Løsningsforslag eksamen S1 (LK06) våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a)

$$\left(x+1\right)^2-16=0$$
$$\left(x+1\right)^2=16$$
$$x+1=\pm\sqrt{16}$$
$$x+1=\pm 4$$
$$gir$$
$$x=4-1=3 \vee x=-4-1=-5$$
$$så$$
$$\underline{\underline{x=-5 \vee x=4}}$$

b)

$$2\cdot 10^{-3x}+3=2003$$
$$10^{-3x}=\frac{2003-3}{2}$$
$$10^{-3x}=1000$$
$$10^{-3x}=10^3$$
$$-3x=3$$
$$\underline{\underline{x=-1}}$$

c) $\left(\lg x\right)^2+2\lg x=\lg x^2+1$

To av leddene i likningen inneholder $\lg x$, så må ha $x>0$.
Da risikerer vi ikke å "miste" en løsning om vi bruker 1.logaritmesetning på første leddet på høyre side.

$$\left(\lg x\right)^2+2\lg x=\lg x^2+1$$
$$\left(\lg x\right)^2+2\lg x=2\lg x+1$$
$$\left(\lg x\right)^2=1$$
$$\lg x=\pm\sqrt{1}$$
$$\lg x=\pm 1$$
$$så$$
$$\underline{\underline{x=10 \vee x=10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1}}$$

Oppgave 2

a)

$$
\begin{aligned}
4(a+b)^2-(2b-a)^2-3a(a+2b) &= 4(a^2+2ab+b^2)-(4b^2-4ab+a^2)-3a^2-6ab \\
&= 4a^2+8ab+4b^2-4b^2+4ab-a^2-3a^2-6ab \\
&= 4a^2-4a^2+8ab+4ab-6ab+4b^2-4b^2 \\
&= \underline{\underline{6ab}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-2} &= \frac{4x}{(x+2)(x-2)}-\frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)}+\frac{2(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4x-2(x-2)+2(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4x-2x+4+2x+4}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4x+8}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{4(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\
&= \underline{\underline{\frac{4}{x-2}}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

Lar x være antall ordinære arbeidstimer, mens y representerer antall timer overtid. Bruker informasjonen om timelønn og penger tjent til å sette opp en likning.

$$150x+250y=13500 \quad |\cdot\frac{1}{50}$$

$$3x+5y=270$$

Informasjonen om antall timer Magne har jobbet gir likningen $x+y=70$.

Vi har da følgende likningssett:

$$I.\ \ 3x+5y=270$$

$$II.\ \ \ x+y=70$$

Skriver likning II som $x=70-y$ og setter dette inn i I.

$$
\begin{aligned}
3(70-y)+5y &= 270 \\
210-3y+5y &= 270 \\
2y &= 270-210 \\
y &= \frac{60}{2} \\
y &= 30
\end{aligned}
$$

<u>Magne jobbet 30 timer overtid denne måneden.</u>

Oppgave 4

$$x^2 - 9 \le x - 3$$
$$x^2 - x - 9 + 3 \le 0$$
$$x^2 - x - 6 \le 0$$
$$(x+2)(x-3) \le 0$$

Grafen til $x^2 - x - 6$ er en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"), så den vil ligge under x-aksen mellom nullpunktene, altså mellom $x = -2$ og $x = 3$.

$$\underline{\underline{x^2 - 9 \le x - 3 \text{ når } -2 \le x \le 3}}$$

Oppgave 5

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}$$

Ser nærmere på det første leddet:

- $x = -1$ gir 0 i nevner, så $x = -1$ er vertikal asymptote.
- $\frac{2}{x+1} \to 0$ når $x \to \pm\infty$, så $f(x) \to -\frac{1}{2}$ når $x \to \pm\infty$

  $y = -\frac{1}{2}$ er horisontal asymptote

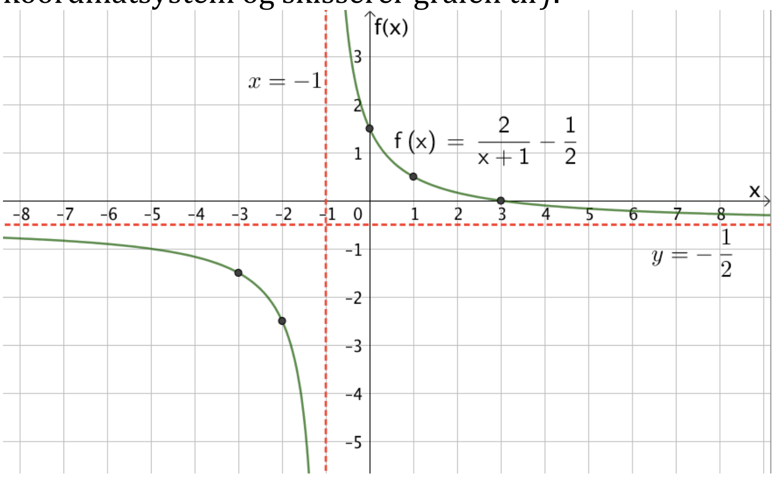
Ser litt mer på hele funksjonsuttrykket:

- $f(3) = \frac{2}{3+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$, så $x = 3$ er nullpunkt.
- $f(0) = \frac{2}{0+1} - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, så grafen krysser y-aksen i $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Regner bestemmer noen punkter til i nærheten av den vertikale asymptoten:

$$(-3, f(-3)) = \left(-3, -\frac{3}{2}\right),\ (-2, f(-2)) = \left(-2, -\frac{5}{2}\right),\ (1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Tegner asymptotene og markerer punktene jeg har kommet frem til i et koordinatsystem og skisserer grafen til f.



Oppgave 6

a) Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.

$$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\cdot\frac{3}{1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{2\cdot 3\cdot 3}{7\cdot 5} = \frac{18}{35}$$

$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at to menn og én kvinne trekkes ut er } \frac{18}{35}}}$

b) Istedenfor å dele mengden av deltakere inn i delmengdene "menn" og "kvinner", deler jeg mengden deltakere inn i delmengdene "Inga og Tore" og "Alle utenom Inga og Tore". Da kan jeg bruke samme strategi som i forrige deloppgave til å bestemme sannsynligheten for at nøyaktig ett element fra delmengden "Inga og Tore" trekkes ut sammen med to elementer fra den andre delmengden.

$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{2}{1}\cdot\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}}{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{5\cdot 4}{7\cdot 5} = \frac{4}{7}$$

$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at } \textit{enten} \text{ Inga } \textit{eller} \text{ Tore, men ikke begge, trekkes ut er } \frac{4}{7}}}$

Oppgave 7

$$B(x) = 36000\cdot\lg\left(\frac{x+2}{2}\right) + 72000$$

a)

$$\begin{aligned} B(18) &= 36000\cdot\lg\left(\frac{18+2}{2}\right) + 72000 \\ &= 36000\cdot\lg 10 + 72000 \\ &= 36000 + 72000 \\ &= 108000 \end{aligned}$$

<u>I følge modellen er verdien av investeringen 108 000 kroner etter 18 måneder.</u>

b)

$$B(0) = 36000\cdot\lg\left(\frac{0+2}{2}\right) + 72000 = 36000\cdot\lg 1 + 72000 = 36000\cdot 0 + 72000 = 72000\cdot$$

Vi ser at investeringen var på 72000 kroner, som er det samme som $36000kr\cdot 2$.

Investeringen har altså doblet seg når $\lg\left(\frac{x+2}{2}\right) = 2$.

$$\lg\left(\frac{x+2}{2}\right)=2$$

$$10^{\lg\left(\frac{x+2}{2}\right)}=10^2$$

$$\frac{x+2}{2}=100$$

$$x+2=200$$

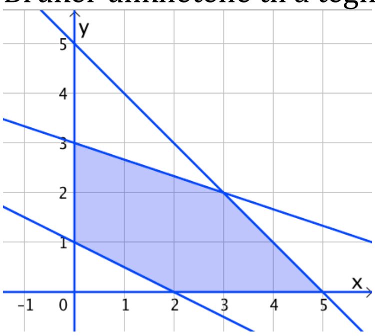
$$x=198$$

198 måneder tilsvarer 16,5 år.

<u>Det tar 198 måneder, altså 16,5 år, før investeringen har doblet seg i verdi.</u>

Oppgave 8

a) Bruker ulikhetene til å tegne og skravere området *F* i et koordinatsystem.



Regner ut $G(x,y)$ for hvert av hjørnepunktene til området.

$$G(x,y)=-3x+2y$$

$$G(0,1)=-3\cdot 0+2\cdot 1=1$$

$$G(0,3)=-3\cdot 0+2\cdot 3=6$$

$$G(2,0)=-3\cdot 2+2\cdot 0=-6$$

$$G(3,2)=-3\cdot 3+2\cdot 2=-5$$

$$G(5,0)=-3\cdot 5+2\cdot 0=-15$$

<u>Den største verdien *G* kan ha når (*x* , *y*) er med i området *F* er 6</u>

b)

$$H(x,y)=-k\cdot x+3y$$

$$H(3,2)=-k\cdot 3+3\cdot 2=-3k+6$$

$$H(0,1)=-k\cdot 0+3\cdot 1=3$$

$$H(0,3)=-k\cdot 0+3\cdot 3=9$$

$$H(2,0)=-k\cdot 2+3\cdot 0=-2k$$

$$H(5,0)=-k\cdot 5+3\cdot 0=-5k$$

$9>3$, så dersom vi finner en *k* som gjør at $H(3,2)>H(0,3)$, har vi samtidig en *k* som gjør at $H(3,2)>H(0,1)$.

$$H(3,2)>H(0,3)$$
$$-3k+6>9$$
$$-3k>9-6$$
$$-3k>3$$
$$k<-1$$

Når $k<-1$, har vi $-5k>-2k$, så dersom vi finner en *k* som gjør at $H(3,2)>H(5,0)$, har vi samtidig en *k* som gjør at $H(3,2)>H(2,0)$.

$$H(3,2)>H(5,0)$$
$$-3k+6>-5k$$
$$-3k+5k>-6$$
$$2k>-6$$
$$k>-3$$

Vi har altså funnet ut at *k* må være mindre enn -1, samtidig som den må være større enn -3.

Når (x,y) skal ligge i området F, får H sin største verdi i punktet $(3,2)$ når $-3<k<-1$

Oppgave 9

a) Dekkene kan plasseres på 4! måter.
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$
Mari kan plassere de fire sommerdekkene på bilden på 24 forskjellige måter.

b) Vi tenker oss at Mari plasserer det første dekket riktig. Da kan de resterende 3 dekkene plasseres på $3!=3\cdot2\cdot1=6$ måter.
Av disse 6 måtene er det én som er helt riktig, altså alle på riktig plass, mens det er 3 måter som gir 2 av 3 dekk på riktig plass (første, andre eller tredje dekk på riktig plass, og de to andre på feil plass. Da er det 2 måter igjen å plassere de tre dekkene slik at alle er på feil plass.
Siden vi kan starte med å sette et dekk på riktig plass på fire forskjellige plasser, vil det altså være $4\cdot2=8$ måter å plassere nøyaktig 3 dekk på feil plass på bilen.

$$P(\text{Nøyaktig 3 dekk på feil plass})=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}\approx 33{,}3\%$$

Oppgave 10

Vi kan tenke oss at punktet *P* ligger på grafen til en lineær funksjon *f*, gitt ved $f(x)=-x+2,\ x\in\langle 0,2\rangle$.

Grunnlinjen i rektangelet er avhengig av koordinatene til *P*, så denne er gitt ved $2x$, slik at arealet av rektangelet er gitt ved

$$T(x) = 2x \cdot f(x) = 2x(-x+2) = -2x^2 + 4x \ , \ x \in \langle 0,2 \rangle .$$

$$T'(x) = -4x + 4 = -4(x-1)$$

Grafen til den deriverte av *T* er ei rett linje med negativt stigningstall, så den deriverte skifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet.
Da vet vi at $x = 1$ gir toppunkt på grafen til *T*.

$$T(1) = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 = -2 + 4 = 2 .$$

Det største arealet *T* kan få er 2.

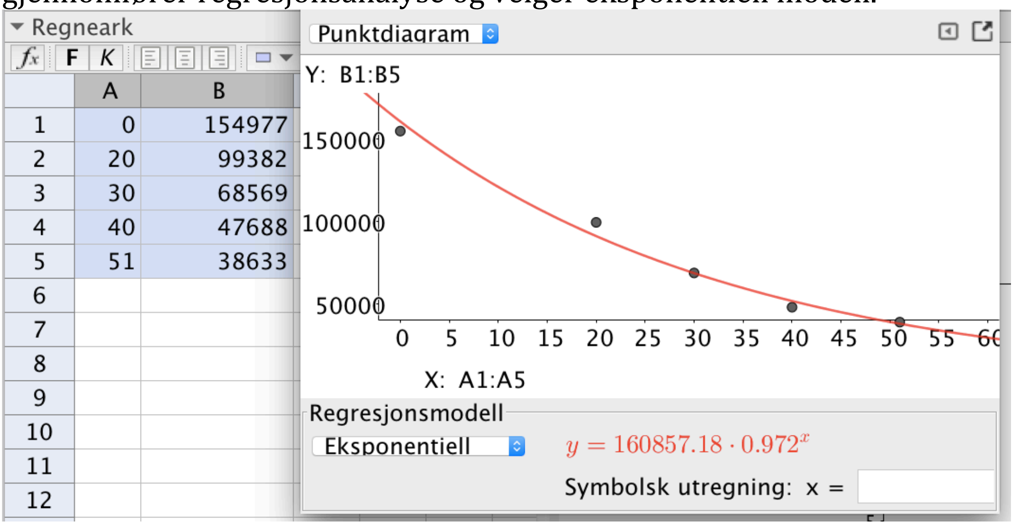
Man kan kanskje "stusse" litt over at jeg her bruker x og ikke a.
Det er fordi jeg tenker at a er et ***tall****, som representerer en verdi* ***variabelen*** *x kan ha.*

Del 2

Oppgave 1

a) Tabellen forteller at antallet gårdsbruk minker etter hvert som tiden går, men vi ser klart at nedgangen ikke er lineær, så utelukker en lineær modell. Dessuten kan ikke antall gårdsbruk bli negativt. Velger derfor en eksponentiell modell. Den eksponentielle modellen vil aldri gi 0 gårdsbruk, selv om dette kan skje i praksis, men den vil kunne komme så nærme null at den fungerer likevel.

Lar *x* være antall år etter 1969 slik at $x = 0$ tilsvarer 1969, $x = 20$ tilsvarer 1989 osv.
Legger *x*-verdiene og samsvarende antall gårdsbruk inn i regnearket i GeoGebra, gjennomfører regresjonsanalyse og velger eksponentiell modell.



En mulig modell for antall gårdsbruk i Norge fra 1969 og fremover er

$$\underline{\underline{g(x) = 160857 \cdot 0{,}972^x}}$$

b) 2060 er 91 år etter 1969.

CAS

1 g(x):=160857*0.972^x

$\rightarrow g(x) := 160857 \left(\frac{243}{250}\right)^x$

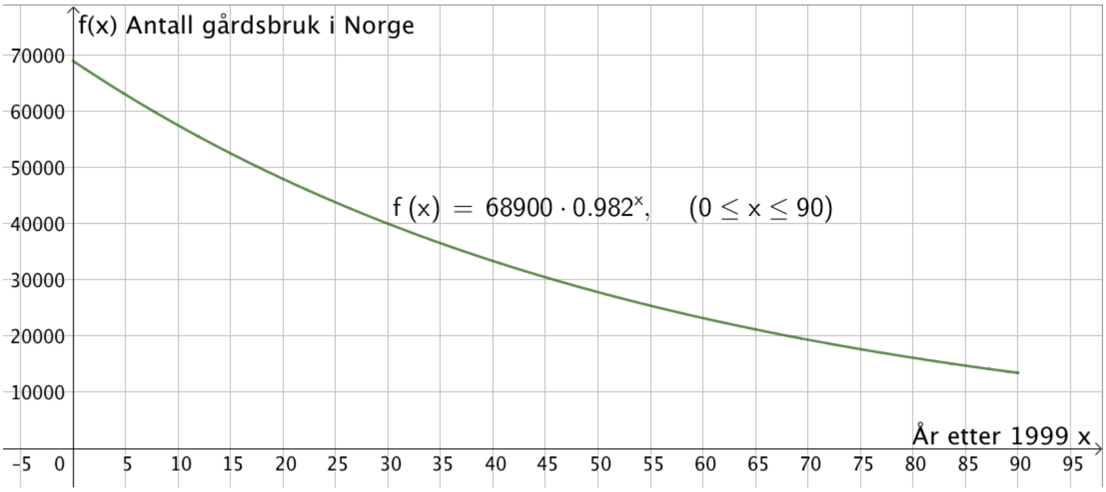
2 g(91)

≈ 12135.846

I følge modellen vil det være ca. 12 136 gårdsbruk i Norge i 2069

Det er vanskelig å skulle vurdere om dette er en realistisk prognose i og med at det er snakk om å skulle se nesten 50 år frem i tid. Samtidig har modellen passet rimelig godt de siste ca. 50 årene. Det ser ikke ut som at vi kommer til å bli særlig mange færre mennesker på jorda i årene fremover, så behovet for matproduksjon vil ikke bli mindre. Det vil derfor ikke være realistisk å tenke at alle gårdsbruk vil forsvinne etter hvert som tiden går, men vi kan likevel ikke utelukke at det er redusert til ca.12000 i Norge om ca.50 år. Dersom det er veldig viktig for oss å kunne si noe mer sikkert om situasjonen i 2069, vil det nok være lurt å lage en ny modell basert på litt ferskere data.

c)



d) Vekstfaktor ved 40 % nedgang er 0,6, så jeg løser likningen $0.982^x = 0{,}6$.

CAS

1 0.982^x=0.6

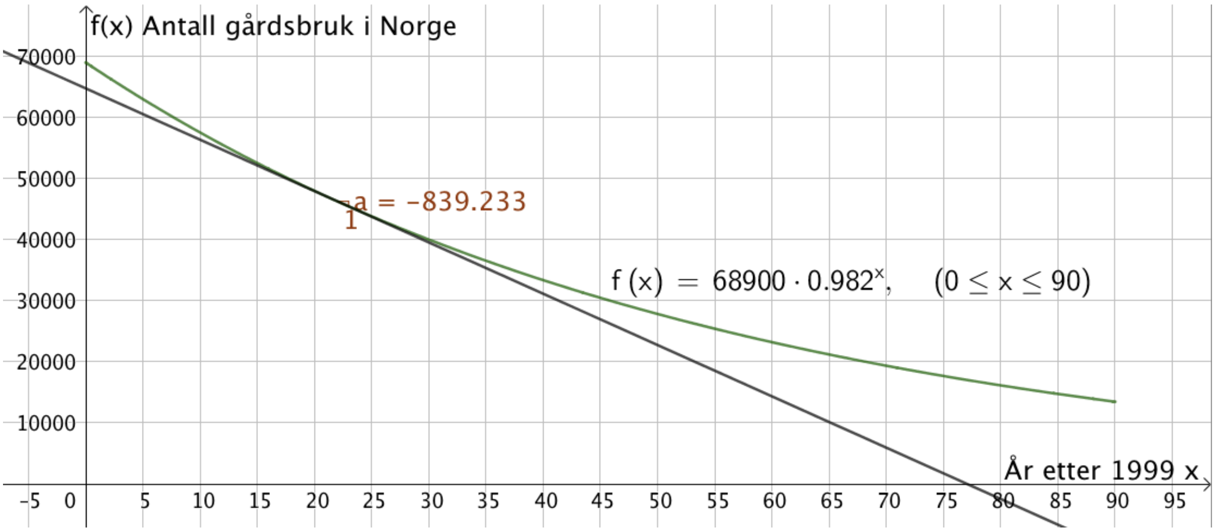
Løs: $\left\{x = \frac{-\ln(3) + \ln(5)}{\ln(4) - \ln(491) + 3\ln(5)}\right\}$

2 {x = (-ln(3) + ln(5)) / (ln(4) - ln(491) + 3ln(5))}

$\approx \{x = 28.123\}$

I følge modellen *f* vil antall gårdsbruk i Norge være 40 % lavere enn i 1999 etter ca.28 år, altså i 2027.

e) Bruker kommandoen *" Tangent(<x-verdi>, <Funksjon>)"* og tenger tangenten til grafen til *f* i $\left(22, f(22)\right)$ og bestemmer stigningstallet ved hjelp av *"stigning"*.

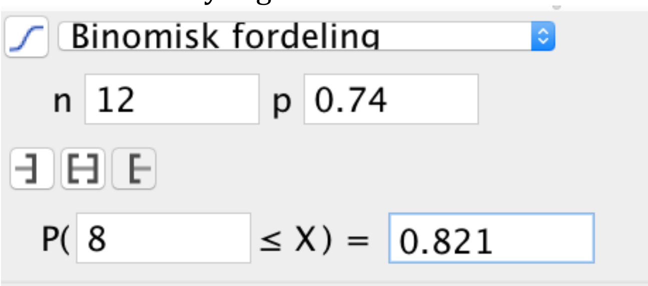


Stigningstallet til tangenten er $-839,233$.
Dette forteller at antall gårdsbruk vil avta med ca.839 gårdsbruk per år i 2021.

Oppgave 2

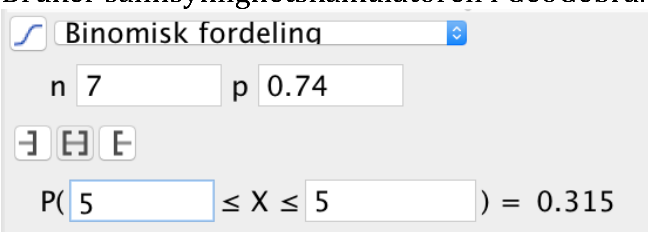
a) Et binomisk forsøk består av uavhengige delforsøk der sannsynligheten for et gitt utfall er likt i hvert delforsøk.
Vi må altså her går ut fra at sannsynligheten for å bestå førerprøven er 74 %, uavhengig av kjønn og årstid, og at sannsynligheten for bestått er like stor for alle de 12 elevene uavhengig av hverandre.

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



<u>Sannsynligheten for at minst 8 av de 12 består er 82,1 %.</u>

c) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



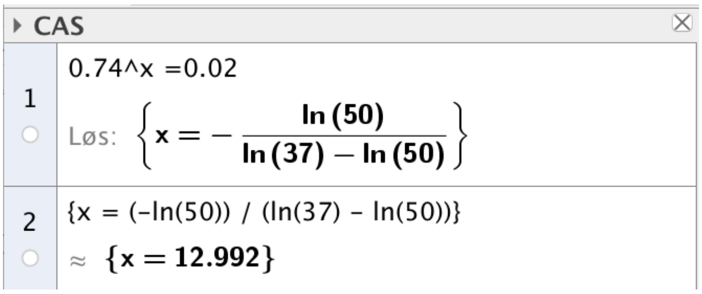
<u>Sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene består er 31,5 %.</u>

d) Multipliserer sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene består med sannsynligheten for at akkurat 4 av jentene består.

$$\binom{7}{5} \cdot 0,74^5 \cdot 0,26^2 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0,74^4 \cdot 0,26 = 0,123 = 12,3\%$$

<u>Sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene og akkurat 4 av jentene består oppkjøringen er 12,3 %.</u>

e) Løser likningen $0,74^x = 0,02$ i CAS:

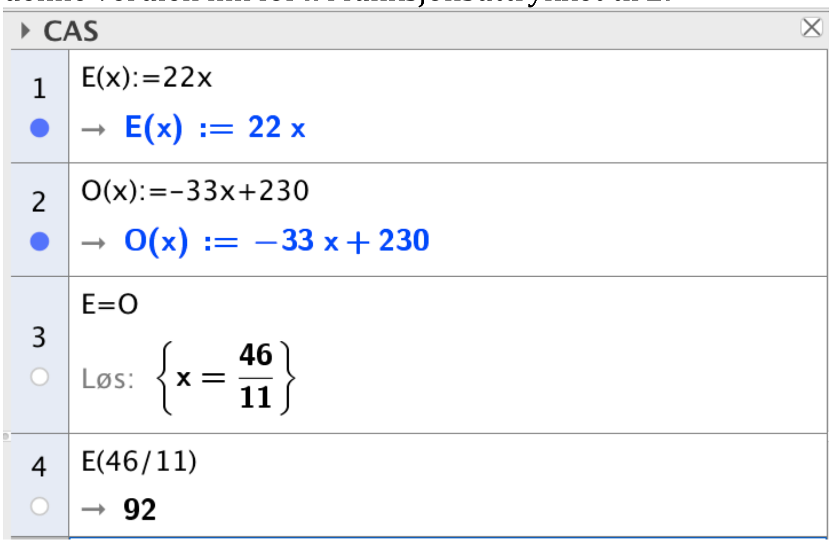


<u>Minst 13 elever ved den andre skolen må ha hatt oppkjøring denne dagen.</u>

Oppgave 3

Lar *x* være timer etter de to startet å sykle.
Avstanden, i kilometer, Even er fra sitt eget hjemsted etter *x* timer er gitt ved funksjonen $E(x) = 22x$.
Avstanden, i kilometer, Odd er fra Even sitt hjemsted er gitt ved funksjonen $O(x) = -33x + 230$

Løser likningen $E(x) = O(x)$ og finner ut hvor lang tid det går før de møtes. Setter så denne verdien inn for *x* i funksjonsuttrykket til *E*.



<u>Når Even og Odd møtes, er de 92 kilometer fra Even sitt hjemsted.</u>

Oppgave 4

a) Det gir ikke mening at antall dager med produksjon er negativt. Det minste antall dager man kan ha produksjon er 0.
Vi må derfor ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

Informasjonen om bokpapir (produksjonskapasitet og bestilling) gir:

$$400x + 260y = 40000 \quad | \cdot \frac{1}{400}$$

$$x + 0,65y = 100$$

Informasjonen om avispapir (produksjonskapasitet og bestilling) gir:

$$180x + 200y = 24000 \quad | \cdot \frac{1}{200}$$

$$0,9x + y = 120$$

Informasjonen om magasinpapir (produksjonskapasitet og bestilling) gir:

$$240x + 384y = 38400 \quad | \cdot \frac{1}{240}$$

$$x + 2,6y = 160$$

x og *y* må oppfylle følgende ulikheter:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

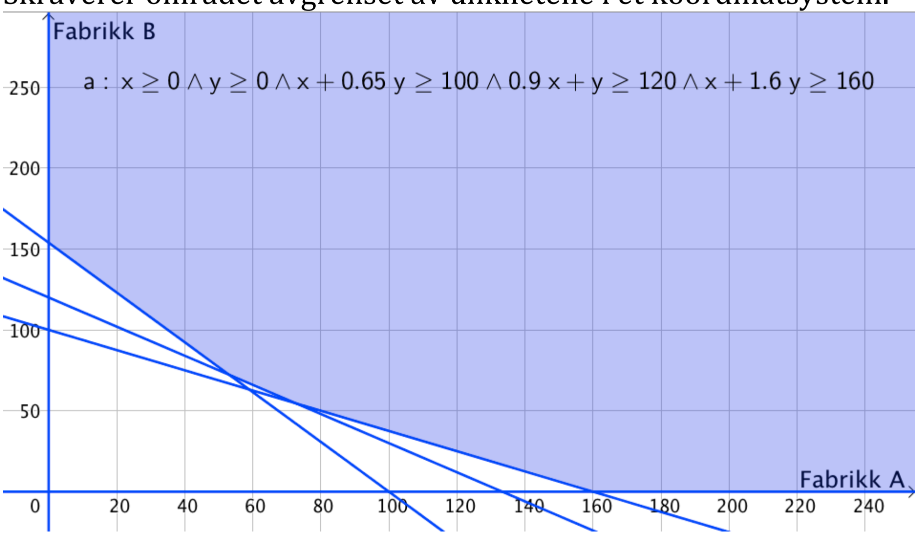
$$x + 0.65 \geq 100$$

$$0,9x + y \geq 120$$

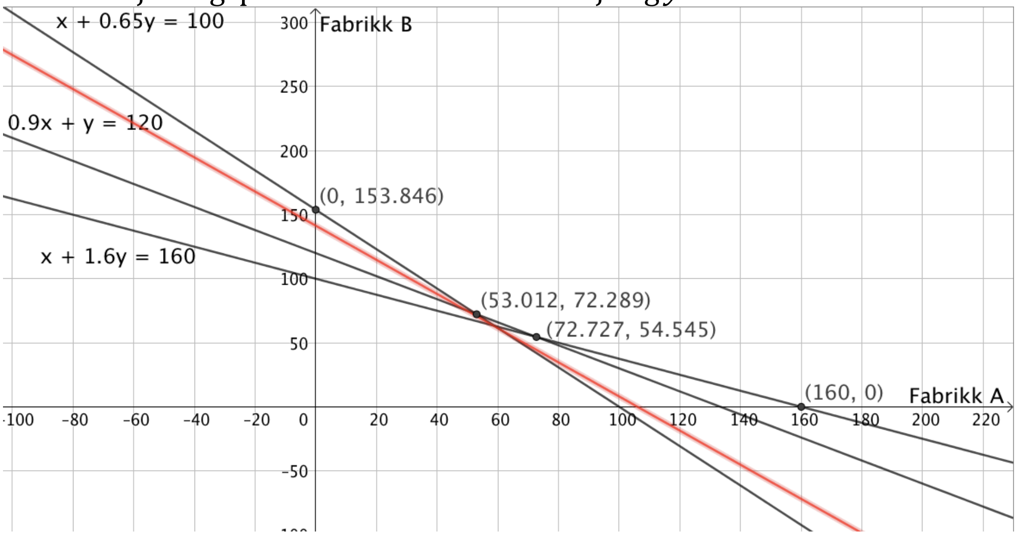
$$x + 1,6y \geq 160$$

<u>Som skulle vises</u>.

b) Skraverer området avgrenset av ulikhetene i et koordinatsystem.



For å finne koordinatene til hjørnepunktene, tegner jeg linjer som har likning ”tilsvarende” de tre siste ulikhetene i oversikten.
Tegner så likevektslinja $40000x + 30000y = 0$ (rød) og parallellforskyver denne slik at den går innom de ulike punktene, så ser jeg hvilket punkt som gir laveste skjæringspunkt mellom likevektslinja og y-aksen.



Det punktet som gir optimal disposisjon av tid, med tanke på å oppnå lavest mulig produksjonskostnader, sier at det beste er om Fabrikk A produserer i ca. 51 dager og Fabrikk 2 produserer i ca. 72 dager.

CAS

1	40000*53.012+30000*72.289
	→ **4289150**

<u>Den laveste mulige produksjonskostnaden for bestillingen er 4 289 150 kroner.</u>

c) Vi får et nytt sett av ulikheter:

$y \geq 0$

$260y \geq 40000 \Leftrightarrow y \geq 153{,}8$

$200y \geq 24000 \Leftrightarrow y \geq 120$

$384y \geq 38400 \Leftrightarrow y \geq 100$

Vi ser at fabrikk B trenger minst 153,8 dager for å produsere hele bestillingen. $30000 \cdot 153{,}8 = 4614000$, så med dagens produksjonskostnader vil det koste 4 614 000 å produsere bestillingen. De totale kostnadene må altså reduseres med minst $4614000kr - 4289150kr = 324850kr$.

$$\frac{324850kr}{153{,}8} = 2112{,}15$$

<u>Fabrikk B må redusere de daglige produksjonskostnadene med minst 2112,15 kroner dersom det skal lønne seg å la dem produsere hele bestillingen.</u>