Løsningsforslag eksamen S1 - Høsten 2021

Del 1

Oppgave 1

a)

$$2x = 2x^2 - 12$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

"Sum og produkt" gir:

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$\underline{\underline{x = -2 \vee x = 3}}$$

b)

$$5^{3x-6} = 25$$
$$5^{3x-6} = 5^2$$
$$3x - 6 = 2$$
$$3x = 2 + 6$$
$$\underline{\underline{x = \frac{8}{3}}}$$

c)

$$\lg(x) + \lg(x+1) = \lg 12 \qquad \text{NB! Må ha } x > 0$$
$$\lg\left(x(x+1)\right) = \lg 12$$
$$\lg\left(x^2 + x\right) = \lg 12$$
$$x^2 + x = 12$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$

"Sum og produkt" gir:

$$(x+4)(x-3) = 0$$
$$gir$$
$$x = -4 \vee x = 3$$

Det er kun den positive løsningen som er gyldig, så <u>likningen har løsning $x = 3$</u>

Oppgave 2

a)

$$
\begin{aligned}
(x-y)^2+2\cdot(x+y)\cdot y-(x+y)^2 &= x^2-2xy+y^2+2xy+2y^2-\left(x^2+2xy+y^2\right)\\
&= x^2+3y^2-x^2-2xy-y^2\\
&= \underline{\underline{2y^2-2xy}}
\end{aligned}
$$

Evt. $\underline{\underline{2y(y-x)}}$ eller $\underline{\underline{-2y(x-y)}}$.

b)

$$
\begin{aligned}
\lg\left(ab^{-5}\right)-\lg\left(\frac{b}{a^4}\right)+3\lg\left(ab^2\right) &= \lg a+\lg b^{-5}-\left(\lg b-\lg a^4\right)+3\left(\lg a+\lg b^2\right)\\
&= \lg a-5\lg b-\lg b+4\lg a+3\lg a+6\lg b\\
&= \underline{\underline{8\lg a}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

$$
\begin{aligned}
-x^2 &\geq -6-x\\
-x^2+x+6 &\geq 0\\
x^2-x-6 &\leq 0\\
(x+2)(x-3) &\leq 0
\end{aligned}
$$

Grafen til x^2-x-6 er en parabel som vender hul side opp (”smilemunn”). Da vet vi at den er negativ *mellom* nullpunktene.

$\underline{\underline{-x^2\geq -6-x \text{ når } x\in[-2,3]}}$ evt. $\underline{\underline{-x^2\geq -6-x \text{ når } -2\leq x\leq 3}}$

Oppgave 4

$I. \quad y-x+6=0 \Leftrightarrow -x+y=-6$

$II. \quad x^2-y=6$

Legger likning *I* til likning *II*, og får:

$$
\begin{aligned}
x^2-x &= 0\\
x(x-1) &= 0\\
x=0 &\vee x=1
\end{aligned}
$$

$x=0$, innsatt i *I*, gir: $y=-6$

$x=1$, innsatt i *I*, gir: $y=-5$

$\underline{\underline{x=0\wedge y=-6 \quad \vee \quad x=1\wedge y=-5}}$

Oppgave 5

a) Plasserer én person i ringen først. Da kan de resterende 5 personene plasseres på $5! = 120$ forskjellige måter.
Dette er alle de *ulike* måtene de seks vennene kan plassere seg på i ringen.
Som skulle grunngis.

b) Når Audun og Siv holder hender, er det fire plasser igjen i ringen. Disse 4 plassene gir $4! = 24$ ulike kombinasjoner av resten av vennene. Audun og Siv kan bytte plass, og fortsatt holde hender, og da er det 24 nye mulige kombinasjoner der Audun og Siv holder hender.

$$P(\text{Audun og Siv får holde hender}) = \frac{48}{120} = \underline{\underline{\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%}}$$

c) Hvis vi ser på Audun og Siv som én enhet, er det 5 steder å plassere paret på linja. De to kan også bytte plass med hverandre, så det totalt sett blir 10 mulige plasseringer av Siv og Audun, for hver av de $4! = 24$ kombinasjonene av resten. Totalt $24 \cdot 10 = 240$ måter å stille opp vennegjengen når Siv og Audun skal stå ved siden av hverandre, av totalt $6! = 720$ mulige kombinasjoner.

$$P(\text{Audun og Siv står sammen på bildet}) = \frac{240}{720} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 6

a) Tangenten går gjennom punktet $(1,4)$, altså tangeringspunktet. Ut fra figuren ser det også ut som at tangenten går gjennom punktet $\left(\frac{2}{5}, 5\right)$.

$$\frac{4-5}{1-\frac{2}{5}} = -\frac{1}{\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}, \text{ så } f'(1) \approx \underline{\underline{-\frac{5}{3}}}$$

b)

$$\begin{aligned}
4 - 4\lg x &= \lg 500 \\
4\lg x &= 4 - \lg 500 \\
4\lg x &= \lg 10000 - \lg 500 \\
4\lg x &= \lg\left(\frac{10000}{500}\right) \\
4\lg x &= \lg 20 \\
\lg x^4 &= \lg 20 \\
x^4 &= 20 \\
x &= \sqrt[4]{20} \qquad (\text{Må ha } x > 0)
\end{aligned}$$

$x = \sqrt[4]{20}$ gir $x \approx 2{,}1$.

Bruker grafen og finner at $f(2{,}1) \approx 2{,}7$, så $\underline{\underline{\lg 500 \approx 2{,}7}}$

c)

$$O(x) = -200 \cdot f(x) = -200\left(4 - 4\lg x\right) = 800\lg x - 800 = 800\left(\lg x - 1\right)$$

$$\begin{aligned} O(x) &= 0 \\ &\mathit{gir} \\ \lg x - 1 &= 0 \\ \lg x &= 1 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

$x \in \langle 0{,}10 \rangle$ gir $\lg x < 1$, slik at $O(x) < 0$

$x > 10$ gir $\lg x > 1$, slik at $O(x) > 0$.

<u>Virksomheten må selge minst 10 enheter per dag for ikke å gå med underskudd</u>

Oppgave 7

a) Området T er avgrenset av følgende tre ulikheter:

$$x \geq 1$$
$$y \leq 5 - x$$
$$\underline{\underline{y \geq \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}}}$$

b) Regner ut verdien av S for x- og y-verdiene i de tre hjørnene:

$$S\left(1,-2\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 - 2(-2) = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$
$$S\left(5,0\right) = \frac{1}{2}\cdot 5 - 2\cdot 0 = \frac{5}{2}$$
$$S\left(1,4\right) = \frac{1}{2}\cdot 1 - 2\cdot 4 = \frac{1}{2} - 8 = -\frac{15}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Den største verdien } S \text{ kan ha er } \frac{9}{2}}}$$

c) $y = k + x$ er ei linje med stigningstall 1 og konstantledd k. Området F skal ligge over denne linja. Det skjer når linja går gjennom (5,0) og når x øker fra 5 og oppover.

Punktet (5,0) gir $k+5=0 \Leftrightarrow k=-5$.
k må minke når *x*-øker (stigningstallet er 1 hele tiden).

<u>Området *F* er likt området *T* når *k* ≤-5</u>

Oppgave 8

$$h(x)=\frac{ax-2}{bx+c}$$

a)

$$h(-1)=0 \text{ gir } \frac{-a-2}{-b+c}=0, \text{ så } a=-2$$

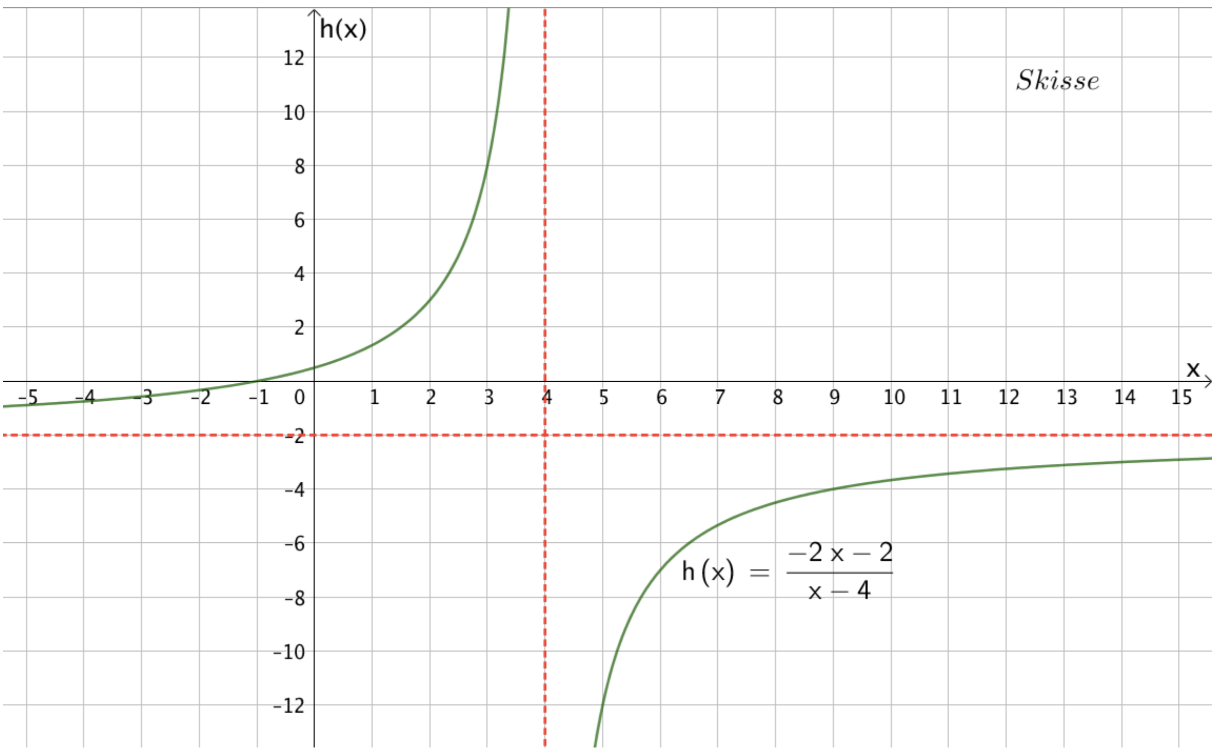
Vannrett asymptote $y=-2$ gir:

$$\frac{-2x-2}{bx+c} \approx \frac{-2x}{bx} = \frac{-2}{b} = -2 \text{ når } x \to \pm\infty \text{ , så } b=1$$

Loddrett asymptote $x=4$ betyr at nevneren er 0 når $x=4$.
Dette gir $4 \cdot 1 + c = 0$, så $c=-4$

$$\underline{\underline{a=-2 \wedge b=1 \wedge c=-4}}$$

b) Tegner asymptotene og regner ut noen verdier av *h* for ulike verdier av *x*, slik at jeg har noen punkter og kan tegne skisse.



Del 2

Oppgave 1

a) Lar x være verdien av lakseeksporten i milliarder kroner i 2018, og y være verdien av ørreteksporten i milliarder kroner i 2018.
Ut fra opplysningene i oppgaveteksten kan jeg da sette opp følgende likningssystem.

$$\begin{bmatrix} x + y = 70{,}7 \\ x + 4{,}8 + 1{,}24y = 76{,}2 \end{bmatrix}$$

b) Løser likningssystemet i CAS.

CAS

1	x+y=70.7 $\rightarrow \; x + y = \frac{707}{10}$
2	x+4.8+1.24*y=76.2 $\rightarrow \; x + \frac{31}{25}y + \frac{24}{5} = \frac{381}{5}$
3	{$1, $2} Løs: $\left\{\left\{x = \frac{4067}{60}, y = \frac{35}{12}\right\}\right\}$
4	{{x = 4067 / 60, y = 35 / 12}} $\approx \; \{\{x = 67.8, y = 2.9\}\}$

Løsningene forteller at verdien av lakseeksporten var 67,8 milliarder kroner i 2018.

$$67{,}8 + 4{,}8 = 72{,}6$$

<u>Verdien av lakseeksporten var 72,6 milliarder kroner i 2019</u>

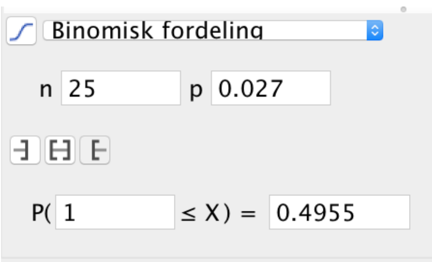
Oppgave 2

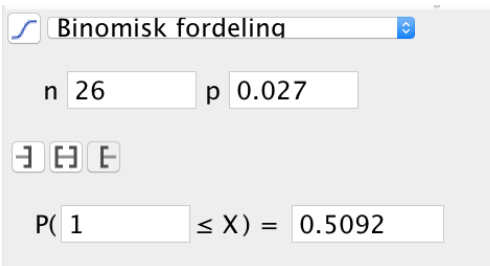
a) Sannsynligheten for at kulen havner på det grønne feltet minst én gang på 10 omganger, er det motsatte av at den *aldri* havner på det grønne feltet i løpet av 10 omganger.

$$1 - \left(\frac{36}{37}\right)^{10} = 0{,}240 = 24{,}0\%$$

<u>Sannsynligheten for at kulen havner på det grønne feltet minst én gang på 10 omganger er 24 %.</u>

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Vi har en binomisk sannsynlighetsmodell der $p = \dfrac{1}{37}$.
Justerer *n* til sannsynligheten passerer 50 % for minst ett treff på grønt felt.



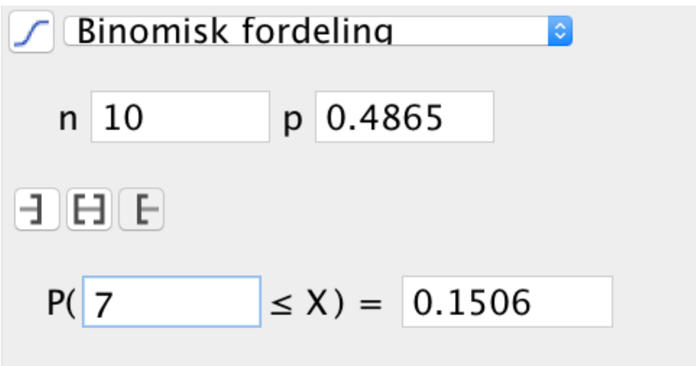


Vi ser at sannsynligheten passerer 50 % når vi går fra 25 til 26 spill.

<u>Vi må spille minst 26 ganger dersom sannsynligheten skal være mer enn 50 % for at kulen havner på grønt felt minst én gang.</u>

c) Dersom vi sier at vi har to mulige utfall, enten rødt felt eller ikke rødt felt, har vi et binomisk forsøk. Sannsynligheten for "rødt felt" er $\dfrac{18}{37}$ i hvert delforsøk og delforsøkene er uavhengige av hverandre.

Jeg kan da bruke sannsynlighetskalkulatoren til å vise at $p \approx 0{,}151$ for at kulen havner på rødt felt i minst 7 av 10 spillomganger:

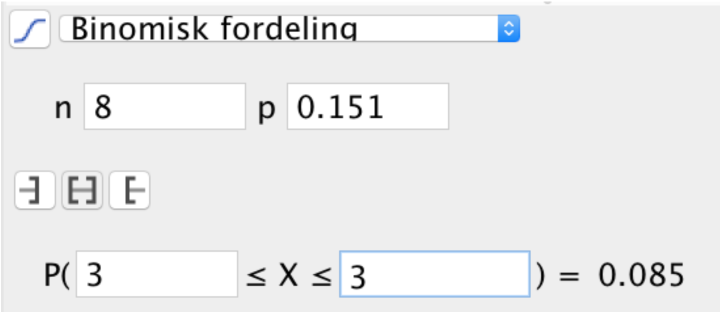


$p \approx 0{,}151$, <u>som skulle vises.</u>

Skulle jeg gjort dette *for hånd*, kunne jeg ha regnet ut verdien av følgende uttrykk:

$$\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^{7}\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^{3}+\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^{8}\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^{2}+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^{9}\cdot\left(\frac{19}{37}\right)+\left(\frac{18}{37}\right)^{10}$$

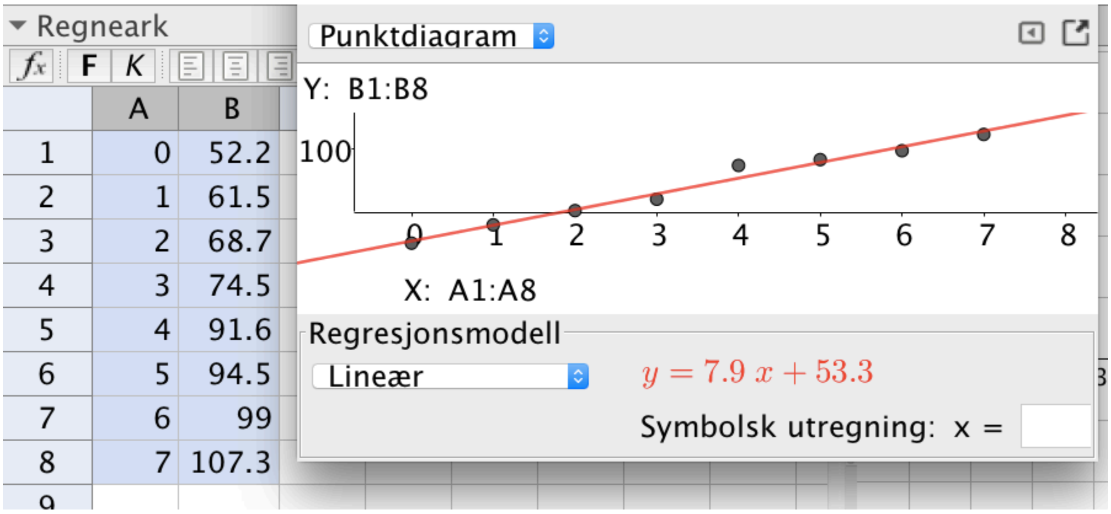
d) Her har vi et binomisk forsøk der $n = 8$ og $p \approx 0{,}151$.



<u>Sannsynligheten for at nøyaktig 3 av de 8 vennene får rødt tall minst 7 av de 10 omgangene er 8,5 %.</u>

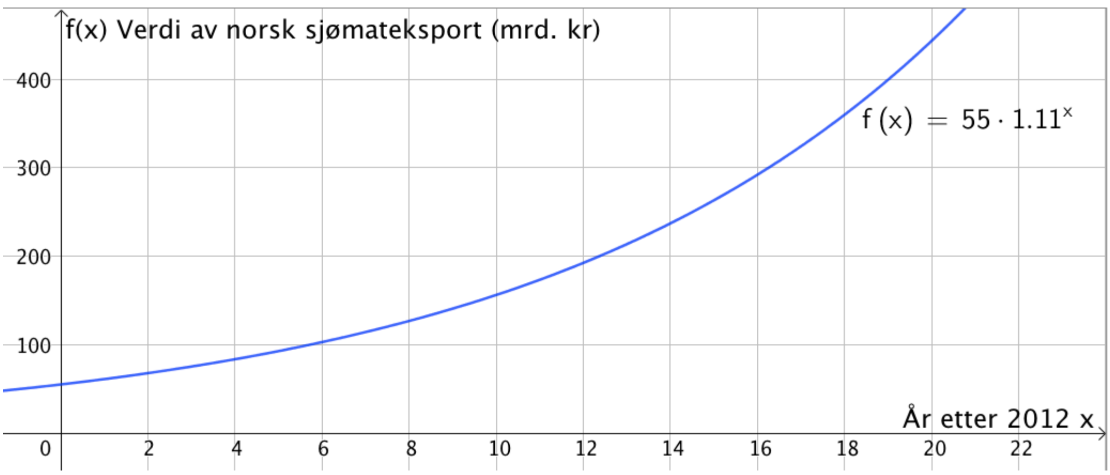
Oppgave 3

a) Bestemmer modellen ved lineær regresjon i GeoGebra.

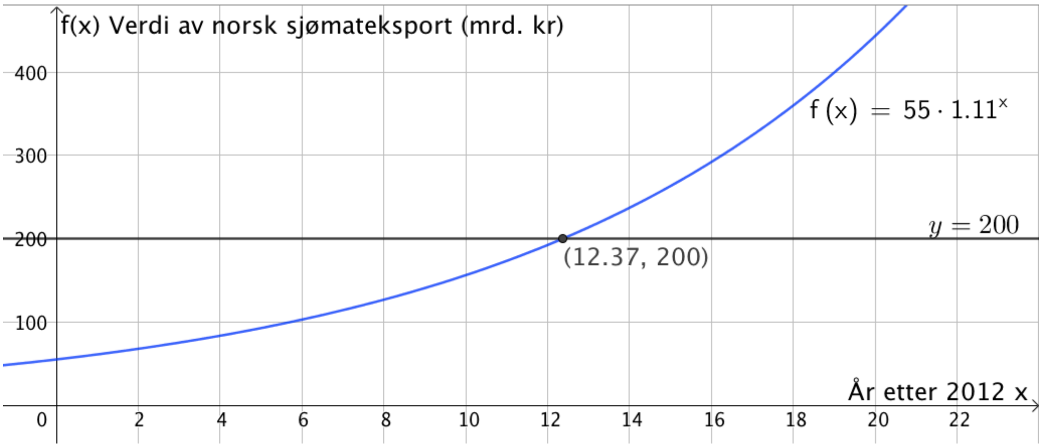


$$\underline{\underline{g(x) = 7{,}9x + 53{,}3}}$$

b)

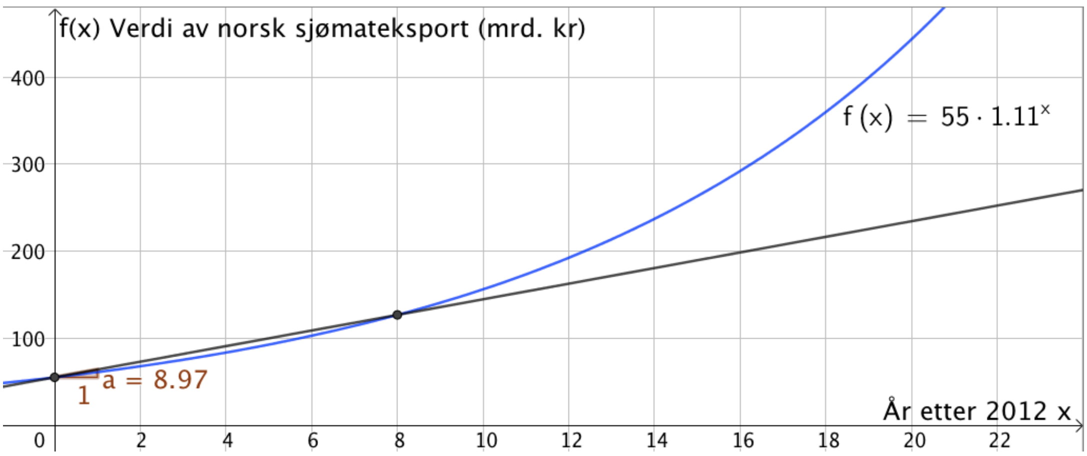


c) Tegner linja $y = 200$ og bestemmer skjæringspunktet mellom denne og grafen til f ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



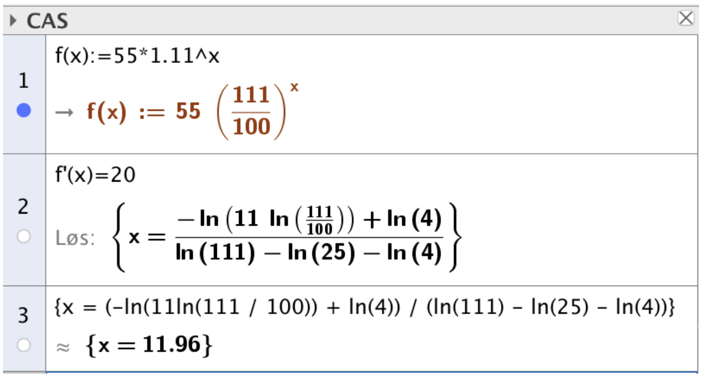
<u>I følge modellen var verdien av norsk sjømateksport større enn 200 milliarder kroner første gang i 2024.</u>

d) Markerer punktene $\left(0, f(0)\right)$ og $\left(8, f(8)\right)$, tegner linje gjennom disse og bestemmer stigningstallet til linja ved hjelp av *stigning*.



<u>Den gjennomsnittlige årlige verdiøkningen av sjømateksporten i perioden 2012-2020 var, i følge modellen, 8,97 milliarder kroner per år.</u>

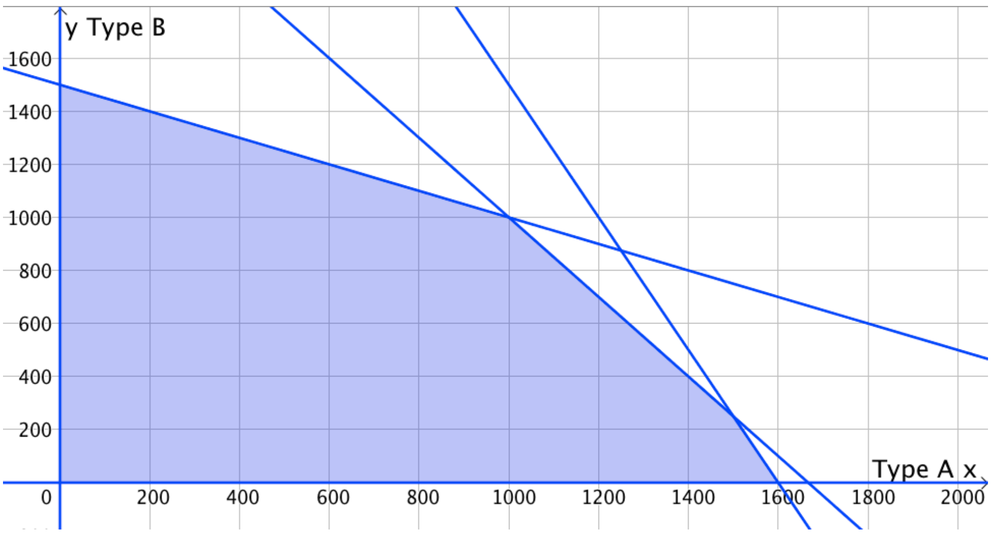
e) Løser likningen $f'(x) = 20$ i CAS.



<u>I følge modellen vil verdien av sjømateksporten første gang øke med mer enn 20 milliarder per år rundt årsskiftet 2023/2024</u>

Oppgave 4

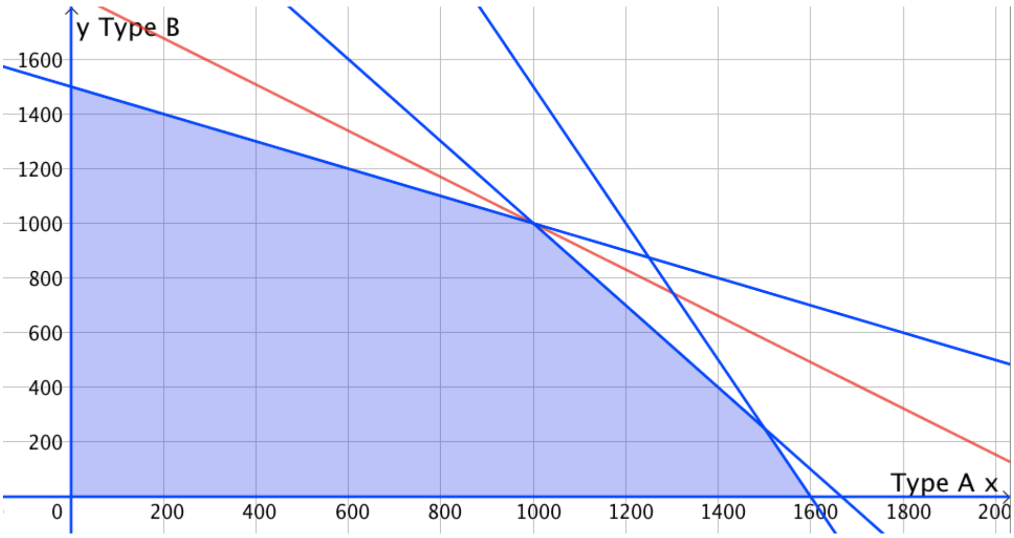
a)



b) Lar $N(x,y)$ være netto fortjeneste for salg av x hengekøyer av type A og y hengekøyer av type B når vi kun ser på salgsinntekter og produksjonskostnadene per enhet.

$$N(x,y) = (800-580)x + (1400-1140)y = 220x + 260y$$

Tegner nivålinja $220x + 260y = 0$ og justerer til vi er i det hjørnet som gjør at linja krysser høyest opp på y-aksen.



Nivålinja krysser høyest oppe på y-aksen når den går gjennom hjørnet $(1000,1000)$.

$$N(1000,1000) = 220\cdot 1000 + 260 \cdot 1000 = 480000.$$

Trekker så fra de faste kostnadene på 70 000 kroner.

<u>Overskuddet blir størst ved produksjon og salg av 1000 hengekøyer av hver type. Da er det månedlige overskuddet på 410 000 kroner.</u>

c) Ser først på tid per enhet og månedlig kapasitet for ***tilskjæring***.
36 minutter tilsvarer 0,6 timer.
Da har vi følgende ulikhet:

$$0{,}6x + a \cdot y \leq 1000 \quad | \cdot 2{,}5$$

$$1{,}5x + 2{,}5a \cdot y \leq 2500$$

Der *a* er antall minutter brukt på tilskjæring i produksjon av en hengekøye av type *B*.
Når vi sammenligner ulikheten over med settet av ulikheter i oppgaveteksten, ser vi at vi må ha:

$$2{,}5a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

0,4 timer er det samme som 24 minutter.

Ser nå på tid per enhet og månedlig kapasitet for ***sammenstilling.***
18 minutter tilsvarer 0,3 timer og 36 minutter tilsvarer 0,6 timer.
Da har vi følgende ulikhet:

$$0{,}3x + 0{,}6y \leq b \quad | \cdot \frac{5}{3}$$

$$0{,}5x + y \leq \frac{5b}{3}$$

Der *b* er månedlig kapasitet (timer) til sammenstilling av begge hengekøye-typene.
Når vi sammenligner ulikheten over med settet av ulikheter i oppgaveteksten, ser vi at vi må ha:

$$\frac{5b}{3} = 1500 \Leftrightarrow b = \frac{3 \cdot 1500}{5} = 3 \cdot 300 = 900$$

<u>I den ene tomme ruten skal det stå ***24 minutter***, og i den andre tomme ruten skal det stå ***900 timer***.</u>