Løsningsforslag eksamen R1 (LK06) Høsten 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = 2x^3 - \ln x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{6x^2 - \frac{1}{x}}}$

b)

$$g(x) = x \cdot e^{-2x^2}$$

$$gir$$

$$g'(x) = 1 \cdot e^{-2x^2} + x \cdot e^{-2x^2}(-4x) = \underline{\underline{e^{-2x^2} - 4x^2 e^{-2x^2} = (1-4x^2)e^{-2x^2}}}$$

c)

$$h(x) = \frac{2x+2}{e^x}$$

$$gir$$

$$h'(x) = \frac{2 \cdot e^x - (2x+2)e^x}{(e^x)^2} = \frac{2-(2x+2)}{e^x} = \frac{2-2x-2}{e^x} = \underline{\underline{-\frac{2x}{e^x}}}$$

Oppgave 2

a)

$$100^x + 10 = 11 \cdot 10^x$$

$$(10^2)^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$$

$$10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$$

$u = 10^x$ gir $u^2 - 11u + 10 = (u-1)(u-10) = 0$, så $u = 1 \vee u = 10$.

Da har vi:

$$10^x = 1 \vee 10^x = 10$$

$$så$$

$$\underline{\underline{x = 0 \vee x = 1}}$$

b)

$$\lg x = \lg 6 - 2\lg 3 + \lg 2$$
$$\lg x = \lg 6 - \lg 3^2 + \lg 2$$
$$\lg x = \lg\left(\frac{6}{9}\right) + \lg 2$$
$$\lg x = \lg\left(\frac{2}{3}\cdot 2\right)$$
$$\lg x = \lg\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$\underline{\underline{x = \frac{4}{3}}}$$

Oppgave 3

- $3\sqrt{11} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{11} = \sqrt{99} < \sqrt{100} = 10$
- $\lg 9 < 1$, så $10\cdot\lg 9 < 10$
- $9 > e^2$, så $5\ln 9 > 5\cdot 2$

$\underline{\underline{3\sqrt{11}\ \text{ og } 10\lg 9 \text{ er mindre enn } 10}}$

Oppgave 4

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2 - 4^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{16+8h+h^2-16}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+8h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+8)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+8) = \underline{\underline{8}}$$

Oppgave 5

a) Dersom $x = -6$ er nullpunkt for $f(x)$, er $(x-6)$ faktor i $f(x)$.

$$f(-6) = (-6)^3 + 5(-6)^2 - 8(-6) - 12 = -216 + 5\cdot 36 + 48 - 12 = -216 + 180 + 48 - 12 = 0$$

$(x-6)$ er faktor i $f(x)$. <u>Som skulle vises</u>.

Gjennomfører polynomdivisjonen og faktoriserer.

$$(x^3 + 5x^2 - 8x - 12) : (x+6) = x^2 - x - 2$$
$$\underline{x^3 + 6x^2}$$
$$-x^2 - 8x - 12$$
$$\underline{-x^2 - 6x}$$
$$-2x - 12$$
$$\underline{-2x - 12}$$
$$0$$

$$f(x) = (x+6)(x^2 - x - 2) = \underline{\underline{(x+6)(x+1)(x-2)}}$$

b)

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 8$$
$$så$$
$$f'(x) = 0$$
$$gir$$
$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+96}}{6} = \frac{-10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-10 \pm 14}{6} = \frac{-5 \pm 7}{3}$$
$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ og } x_2 = -4$$

Grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"). Det betyr at den deriverte går fra positiv til negativ i $x = -4$ og fra negativ til positiv i $x = \frac{2}{3}$.

Da har altså grafen til *f* et bunnpunkt i $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$, <u>som skulle vises</u>.

Det andre ekstremalpunktet er $\underline{\underline{x = -4}}$. (Toppunkt i $\left(-4, f(-4)\right)$)

c) Vendepunktet på grafen til *f* har samme *x*-koordinat som bunnpunktet på grafen til den deriverte av *f*, som ligger midt mellom nullpunktene på grafen til den deriverte av *f*. (Altså gjennomsnittet av disse nullpunktene).

$$\frac{-4 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{-\frac{12}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{-\frac{10}{3}}{2} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

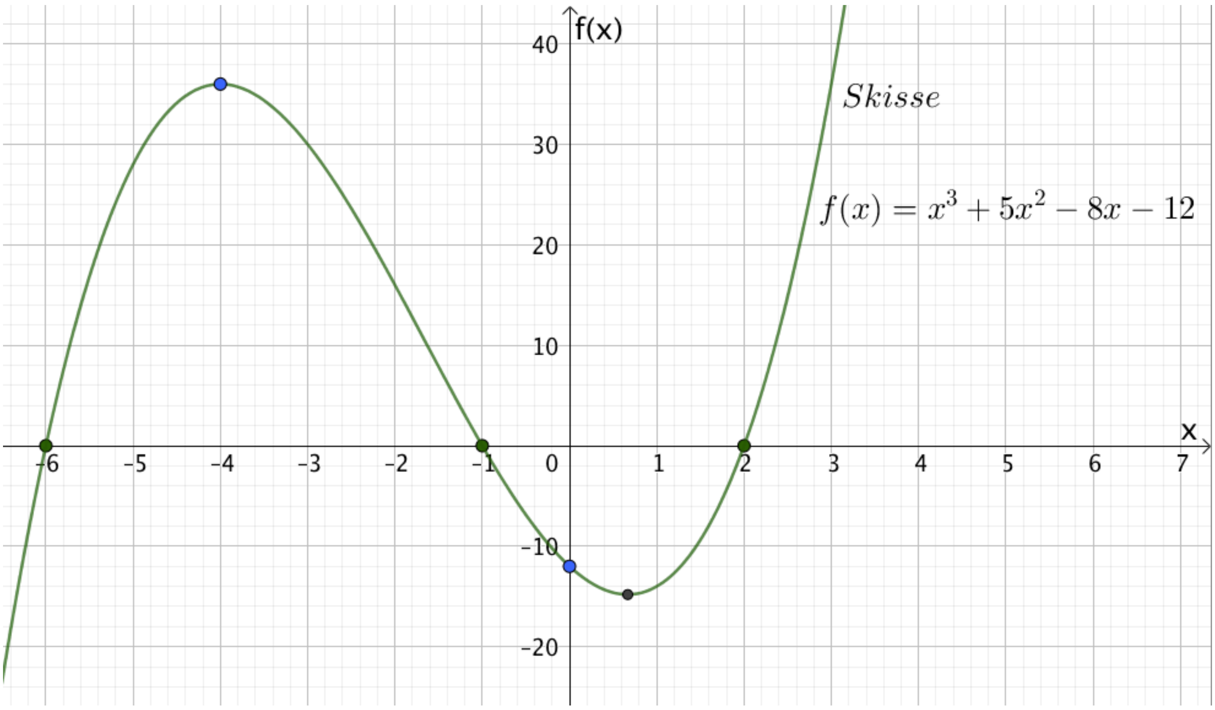
(For ordens skyld kan det nevnes at grafen til den andrederiverte vil være ei rett linje, slik at den andrederiverte skifter fortegn i nullpunktet sitt. Da er nullpunktet til den andrederiverte *x*-koordinat til et vendepunkt på grafen til *f*).

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har ett vendepunkt, og dette vendepunktet har } x-\text{koordinat } -\frac{5}{3}}}$$

d) $f(-4) = (-4)^3 + 5(-4)^2 - 8(-4) - 12 = -64 + 80 + 32 - 12 = 36$.

Markerer nullpunktene, toppunktet og bunnpunktet grafen til *f* i et koordinatsystem. Bruker også konstantleddet, som forteller hvor grafen krysser *y*-aksen. Tegner en jevn kurve gjennom punktene.

(Se neste side)



Oppgave 6

a) Deler vennegjengen inn i to grupper, der den ene gruppen består av Anita og Lars, mens den andre gruppen består av de resterende seks vennene.
Da har vi en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell og kan bestemme sannsynligheten for å trekke ut både Anita og Lars til jobben med å sette opp teltene.

$$\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{1\cdot 6}{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{6}{8\cdot 7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

Sannsynligheten for at både Anita og Lars blir trukket ut til å sette opp teltene er $\underline{\underline{\frac{3}{28}}}$

b) Bestemmer sannsynligheten for at verken Anita eller Lars blir trukket ut til å sette opp teltene.
Dette er det samme som å bestemme sannsynligheten for at *begge* blir satt til å lage mat.

$$\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{5\cdot 4}{8\cdot 7} = \frac{20}{56} = \frac{10}{28}$$

Sannsynligheten for at Anita og Lars blir trukket ut til de samme arbeidsoppgavene er altså $\frac{3}{28}+\frac{10}{28}=\frac{13}{28}$.

Da er sannsynligheten for at de *ikke* blir trukket ut til å gjøre de samme arbeidsoppgavene $1-\frac{13}{28}=\frac{28}{28}-\frac{13}{28}=\frac{15}{28}$.

Sannsynligheten for at Anita og Lars ikke trekkes ut til å gjøre de samme arbeidsoppgavene er $\underline{\underline{\frac{15}{28}}}$

Oppgave 7

a)

$$\overrightarrow{PA}=[5-1,9-1]=[4,8]$$
$$\overrightarrow{PB}=[5-9,9-7]=[-4,2]$$
$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=[4,8]\cdot[-4,2]=4(-4)+8\cdot 2=-16+16=0,\text{ så } \overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$$

$\angle APB=90^\circ$, som skulle vises.

b) $\overrightarrow{AB}=[9-1,7-1]=[8,6]=2[4,3]$, så $\vec{r}=[4,3]$ er en retningsvektor for ℓ.

Vi vet at ℓ går gjennom punktet *P*, så setter opp en parameterfremstilling for ℓ.

$$\ell:\begin{cases}x=5+4t\\ y=9+3t\end{cases}$$

Punktet *Q* ligger på ℓ, så da har vi

$$\overrightarrow{QA}=[1-(5+4t),1-(9+3t)]=[-4t-4,-3t-8]$$
$$\overrightarrow{QB}=[9-(5+4t),7-(9+3t)]=[-4t+4,-3t-2]$$

$$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=0$$

gir

$$[-4t-4,-3t-8]\cdot[-4t+4,-3t-2]=0$$
$$(-4t-4)(-4t+4)+(-3t-8)(-3t-2)=0$$
$$16t^2-16+9t^2+6t+24t+16=0$$
$$25t^2+30t=0$$
$$5t(5t+6)=0$$

så

$$t=0\vee t=-\frac{6}{5}$$

$t=0$ gir punktet *P*, så setter $t=-\dfrac{6}{5}$ inn i parameterfremstillingen for ℓ for å bestemme koordinatene til *Q*.

$x=5+4\left(-\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{25}{5}-\dfrac{24}{5}=\dfrac{1}{5}$ og $y=9+3\left(-\dfrac{6}{5}\right)=\dfrac{45}{5}-\dfrac{18}{5}=\dfrac{27}{5}$.

$$\underline{\underline{\text{Punktet } Q \text{ har koordinater } \left(\frac{1}{5},\frac{27}{5}\right)}}$$

Oppgave 8

a) Likningen til ℓ_1 gir $y=3-x$. Setter dette inn i likningen for sirkelen.

$$x^2-2x+(3-x)^2-4(3-x)=-3$$
$$x^2-2x+9-6x+x^2-12+4x+3=0$$
$$2x^2-4x=0$$
$$2x(x-2)=0$$
$$gir$$
$$x=0\vee x=2$$

$x=0$ gir $y=3-0=3$ og $x=2$ gir $y=3-2=1$

$$\underline{\underline{\text{Skjæringspunktene mellom sirkelen og } \ell_1 \text{ er } (0,3) \text{ og } (2,1)}}$$

b) Bestemmer sentrum og radius i sirkelen.

$$x^2-2x+y^2-4y=-3$$
$$x^2-2x+1+y^2-4y+4=-3+1+4$$
$$(x-1)^2+(y-2)^2=2$$

Sirkelen har sentrum i $(1,2)$ og radius er $\sqrt{2}$.

Diagonalen til et kvadrat med sidelengde 1 er $\sqrt{2}$, så da vet vi at sirkelen tangerer et kvadrat med hjørner i $(0,1)$, $(2,1)$, $(2,3)$ og $(0,3)$.

Det betyr at linja ℓ_1 er diagonal i kvadratet som er innskrevet i sirkelen og at diameteren til sirkelen ligger langs denne linja. Linja ℓ_1 har stigningstall -1. Likningen til linja ℓ_2 kan skrives som $y=-x+k$, så den har også stigningstall -1 og er parallell med ℓ_1.

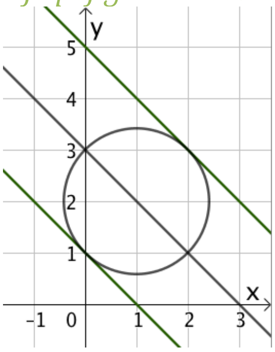
Det betyr at ℓ_2 tangerer sirkelen hvis den går gjennom punktet $(0,1)$ eller punktet $(2,3)$.

Går ℓ_2 gjennom $(0,1)$, er konstantleddet 1.

Går ℓ_2 gjennom $(2,3)$, er konstantleddet 5.

$$\underline{\underline{\text{Linja } \ell_2 \text{ tangerer sirkelen for } k=1 \ \lor\ k=5}}$$

Hjelpefigur til resonnementet i løsningen over:



Oppgave 9

a) Summen av gradene til to nabovinkler er $180°$, så $\angle ACD = 180° - 110° = 70°$.

ΔABC er likebeint, så $v = \dfrac{180° - u}{2} = \dfrac{180° - 110°}{2} = \dfrac{70°}{2} = 35°$.

Vinkel $\angle ACB$ er en periferivinkel på $110°$, så den spenner over en bue på $220°$.

Den $\angle ASB$ som dannes i et hjørne av firkant $ASBC$ er da en sentralvinkel som spenner over en bue på $360° - 220° = 140°$.

ΔASB er likebeint, så $\angle SAC = \dfrac{180° - 140°}{2} = \dfrac{40°}{2} = 20°$.

Linjestykket *DA* ligger langs en tangent til sirkelen, og *A* er tangeringspunktet.

Da har vi at $\angle DAS = 90°$.

Dette gir $\angle DAC = 90° - 20° - 35° = 35°$.

Vi kan nå bestemme $\angle ADC$.

$\angle ADC = 180° - 70° - 35° = \underline{\underline{75°}}$

b) Dersom *S* hadde ligget *på* linjestykket, eller rettere sagt dersom linjestykket *AB* gikk gjennom *S*, ville $\angle ACB$ være en periferivinkel som spenner over diameteren i sirkelen. $\angle ACB$ ville altså spenne over en bue på $180°$.

Da ville vi hatt $u = 90°$.

Når vi da flytter punktene *A* og *B* nærmere *C*, slik at *S* havner utenfor ΔABC, vil $\angle ACB$ spenne over en større bue, slik at $u > 90°$.

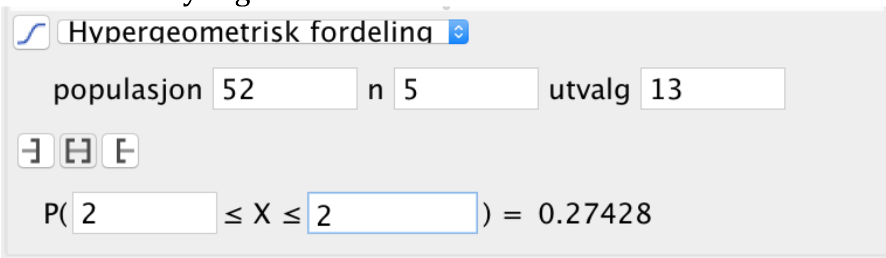
$u > 90°$ når S ligger utenfor ΔABC. Som skulle begrunnes.

Del 2

Oppgave 1

a) $P\left(\text{Alle de fem kortene er hjerter}\right)=\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}\cdot\frac{11}{50}\cdot\frac{10}{49}\cdot\frac{9}{48}\approx \underline{\underline{0{,}0005=0{,}05\%}}$

b) Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Bruker sannsynlighetskalkultatoren i GeoGebra.



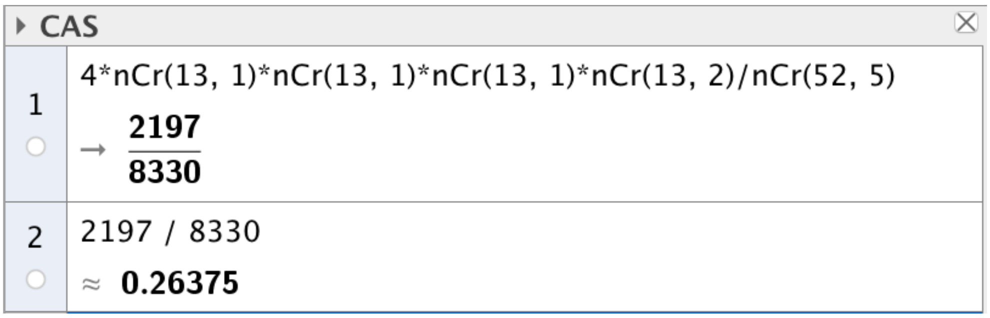
<u>Sannsynligheten for at nøyaktig to av de fem kortene er hjerter er ca. 27,4%</u>

c) Her må det trekkes ut ett kort av hver type for tre av korttypene, mens det må trekkes to kort av den siste korttypen. Dette kan skje på fire ulike måter, som alle er like sannsynlige siden det er like mange av hver korttype i kortstokken.

Vi må regne ut verdien av uttrykket

$$4\cdot\frac{\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

Bruker CAS:



<u>Sannsynligheten for at det er minst ett kort av hver type er ca. 26,4 %.</u>

Oppgave 2

a) Setter jeg $t=2$ inn i parameterfremstillingen for ℓ, får jeg $x=24$ og $y=10$, som er koordinatene til *C*.
Punktet *C* ligger på ℓ. Som skulle vises.

b) Bruker definisjonen av skalarproduktet.

CAS

1	A:=(0,0) $\rightarrow$ $A := (0,0)$
2	B:=(9,1) $\rightarrow$ $B := (9,1)$
3	C:=(24,10) $\rightarrow$ $C := (24,10)$
4	u:=Vektor(A, B) $\rightarrow u := \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$
5	v:=Vektor(A, C) $\rightarrow v := \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix}$
6	u*v=abs(u)*abs(v)*cos(x°) NLøs: $\{x = -16.28, x = 16.28\}$

$$\underline{\underline{\angle BAC = 16{,}28°}}$$

c) Bruker parameterfremstillingen for ℓ og setter $D=(12t,5t)$.

Videre bruker jeg definisjonen av skalarproduktet til å bestemme *t*.

1	A:=(0,0) $\rightarrow$ $A := (0,0)$
2	B:=(9,1) $\rightarrow$ $B := (9,1)$
3	D:=(12t,5t) $\rightarrow$ $D := (12\,t, 5\,t)$
4	a:=Vektor(D, B) $\rightarrow a := \begin{pmatrix} 9-12\,t \\ 1-5\,t \end{pmatrix}$
5	b:=Vektor(D, A) $\rightarrow b := \begin{pmatrix} -12\,t \\ -5\,t \end{pmatrix}$
6	a*b=abs(a)*abs(b)*cos(120°) Løs: $\left\{t = 0, t = \frac{-11\sqrt{3}+113}{169}\right\}$

$t=0$ gir punktet *A*, så må bruke den andre løsningen for å bestemme *D*.

7	ByttUt(D,t = HøyreSide($6,2))
	$\rightarrow \left(\frac{-132\sqrt{3}+1356}{169}, \frac{-55\sqrt{3}+565}{169}\right)$

D har koordinater $\left(\frac{1356-132\sqrt{3}}{169}, \frac{565-55\sqrt{3}}{169}\right) \approx (6{,}7\ ,\ 2{,}8)$

d) Vi lar *AB* være grunnlinje i trekanten.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{9^2+1^2} = \sqrt{82}$$

Kan nå bestemme høyden *h* i trekanten.

$$\frac{\sqrt{82}\cdot h}{2} = 11 \Rightarrow h = \frac{22}{\sqrt{82}}.$$

Lar *P* være et punkt på linja gjennom *A* og *B*.

Da kan jeg sette $P=(9s,s)$.

Punktet *E* ligger på ℓ og får derfor koordinater $(12t,5t)$.

Linjestykket *PE* skal være høyden i trekanten.

Da må $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{AB}$ og $\left|\overrightarrow{PE}\right| = \frac{22}{\sqrt{82}}$.

CAS

1	A:=(0,0)
	$\rightarrow$ A := (0, 0)
2	B:=(9,1)
	$\rightarrow$ B := (9, 1)
3	P:=(9s,s)
	$\rightarrow$ P := (9 s, s)
4	E:=(12t,5t)
	$\rightarrow$ E := (12 t, 5 t)
5	u:=Vektor(A, B)
	$\rightarrow u := \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$
6	n:=Vektor(P, E)
	$\rightarrow n := \begin{pmatrix} 12t-9s \\ 5t-s \end{pmatrix}$
7	u*n=0
	$\rightarrow -82s+113t=0$
8	abs(n)=22/sqrt(82)
	$\rightarrow \sqrt{(-s+5t)^2+(-9s+12t)^2} = \frac{22}{\sqrt{82}}$
9	{$7, $8}
	Løs: $\left\{\left\{s=\frac{113}{123}, t=\frac{2}{3}\right\}, \left\{s=-\frac{113}{123}, t=-\frac{2}{3}\right\}\right\}$

Må ha $t > 0$, så bruker $t = \frac{2}{3}$.

10	ByttUt(E, t=2/3) $\rightarrow \left(8, \frac{10}{3}\right)$

$$\underline{\underline{E \text{ har koordinater } \left(8, \frac{10}{3}\right)}}$$

Oppgave 3

a) Lar tangenten i P være grafen en lineær funksjon $g(x)$.
Nullpunktet til $g(x)$ er x-koordinaten til A, mens konstantleddet i funksjonsuttrykket til $g(x)$ er y-koordinaten til B.

CAS

1	f(x):=1-x² $\rightarrow f(x) := -x^2 + 1$
2	P:=(a,f(a)) $\rightarrow P := (a, -a^2 + 1)$
3	g(x):=Tangent(P, f) $\rightarrow g(x) := -2\,a\,x + a^2 + 1$
4	g(x)=0 Løs: $\left\{x = \frac{a^2+1}{2\,a}\right\}$
5	g(0) $\rightarrow a^2 + 1$

Vi har altså $A = \left(\frac{a^2+1}{2a}, 0\right)$ og $B = \left(0, a^2+1\right)$.

ΔOAB har da grunnlinje $\frac{a^2+1}{2a}$ og høyde a^2+1.

Dette gir:

$$T(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+1}{2a} \cdot \left(a^2+1\right) = \frac{\left(a^2+1\right)^2}{4a}$$, <u>som skulle vises</u>.

b)

CAS

1 T(a):=(a²+1)²/(4a)

$\rightarrow \; T(a) := \frac{(a^2+1)^2}{4a}$

2 T'(a)=0

Løs: $\left\{ a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, a = \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

Må velge den positive løsningen, siden vi skal ha $a \in \langle 0,1 \rangle$.

Bruker andrederiverttesten til å forsikre meg om at denne løsningen gir bunnpunkt på grafen til *T*.

3 T''(sqrt(3)/3)

$\rightarrow \; 2\sqrt{3}$

$T''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, så er snakk om bunnpunkt.

Bestemmer det minste arealet trekanten kan ha:

4 T(sqrt(3)/3)

$\rightarrow \; \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{9}$

Det minste arealet ΔOAB kan ha er $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

Oppgave 4

a) ΔBCD og ΔABC er begge rettvinklede. I tillegg har vi fra oppgaveteksten at $\angle BDC = \angle ACB$. Da er ΔBCD og ΔABC formlike.
ΔBCD og ΔDEF er begge rettvinklede og har felles vinkel i hjørnet *D*.
Da er ΔBCD og ΔDEF formlike.
Når ΔBCD og ΔABC er formlike og ΔBCD og ΔDEF er formlike, må også ΔABC og ΔDEF være formlike.
Begge trekantene har hypotenus med lengde *c*, så da må de også være kongruente.

ΔABC er kongruent med ΔDEF, som skulle forklares.

b) $\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD$ og $\angle BCD = 180° - 90° - \angle BDC = 90° - \angle BDC$.

$\angle BDC = \angle ACB$, så
$\angle ACD = \angle ACB + \angle BCD = \angle BDC + (90° - \angle BDC) = 90°$, som skulle vises.

c) $AD = a + BD$
Bruker videre at ΔBCD og ΔABC er formlike, for å bestemme *BD.*
Setter forholdet mellom korteste katet i de to trekantene likt forholdet mellom lengste katet i de to trekantene.

$$\frac{BD}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow BD = \frac{b^2}{a}$$

Da har vi $AD = a + \frac{b^2}{a}$, <u>som skulle vises</u>.

d) Om vi lar *DE* være grunnlinjen og CA være høyden i ΔACD, kan arealet av trekanten uttrykkes slik: $A = \frac{c \cdot c}{2} = \frac{1}{2}c^2$.
Om vi lar *AD* være grunnlinjen og *FE* være høyden i ΔACD, kan arealet av trekanten uttrykkes slik: $A = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot \left(a + \frac{b^2}{a} \right)$.

Vi setter de to uttrykkene lik hverandre og får $\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2} a \cdot \left(a + \frac{b^2}{a} \right)$.

<u>Som skulle vises</u>.

Jobber videre med denne likningen.

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2} a \cdot \left(a + \frac{b^2}{a} \right) \quad |\cdot 2$$

$$c^2 = a\left(a + \frac{b^2}{a} \right)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$så$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

<u>Har vist at Pythagoras' setning gjelder</u>.