 50 % økning er 1,5.

$10\% \cdot 1{,}5 = 15\%$

<u>Den nye saftblandingen vil inneholde 15 % sukker</u>.

Oppgave 6

a) Når en verdi synker først med 20 % og deretter med 14 %, må vi multiplisere vekstfaktorene til de to endringene for å bestemme vekstfaktoren til den totale endringen.
Vekstfaktor ved 20 % nedgang: $100\% - 20\% = 80\% = 0{,}8$
Vekstfaktor ved 14 % nedgang: $100\% - 14\% = 86\% = 0{,}86$

$$0{,}8 \cdot 0{,}86 = 0{,}688 = 68{,}8\%$$

$$og$$

$$100\% - 68{,}8\% = 31{,}2\% \approx 31\%$$

Vi ser altså at den totale nedgangen er på 31%, <u>som skulle vises</u>.

b)

	A	B	C
1	Verdifall i prosent		
2	År	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny
3	1	20 %	20 %
4	2	14 %	31 %
5	3	13 %	40 %
6	4	12 %	47 %
7	5	11 %	53 %
8	6	10 %	58 %

Formler:

	A	B	C
1	Verdifall i prosent		
2	År	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny
3	1	0,2	0,2
4	2	0,14	0,31
5	3	0,13	=1-(1-B5)*(1-C4)
6	4	0,12	=1-(1-B6)*(1-C5)
7	5	0,11	=1-(1-B7)*(1-C6)
8	6	0,1	=1-(1-B8)*(1-C7)

c)

	A	B	C	D	E	F
1	Verdifall i prosent				Verdifall i kroner	
2	År	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny	Bilens verdi	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny
3	1	20 %	20 %	kr 312 000	kr 78 000	kr 78 000
4	2	14 %	31 %	kr 269 100	kr 42 900	kr 120 900
5	3	13 %	40 %	kr 234 117	kr 34 983	kr 155 883
6	4	12 %	47 %	kr 206 023	kr 28 094	kr 183 977
7	5	11 %	53 %	kr 183 360	kr 22 663	kr 206 640
8	6	10 %	58 %	kr 165 024	kr 18 336	kr 224 976

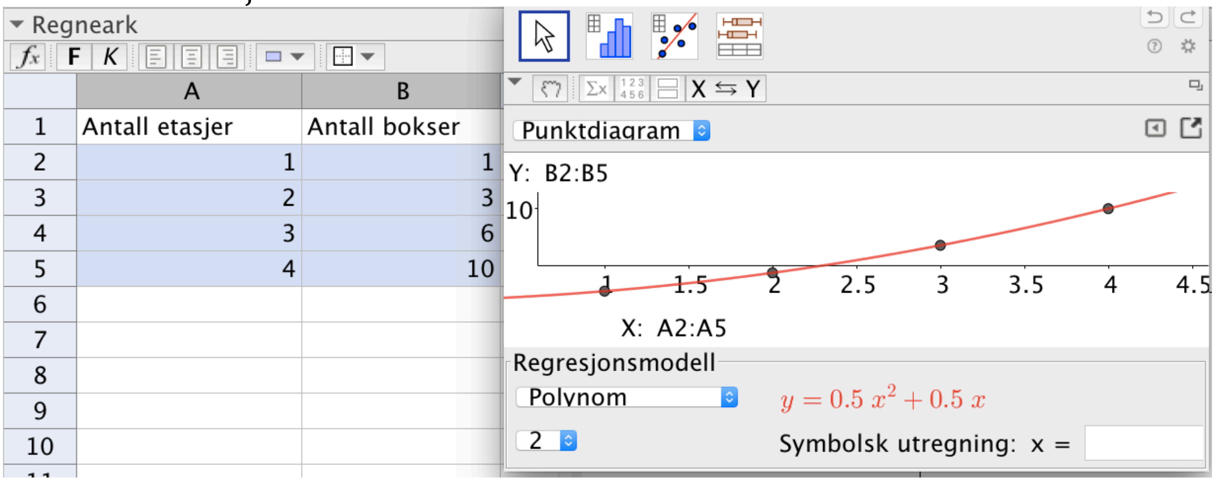
Formler:

	A	B	C	D	E	F
1	Verdifall i prosent				Verdifall i kroner	
2	År	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny	Bilens verdi	Sammenliknet med verdien året før	Sammenlignet med verdien som ny
3	1	0,2	0,2	=390000*(1-C3)	=390000-D3	=390000-D3
4	2	0,14	0,31	=390000*(1-C4)	=D3-D4	=390000-D4
5	3	0,13	=1-(1-B5)*(1-C4)	=390000*(1-C5)	=D4-D5	=390000-D5
6	4	0,12	=1-(1-B6)*(1-C5)	=390000*(1-C6)	=D5-D6	=390000-D6
7	5	0,11	=1-(1-B7)*(1-C6)	=390000*(1-C7)	=D6-D7	=390000-D7
8	6	0,1	=1-(1-B8)*(1-C7)	=390000*(1-C8)	=D7-D8	=390000-D8

Her ble bildene litt små, og ikke helt ideelle sånn kommunikasjonsmessig. Dere som bruker løsningsforslaget, har jo mulighet til å zoome inn, så lenge dere har det digitalt. Hadde jeg skulle levere dette som en besvarelse av eksamen, hadde jeg nok brukt egne sider til de to siste bildene, og da gjerne med siden i liggende format, slik at jeg kunne presentere store og oversiktlige bilder.

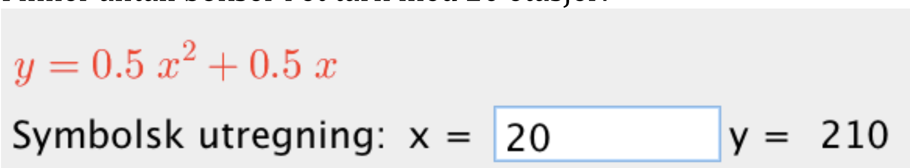
Oppgave 7

a) Bruker regresjonsanalyse i GeoGebra til å bestemme et uttrykk for antall bokser i et tårn med *x* etasjer.



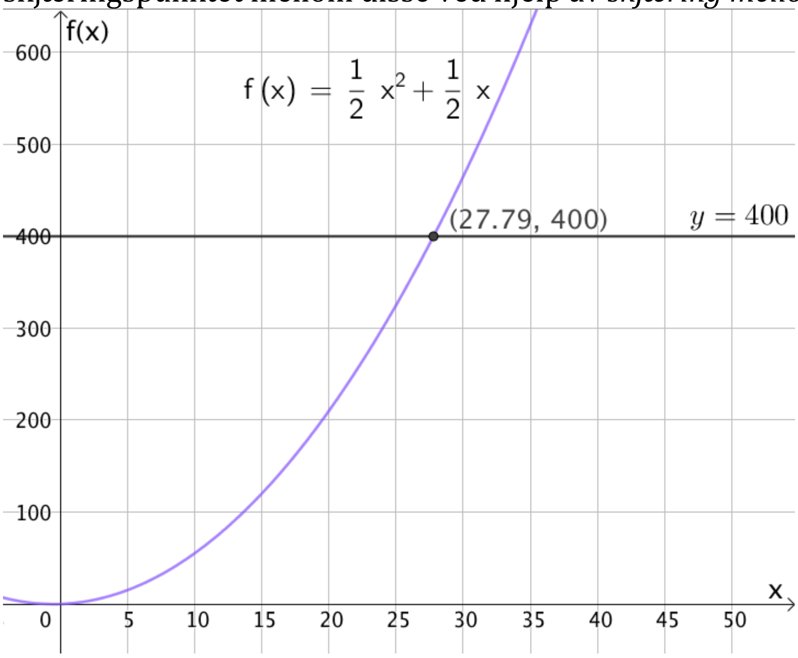
Ser at antall bokser i et tårn med *x* etasjer er $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Finner antall bokser i et tårn med 20 etasjer:



<u>Marius trenger 210 bokser for å lage et tårn med 20 etasjer</u>.

b) Tegner grafen til $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ sammen med linja $y = 400$ og bestemmer skjæringspunktet mellom disse ved hjelp av *skjæring mellom to objekt*.



<u>Det største tårnet Marius kan lage er et tårn med 27 etasjer</u>.

c) Figuren er bygget opp slik at hver etasje er et trekanttall. Antall bokser i en stabel med *n* etasjer er altså summen av de *n* første trekanttallene.

Trekanttallene er gitt ved $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lager et regneark som viser sammenhengen mellom antall etasjer og antall bokser.

	A	B	C
1	Etasjenummer	Antall bokser i etasjen	Antall bokser totalt
2	1	1	1
3	2	3	4
4	3	6	10
5	4	10	20
6	5	15	35
7	6	21	56
8	7	28	84
9	8	36	120
10	9	45	165
11	10	55	220
12	11	66	286
13	12	78	364
14	13	91	455
15	14	105	560
16	15	120	680
17	16	136	816
18	17	153	969
19	18	171	1140
20	19	190	1330
21	20	210	1540
22			

Formler:

	A	B	C
1	Etasjenummer	Antall bokser i etasjen	Antall bokser totalt
2	1	=A2*(A2+1)/2	=B2
3	2	=A3*(A3+1)/2	=C2+B3
4	3	=A4*(A4+1)/2	=C3+B4
5	4	=A5*(A5+1)/2	=C4+B5
6	5	=A6*(A6+1)/2	=C5+B6
7	6	=A7*(A7+1)/2	=C6+B7
8	7	=A8*(A8+1)/2	=C7+B8
9	8	=A9*(A9+1)/2	=C8+B9
10	9	=A10*(A10+1)/2	=C9+B10
11	10	=A11*(A11+1)/2	=C10+B11
12	11	=A12*(A12+1)/2	=C11+B12
13	12	=A13*(A13+1)/2	=C12+B13
14	13	=A14*(A14+1)/2	=C13+B14
15	14	=A15*(A15+1)/2	=C14+B15
16	15	=A16*(A16+1)/2	=C15+B16
17	16	=A17*(A17+1)/2	=C16+B17
18	17	=A18*(A18+1)/2	=C17+B18
19	18	=A19*(A19+1)/2	=C18+B19
20	19	=A20*(A20+1)/2	=C19+B20
21	20	=A21*(A21+1)/2	=C20+B21
22			

<u>Maria trenger 1540 bokser for å lage et tårn med 20 etasjer.</u>

d) Utvider regnearket, med samme formler videre, og ser når antall bokser totalt har passert 4000:

21	20	210	1540
22	21	231	1771
23	22	253	2024
24	23	276	2300
25	24	300	2600
26	25	325	2925
27	26	351	3276
28	27	378	3654
29	28	406	4060

<u>Det største tårnet Maria kan lage vil ha 27 etasjer.</u>

Oppgave 7

a) Blått kvadrat: $(11-2)(12-1) = 9 \cdot 11 = \underline{\underline{99}}$

Grønt kvadrat: $(37-28)(38-27) = 9 \cdot 11 = \underline{\underline{99}}$

b) Gjør flere beregninger tilsvarende beregningene i oppgave a)

$$(81-72)(82-73)=9\cdot 11=99$$
$$(56-47)(57-46)=9\cdot 11=99$$
$$(69-60)(70-59)=9\cdot 11=99$$

Ser at algoritmen gir oss $9\cdot 11=99$ hver gang.

Forklaring:
Når vi beveger oss én rad ned og én plass til venstre, vil sifferet på ”tierplassen” øke med én, samtidig som sifferet på ”enerplassen” reduseres med én. Det betyr at vi alltid vil komme til et tall som er 9 større når vi beveger oss diagonalt, ned til venstre, fra en rute til en annen.
Når vi beveger oss én rad ned og én plass til høyre, vil sifferet på ”tierplassen” øke med én, samtidig som sifferet på ”enerplassen” også øker med én. Det betyr at vi alltid vil komme til et tall som er 11 større når vi beveger oss diagonalt, ned til høyre, fra en rute til en annen.
Når vi gjennomfører algoritmen i oppgaveteksten, er det disse differansene vi finner og multipliserer med hverandre.

c) Tar utgangspunkt i det blå kvadratet, og utvider med én rad og én kolonne, slik at vi får 3x3-kvadrat, 4x4-kvadrat osv... og gjennomfører algoritmen på disse.

$$(21-3)(23-1)=18\cdot 22=396$$
$$(31-4)(34-1)=27\cdot 33=891$$
$$(41-5)(45-1)=36\cdot 44=1584$$

Vi ser at i et 3x3-kvadrat får vi $2\cdot 9\cdot 2\cdot 11$, i et 4x4-kvadrat får vi $3\cdot 9\cdot 3\cdot 11$ og i et 5x5-kvadrat får vi $4\cdot 9\cdot 4\cdot 11$.

Vi kan altså anta at vi i et *n* x *n*-kvadrat vil få $(n-1)\cdot 9\cdot (n-1)\cdot 11=99(n-1)^2$

Tar utgangspunkt i forklaringen i b).
Det er altså slik at hver gang vi beveger oss diagonalt, ned til venstre, fra en rute til en annen, får vi et tall som er 9 større. Det betyr at differansen mellom ruten nederst til venstre i et *n* x *n*-kvadrat vil være $9(n-1)$.

(Vi ”går” ett skritt mindre enn antall ruter i diagonalen)
Hver gang vi beveger oss diagonalt, ned til høyre, fra en rute til en annen, får vi et tall som er 11 større. Det betyr at differansen mellom ruten nederst til venstre i et *n* x *n*-kvadrat vil være $11(n-1)$.

Produktet av disse er, som vist, $(n-1)\cdot 9\cdot (n-1)\cdot 11=99(n-1)^2$

Kommentar:
Fagfornyelsen er fortsatt ganske ”fersk”, så er litt vrient å vite hvor mye man krever for full uttelling på slike utforskingsoppgaver. Det er mulig at man kan komme frem til enda mer enn jeg gjør her, men dette er i alle fall et eksempel på besvarelse. Begrensningene ligger litt i hvor mye tid man har anledning til å bruke, avhengig av resten av besvarelsen.
I utgangspunktet har mann i gjennomsnitt 5 minutter per poeng på en eksamen (300 minutter til rådighet på 60 mulige poeng). Da vil tidsrammen på denne oppgaven være en helt time.