Eksamen

10.11.2022 REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar. (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 9 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på nettsidene til Utdanningsdirektoratet.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x)=2x^3-\ln x$

b) $g(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

c) $h(x)=\dfrac{2x+2}{e^x}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Løys likningane

a) $100^x+10=11\cdot 10^x$

b) $\lg x=\lg 6-2\lg 3+\lg 2$

Oppgåve 3 (2 poeng)

Kva av tala er mindre enn 10? Hugs å grunngi svara.

$3\sqrt{11}$ $\quad$ $10\lg 9$ $\quad$ $5\ln 9$

Oppgåve 4 (2 poeng)

Bestem grenseverdien

$$\lim_{h\to 0}\frac{(4+h)^2-4^2}{h}$$

Oppgåve 5 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 12$$

a) Vis at $(x+6)$ er ein faktor i $f(x)$. Bestem eventuelle andre lineære faktorar.

b) Grunngi at grafen til f har eit botnpunkt i $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$. Bestem eventuelle andre ekstremalpunkt.

c) Bestem x-koordinaten til eventuelle vendepunkt på grafen til f.

d) Lag ei skisse av grafen til f. Du kan bruke at $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) \approx (0{,}667\,, -14{,}8)$.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Kjærasteparet Anita og Lars skal på telttur med seks av vennene sine. På turen skal tre av dei åtte vennene setje opp telta. Dei fem andre skal lage mat. Dei trekkjer tilfeldig ut kven som skal gjere dei ulike oppgåvene.

a) Kva er sannsynet for at både Anita og Lars blir trekte ut til å setje opp telta?

b) Kva er sannsynet for at Anita og Lars ikkje blir trekte ut til å gjere same arbeidsoppgåve?

Oppgåve 7 (4 poeng)

Vi har gitt punkta $A(1,1)$, $B(9,7)$ og $P(5,9)$.

a) Vis at $\angle APB = 90°$.

Ei linje ℓ er parallell med $\overrightarrow{AB}$ og går gjennom punktet P.

Det er også eit anna punkt Q på ℓ som er slik at $\angle AQB = 90°$.

b) Bestem koordinatane til Q.

Oppgåve 8 (4 poeng)

Ein sirkel er gitt ved likninga

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = -3$$

Ei linje ℓ_1 er gitt ved likninga

$$x + y = 3$$

a) Bestem skjeringspunkta mellom sirkelen og ℓ_1.

Ei anna linje ℓ_2 er gitt ved likninga

$$x + y = k$$

der k er eit reelt tal.

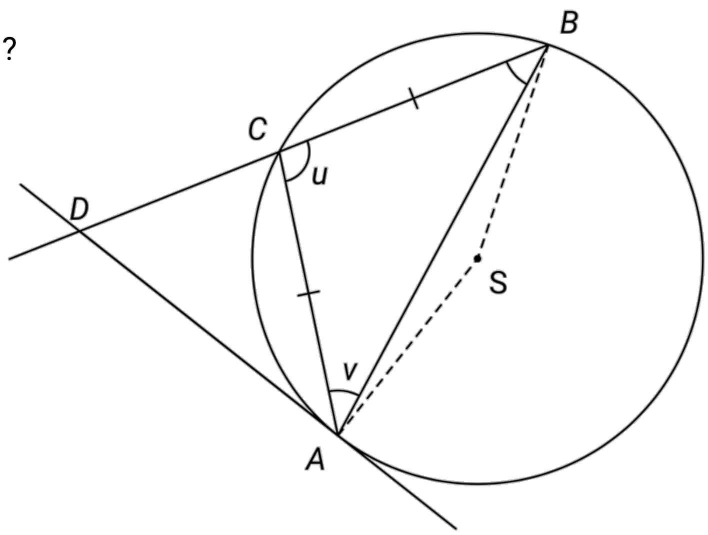
b) Bestem to verdiar av k slik at ℓ_2 tangerer sirkelen.

Oppgåve 9 (4 poeng)

Ein likebeint trekant ABC er plassert slik at hjørna ligg på ein sirkel med sentrum S. Tangenten til sirkelen i A skjer forlenginga av BC i D. Vi lar $v = \angle BAC$ og $u = \angle ACB$. Sjå skissa nedanfor.

a) Kor stor er $\angle ADC$ dersom $u = 110°$?

b) Grunngi at $u > 90°$ når S ligg utanfor $\triangle ABC$.



Del 2

Oppgåve 1 (5 poeng)

Ein kortstokk består av fire typar kort: ruter, kløver, hjarter og spar. Kvar type består av 13 kort, med ulike verdiar.

Vi trekkjer tilfeldig fem kort utan tilbakelegging frå ein slik kortstokk.

a) Bestem sannsynet for at alle dei fem korta er hjarter.

b) Bestem sannsynet for at nøyaktig to av dei fem korta er hjarter.

c) Kva er sannsynet for at dei fem korta inneheld minst eitt kort av kvar type?

Oppgåve 2 (7 poeng)

Vi har gitt punkta $A(0,0)$, $B(9,1)$ og $C(24,10)$. Ein stråle ℓ er gitt ved parameterframstillinga

$$\ell : \begin{cases} x = 12t \\ y = 5t \end{cases} \text{, } t > 0$$

a) Vis at C ligg på ℓ.

b) Bruk vektorrekning til å bestemme $\angle BAC$.

Eit anna punkt D ligg på ℓ slik at $\angle ADB = 120°$.

c) Bruk vektorrekning til å bestemme koordinatane til D.

Eit punkt E ligg på ℓ slik at arealet til $\triangle ABE$ er 11.

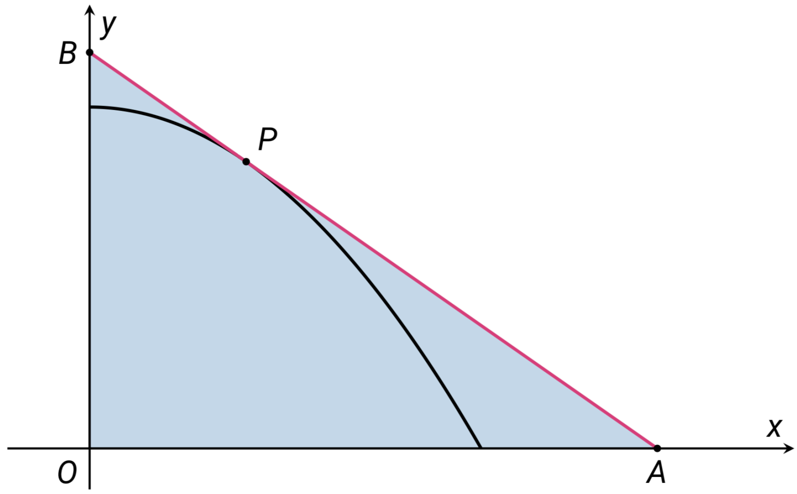
d) Bestem dei eksakte koordinatane til E.

Oppgåve 3 (4 poeng)

Ein funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2 \quad , \quad D_f = [0\,,1]$$

La $a \in \langle 0\,,1 \rangle$ og O vere origo. Tangenten til grafen til f i punktet $P(a, f(a))$ skjer x-aksen i punktet A og y-aksen i punktet B som vist på figuren.



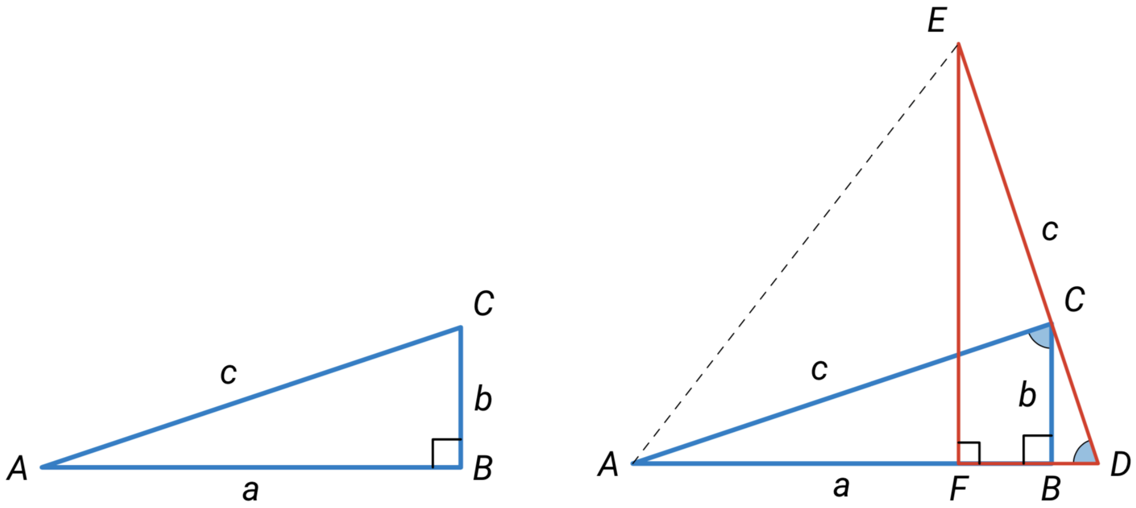
a) Vis at arealet T til $\triangle OAB$ er gitt ved

$$T(a) = \frac{(a^2+1)^2}{4a}$$

b) Bestem det minste arealet $\triangle OAB$ kan ha.

Oppgåve 4 (8 poeng)

Vi skal i denne oppgåva bevise Pytagoras' setning. Vi startar med ein rettvinkla trekant ABC med sidene a, b og c som vist på figuren nedanfor.



Vi lar punktet D liggje på forlenginga av AB slik at $\angle BDC = \angle ACB$. Vi lar E liggje på forlenginga av DC slik at $DE = AC = c$. Punktet F på AB er slik at $\angle DFE = 90^\circ$. Sjå figuren ovanfor.

a) Grunngi at $\triangle ABC$ er kongruent med $\triangle DEF$.

b) Vis at $\angle ACD = 90^\circ$.

c) Vis at $AD = a + \dfrac{b^2}{a}$.

d) Forklar korleis vi ved arealbetraktningar på $\triangle ADE$ kan komme fram til følgjande samanheng:

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(a + \frac{b^2}{a}\right)$$

Bruk dette til å vise at Pytagoras' setning gjeld.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 9 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2x^3 - \ln x$

b) $g(x) = x \cdot e^{-2x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{2x+2}{e^x}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Løs likningene

a) $100^x + 10 = 11 \cdot 10^x$

b) $\lg x = \lg 6 - 2\lg 3 + \lg 2$

Oppgave 3 (2 poeng)

Hvilke av tallene er mindre enn 10? Husk å begrunne svarene.

$3\sqrt{11} \qquad 10\lg 9 \qquad 5\ln 9$

Oppgave 4 (2 poeng)

Bestem grenseverdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 4^2}{h}$$

Oppgave 5 (7 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=x^3+5x^2-8x-12$$

a) Vis at $(x+6)$ er en faktor i $f(x)$. Bestem eventuelle andre lineære faktorer.

b) Begrunn at grafen til f har et bunnpunkt i $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)$. Bestem eventuelle andre ekstremalpunkter.

c) Bestem x-koordinaten til eventuelle vendepunkter på grafen til f.

d) Lag en skisse av grafen til f. Du kan bruke at $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right)\approx(0{,}667\,,-14{,}8)$.

Oppgave 6 (4 poeng)

Kjæresteparet Anita og Lars skal på telttur med seks av vennene sine. På turen skal tre av de åtte vennene sette opp teltene. De fem andre skal lage mat. De trekker tilfeldig ut hvem som skal gjøre de ulike oppgavene.

a) Hva er sannsynligheten for at både Anita og Lars blir trukket ut til å sette opp teltene?

b) Hva er sannsynligheten for at Anita og Lars ikke blir trukket ut til å gjøre samme arbeidsoppgave?

Oppgave 7 (4 poeng)

Vi har gitt punktene $A(1,1)$, $B(9,7)$ og $P(5,9)$.

a) Vis at $\angle APB=90^\circ$.

En linje ℓ er parallell med $\overrightarrow{AB}$ og går gjennom punktet P.

Det er også et annet punkt Q på ℓ som er slik at $\angle AQB=90^\circ$.

b) Bestem koordinatene til Q.

Oppgave 8 (4 poeng)

En sirkel er gitt ved likningen

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = -3$$

En linje ℓ_1 er gitt ved likningen

$$x + y = 3$$

a) Bestem skjæringspunktene mellom sirkelen og ℓ_1.

En annen linje ℓ_2 er gitt ved likningen

$$x + y = k$$

der k er et reelt tall.

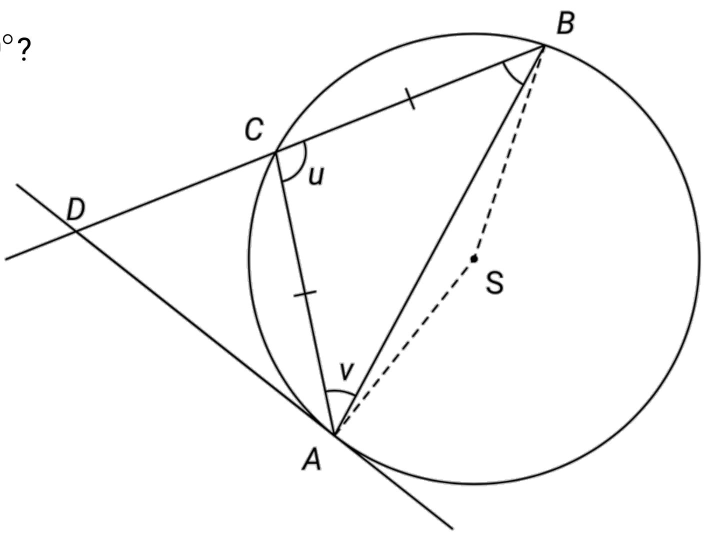
b) Bestem to verdier av k slik at ℓ_2 tangerer sirkelen.

Oppgave 9 (4 poeng)

En likebeint trekant ABC er plassert slik at hjørnene ligger på en sirkel med sentrum S. Tangenten til sirkelen i A skjærer forlengelsen av BC i D. Vi lar $v = \angle BAC$ og $u = \angle ACB$. Se skissen nedenfor.

a) Hvor stor er $\angle ADC$ dersom $u = 110°$?

b) Begrunn at $u > 90°$ når S ligger utenfor $\triangle ABC$.



Del 2

Oppgave 1 (5 poeng)

En kortstokk består av fire typer kort: ruter, kløver, hjerter og spar. Hver type består av 13 kort, med ulike verdier.

Vi trekker tilfeldig fem kort uten tilbakelegging fra en slik kortstokk.

a) Bestem sannsynligheten for at alle de fem kortene er hjerter.

b) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig to av de fem kortene er hjerter.

c) Hva er sannsynligheten for at de fem kortene inneholder minst ett kort av hver type?

Oppgave 2 (7 poeng)

Vi har gitt punktene $A(0,0)$, $B(9,1)$ og $C(24,10)$. En stråle ℓ er gitt ved parameterframstillingen

$$\ell : \begin{cases} x = 12t \\ y = 5t \end{cases}, \; t > 0$$

a) Vis at C ligger på ℓ.

b) Bruk vektorregning til å bestemme $\angle BAC$.

Et annet punkt D ligger på ℓ slik at $\angle ADB = 120^\circ$.

c) Bruk vektorregning til å bestemme koordinatene til D.

Et punkt E ligger på ℓ slik at arealet til $\triangle ABE$ er 11.

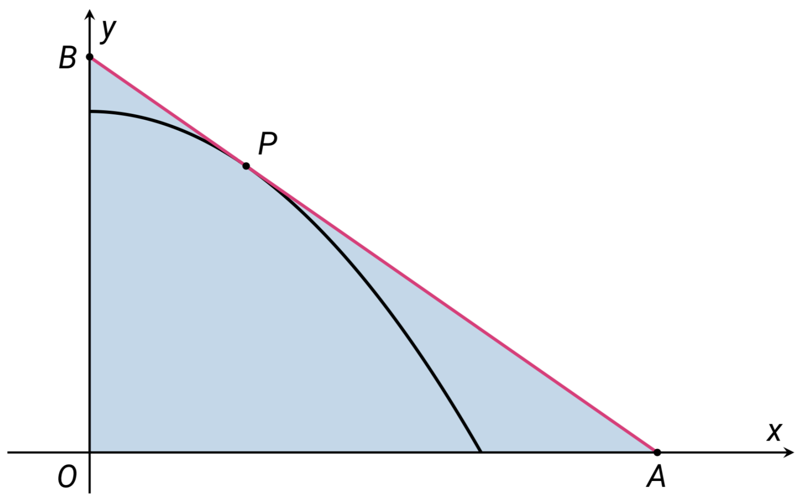
d) Bestem de eksakte koordinatene til E.

Oppgave 3 (4 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = 1 - x^2 \quad , \quad D_f = [0\,,1]$$

La $a \in \langle 0\,,1 \rangle$ og O være origo. Tangenten til grafen til f i punktet $P(a, f(a))$ skjærer x-aksen i punktet A og y-aksen i punktet B som vist på figuren.



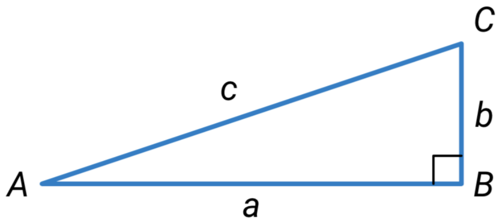
a) Vis at arealet T til $\triangle OAB$ er gitt ved

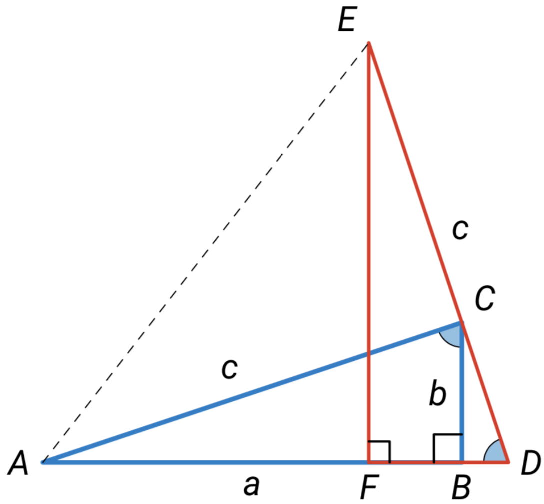
$$T(a) = \frac{(a^2+1)^2}{4a}$$

b) Bestem det minste arealet $\triangle OAB$ kan ha.

Oppgave 4 (8 poeng)

Vi skal i denne oppgaven bevise Pytagoras' setning. Vi starter med en rettvinklet trekant ABC med sidene a, b og c som vist på figuren nedenfor.





Vi lar punktet D ligge på forlengelsen av AB slik at $\angle BDC = \angle ACB$. Vi lar E ligge på forlengelsen av DC slik at $DE = AC = c$. Punktet F på AB er slik at $\angle DFE = 90^\circ$. Se figuren ovenfor.

a) Begrunn at $\triangle ABC$ er kongruent med $\triangle DEF$.

b) Vis at $\angle ACD = 90^\circ$.

c) Vis at $AD = a + \dfrac{b^2}{a}$.

d) Forklar hvordan vi ved arealbetraktninger på $\triangle ADE$ kan komme fram til følgende sammenheng:

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(a + \frac{b^2}{a}\right)$$

Bruk dette til å vise at Pytagoras' setning gjelder.

Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Blank side

Blank side

Blank side

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!