Løsningsforslag eksamen R2 våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = 3x \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{3\sin x + 3x\cos x = 3(\sin x + x\cos x)}}$

b)

$$g(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x}$$

gir

$$g'(x) = \frac{\cos(2x)\cdot 2\cdot\cos x - \sin(2x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \underline{\underline{\frac{2\cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x}{\cos^2 x}}}$$

Vi har derivert funksjonen, men kan forenkle uttrykket noe hvis vi ønsker det.

$$g'(x) = \frac{2\cos(2x)\cos x + \sin(2x)\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{2(1-2\sin^2 x)\cdot\cos x + 2\sin x\cos x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{(2-4\sin^2 x + 2\sin^2 x)\cos x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{2-2\sin^2 x}{\cos x}$$
$$= \frac{2(1-\sin^2 x)}{\cos x}$$
$$= \frac{2\cos^2 x}{\cos x}$$
$$= \underline{\underline{2\cos x}}$$

Oppgave 2

a) $\int (e^x - \sin x)\,dx = \underline{\underline{e^x + \cos x + C}}$

b) Bestemmer først det ubestemte integralet ved hjelp av variabelskifte.

Setter $u = \sin x$. Da har vi $\frac{du}{dx} = \cos x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$.

$$\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \int u\cdot\cos x\frac{du}{\cos x} = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

Da kan jeg bestemme det bestemte integralet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\left[\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

$$2\cos(3x) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \vee 3x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in Z)$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{12\pi}{18} \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\cdot\frac{12\pi}{18}$$

$x \in [0, \pi]$ gir da:

$$\underline{\underline{x = \frac{5\pi}{18} \vee x = \frac{7\pi}{18} \vee x = \frac{17\pi}{18}}}$$

Oppgave 4

Lineær differensiallikning av første orden. Integrerende faktor er e^{2x}.

$$y' + 2y = 4$$

$$y' \cdot e^{2x} + 2y \cdot e^{2x} = 4 \cdot e^{2x}$$

$$\left(y \cdot e^{2x}\right)' = 4e^{2x}$$

$$y \cdot e^{2x} = \int 4e^{2x} \, dx$$

$$y \cdot e^{2x} = \frac{4}{2}e^{2x} + C \quad |\cdot e^{-2x}$$

$$y = 2 + Ce^{-2x}$$

Generell løsning er altså $y = 2 + Ce^{-2x}$

$$y(0) = 1$$

$$gir$$

$$2 + C = 1$$

$$C = -1$$

Spesiell løsning: $\underline{\underline{y = 2 - e^{-2x}}}$

Oppgave 5

a) Skal altså bestemme k slik at $\int_1^k \frac{1}{x}dx = 2$.

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

(Vi skal forholde oss til x-verdier mellom 1 og k, og $k > 1$, så vi kan sløyfe absoluttverditegn i den videre beregningen)

$$\left[\ln x\right]_1^k = 2$$

$$\ln k - \ln 1 = 2$$

$$\ln k - 0 = 2$$

$$\ln k = 2$$

$$k = e^2$$

$$\underline{\underline{\text{Arealet av } F \text{ blir 2 når } k = e^2}}$$

b) $V = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = \pi \cdot \int_1^4 x^{-2}\,dx = \pi\left[-x^{-1}\right]_1^4 = -\pi\left[\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\pi\left(\frac{1}{4} - 1\right) = \frac{3\pi}{4}$

$$\underline{\underline{\text{Når } k = 4, \text{ har vi } V = \frac{3\pi}{4}}}$$

Oppgave 6

a) *Her er det mulig å rett og slett vise at likningen **må** være en mulig likning for planet ved å vise at den stemmer for koordinatene til alle de tre punktene.*
(I følge sensorveiledningen kan dette gi full uttelling).
Jeg velger likevel her å vise litt mer "grundig", som om oppgaveteksten kun hadde gitt meg punktene og bedt meg bestemme likningen.

$$\overrightarrow{AB} = \left[-2-2, 1-3, -3-(-7)\right] = \left[-4, -2, 4\right]$$

og

$$\overrightarrow{AC} = \left[3-2, 5-3, -5-(-7)\right] = \left[1, 2, 2\right]$$

gir

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[-2\cdot 2 - 4\cdot 2, -(-4\cdot 2 - 4\cdot 1), -4\cdot 2 - (-2)\cdot 1\right] = \left[-12, 12, -6\right] = -6\left[2, -2, 1\right]$$

Det betyr at $\vec{n} = \left[2, -2, 1\right]$ er en normalvektor for planet α.

Bruker A som fast punkt, og får da:

$$2(x-2) - 2(y-3) + (z-(-7)) = 0$$

$$2x - 4 - 2y + 6 + z + 7 = 0$$

$$2x - 2y + z + 9 = 0$$

$2x - 2y + z + 9 = 0$ er en likning for planet α. <u>Som skulle begrunnes</u>.

b) $\overrightarrow{PQ} = \left[6-3, 3-1, -4-(-2)\right] = \left[3, 2, -2\right]$, så $\vec{r} = \left[3, 2, -2\right]$ er en retningsvektor for linja ℓ.
Dersom linja ℓ er parallell med planet α, må retningsvektoren til linja og normalvektoren til planet stå normalt på hverandre.
$\vec{r} \cdot \vec{n} = \left[3, 2, -2\right] \cdot \left[2, -2, 1\right] = 3 \cdot 2 + 2(-2) - 2 \cdot 1 = 6 - 4 - 2 = 0$, så $\vec{r} \perp \vec{n}$.

Linja ℓ er parallell med planet α.
<u>Som skulle vises</u>.

c) Siden linja er parallell med planet, vil alle punkter på linja ha lik avstand til planet. Bestemmer avstanden fra punktet *P* til planet.

$$\frac{\left|2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 9\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left|6 - 2 - 2 + 9\right|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{11}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Avstanden fra linja } \ell \text{ til planet } \alpha \text{ er } \frac{11}{3}}}$$

Oppgave 7

a)

$$f(x) = 0$$
$$2\cos^2 x + \sin\left(2x\right) = 0$$
$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$$
$$2\cos x\left(\cos x + \sin x\right) = 0$$
$$så$$
$$\cos x = 0 \vee \cos x + \sin x = 0$$

$\cos x = 0$ har to løsninger i det aktuelle intervallet, nemlig $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$.

Jobber videre med $\cos x + \sin x = 0$:

$$\cos x + \sin x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$1 + \tan x = 0$$
$$\tan x = -1$$

Denne likningen har to løsninger i det aktuelle intervallet: $x = -\frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{3\pi}{4}$

$f(x)$ har altså følgende nullpunkter for $x \in \left\langle -\pi, \pi \right\rangle$:

$$\underline{\underline{x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{4}}}$$

b) Vi skal altså skrive funksjonsuttrykket om til en ren sinusfunksjon, på formen $f(x)=A\sin\left(cx+\varphi\right)+d$.

Starter også her med å først skrive om uttrykket ved hjelp av trigonometriske identiteter.

$f(x)=2\cos^2 x+\sin\left(2x\right)=\cos\left(2x\right)+1+\sin\left(2x\right)=\sin\left(2x\right)+\cos\left(2x\right)+1.$

De to første leddene i det omskrevne funksjonsuttrykket er på formen $a\sin\left(cx\right)+b\cos\left(cx\right)$.

Vi kan da bestemme A og φ:

$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

og

$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ gir $\tan\varphi=\dfrac{1}{1}=1$.

Punktet $\left(1,1\right)$ er i første kvadrant, så $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Vi har nå funnet ut at $\sin\left(2x\right)+\cos\left(2x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Da har vi $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$, <u>som skulle vises</u>.

c) Den største verdien $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ kan ha er 1, så alle toppunktene har *y*-koordinat $1+\sqrt{2}$.

Bestemmer *x*-koordinaten til disse punktene.

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \qquad \left(k\in Z\right)$$

$$2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{\pi}{8}+k\cdot\pi$$

$$x=\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{8\pi}{8}$$

I intervallet $\left\langle -\pi,\pi\right\rangle$ har likningen følgende løsninger:

$$x = -\frac{7\pi}{8} \vee x = \frac{\pi}{8}$$

Den minste verdien $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ kan ha er -1, så alle bunnpunktene har *y*-koordinat $1 - \sqrt{2}$.

Bestemmer *x*-koordinaten til disse punktene.

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in Z)$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{8} + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{5\pi}{8} + k \cdot \frac{8\pi}{8}$$

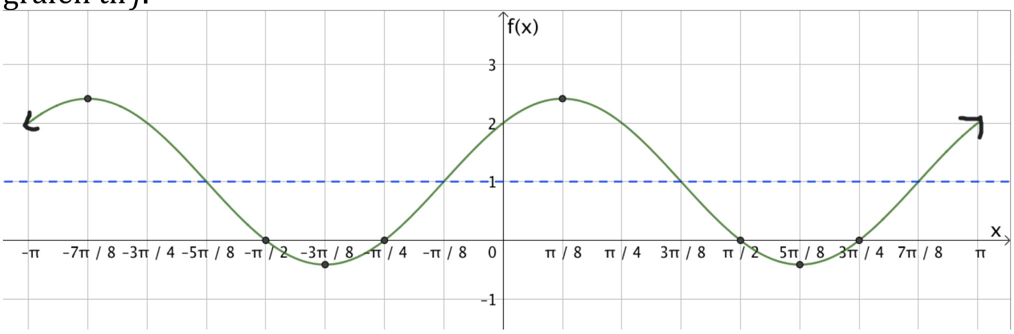
I intervallet $\langle -\pi, \pi \rangle$ har likningen følgende løsninger:

$$x = -\frac{3\pi}{8} \vee x = \frac{5\pi}{8}$$

Grafen til f har toppunkter $\left(-\frac{7\pi}{8}, 1+\sqrt{2}\right)$ og $\left(\frac{\pi}{8}, 1+\sqrt{2}\right)$ og bunnpunkter $\left(-\frac{3\pi}{8}, 1-\sqrt{2}\right)$ og $\left(\frac{5\pi}{8}, 1-\sqrt{2}\right)$

Her kunne jeg "slått sammen" de to beregningene ved å legge til $k \cdot \pi$ istedenfor $k \cdot 2\pi$ og brukt at annenhver løsning gir toppunkt og annenhver gir bunnpunkt, siden vi ville alternert mellom 1 og -1 som verdi av $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

d) Markerer likevektslinja, nullpunktene og topp- og bunnpunktene, og skisserer grafen til *f*.



Oppgave 8

a) Når vi får vite at $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$, kan vi se at $d = -3$.
(verdien av leddene minker med 6 på to steg).
Da har vi også at $a_1 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$gir$$

$$a_6 = 11 + (6-1)(-3) = 11 - 15 = -4$$

og

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$gir$$

$$S_6 = \frac{11-4}{2} \cdot 6 = 7 \cdot 3 = 21$$

<u>Dersom rekka er aritmetisk, er summen av de seks første leddene lik 21.</u>

b)

$$a_2 \cdot k^2 = a_4$$

$$gir$$

$$8k^2 = 2$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$k = \pm\frac{1}{2}$$

Når $k = \frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1 = 2a_2 = 2 \cdot 8 = 16$$

$$og$$

$$S_6 = 16 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{\frac{1}{64} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = 32 \cdot \frac{63}{64} = \frac{63}{2}$$

Når $k = -\frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1 = -2a_2 = -2\cdot 8 = -16$$

og

$$S_6 = -16\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{-\frac{1}{2}-1} = -16\cdot\frac{\frac{1}{64}-1}{-\frac{3}{2}} = -16\cdot\frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{32}{3}\cdot\frac{63}{64} = -\frac{63}{6} = -\frac{21}{2}$$

Summene av de seks første leddene i hver av de to geometriske rekkene er henholdsvis $\frac{63}{2}$ og $-\frac{21}{2}$.

Oppgave 9

Gitt påstanden $P(n)$: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot n^2 = (-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

Sjekker først om $P(1)$ er sann: $(-1)^{1-1}\cdot\frac{1(1+1)}{2} = (-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2} = 1\cdot 1 = 1^2$ OK!

Antar nå at påstanden er sann for $n = k$, der k er et naturlig tall.
Vil så vise at påstanden da også er sann for $n = k+1$.

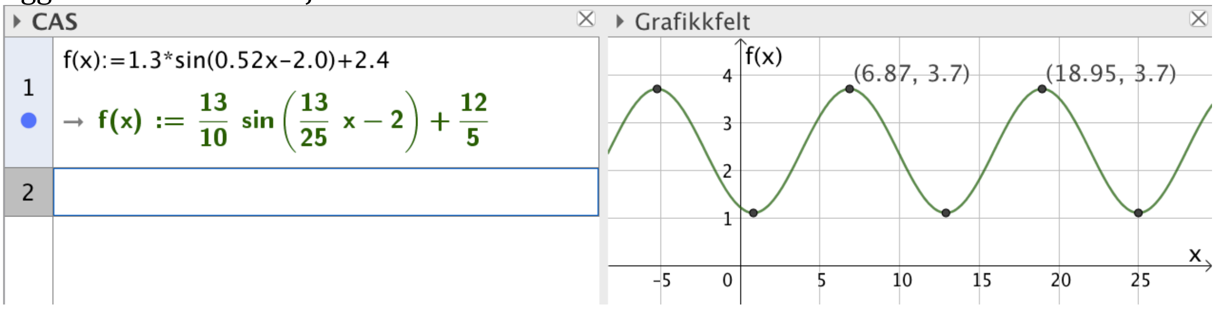
$$\begin{aligned}1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{k+1}\cdot k^2 + (-1)^{k+2}(k+1)^2 &= (-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k+1)^2\\
&= (-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k-1}\cdot(-1)^3\cdot\frac{2(k+1)^2}{2}\\
&= (-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2} - (-1)^{k-1}\cdot\frac{2(k+1)^2}{2}\\
&= (-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)-2(k+1)^2}{2}\\
&= (-1)^{k-1}\cdot\frac{(k+1)(k-2(k+1))}{2}\\
&= (-1)^{k-1}\cdot\frac{(k+1)(-k-2)}{2}\\
&= (-1)^{k-1}\cdot(-1)\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\
&= (-1)^{k+1-1}\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\end{aligned}$$

Har vist at påstanden er sann for $n = k+1$ under forutsetning av at den er sann for $n = k$. Av induksjon har vi da at påstanden er sann for alle naturlige tall *n*.
Q.E.D.

Del 2

Oppgave 1

a) Tegner grafen og bruker *"ekstremalpunkt"* til å bestemme de toppunktene som ligger innenfor definisjonsområdet.

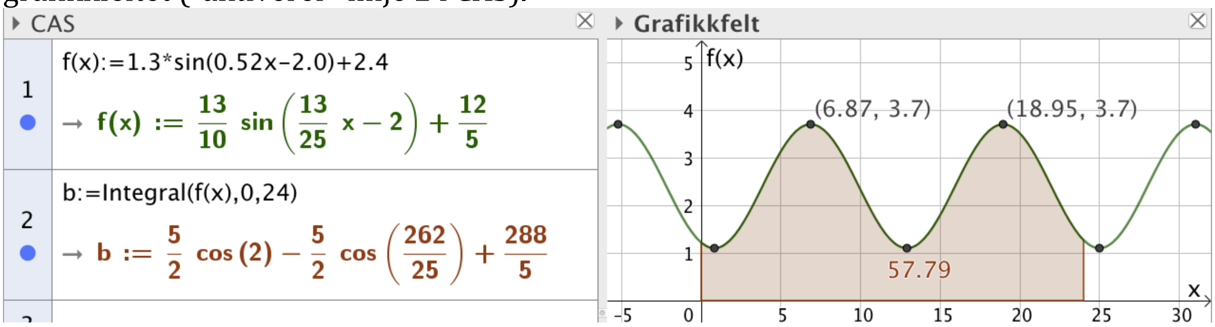


<u>Energiforbruket er størst klokken 06:52 og klokken18:57 i følge modellen</u>

b) Bestemmer det samlede energiforbruket i løpet av et døgn ved å regne ut

$\int_0^{24} f(x)\,dx$ i CAS.

Velger også at arealet under grafen i det aktuelle området skal illustreres i grafikkfeltet ("aktiverer" linje 2 i CAS).



<u>I følge modellen er energiforbruket omtrent 58 kWh i løpet av et døgn.</u>

c)

3	NLøs[Integral(f, 0, n)=17,n] $\rightarrow \{n = 7.29\}$

<u>Strømbruddet fant sted på morgenen, omtrent klokken halv åtte.</u>

Oppgave 2

a) Bestemmer parameterfremstillinger for de to linjene. Bruker CAS.

CAS	
1	A:=(0,7,5);
2	B:=(1,7,2);
3	C:=(-2,2,0);
4	D:=(1,1,h);
5	l:=Linje(A, B) $\rightarrow\ \ell : \mathbf{X} = (0,7,5) + \lambda\ (1,0,-3)$
6	m:=Linje(C, D) $\rightarrow\ \mathbf{m} : \mathbf{X} = (-2,2,0) + \lambda\ (3,-1,\mathbf{h})$

Ut fra parameterfremstillingene til linjene kan jeg sette opp et likningssett som gir meg *x*- og *y*-koordinatene til et eventuelt skjæringspunkt.

7	t=-2+3s $\rightarrow\ \mathbf{t} = 3\,\mathbf{s} - 2$
8	7=2-s $\rightarrow\ 7 = -\mathbf{s} + 2$
9	{$7, $8} Løs: $\{\{\mathbf{s} = -5, \mathbf{t} = -17\}\}$

(Har altså erstattet λ med henholdsvis *t* og *s*)

Setter inn $t=-17$ i parameterfremstillingen for ℓ og får punktet $(-17,7,56)$.

Setter inn $s=-5$ i parameterfremstillingen for *m* og får punktet $(-17,7,-5h)$.

Ser at vi må ha $-5h=56$ for at linjene skal skjære hverandre.

$$\underline{\underline{\text{Linjene } \ell \text{ og } m \text{ skjærer hverandre når } h=-\frac{56}{5}}}$$

b) Setter koordinatene til *A* inn i likningen for planet α:

$3\cdot 0+(h+9)\cdot 7+5=0+7h+63+5=68+7h$

Setter koordinatene til *B* inn i likningen for planet α:

$3\cdot 1+(h+9)\cdot 7+2=3+7h+63+2=68+7h$

Både *A* og *B* ligger i planet α. Da må også ei linje gjennom disse to punktene ligge i planet α.

ℓ ligger i planet α, <u>som skulle vises</u>.

$\overrightarrow{CD} = \left[1-(-2), 1-2, h-0\right] = \left[3, -1, h\right]$ er en retningsvektor for linja *m*.

Ser av likningen at $\left[3, (h+9), 1\right]$ er en normalvektor for planet α.

$\left[3, -1, h\right] \cdot \left[3, (h+9), 1\right] = 3 \cdot 3 + (-1)(h+9) + 1 \cdot h = 9 - h - 9 + h = 0$.

Retningsvektoren for linja *m* står normalt på normalvektoren for planet α.
Da må linja *m* være parallell med planet α, som skulle vises.

c) Siden linja ℓ ligger i planet α og linja *m* er parallell med planet α, vil avstanden fra et vilkårlig punkt på *m* til planet α også være avstanden mellom linjene.
Bruker formelen for avstand fra punkt til plan og setter avstanden mellom punktet *C* og planet α lik 4.

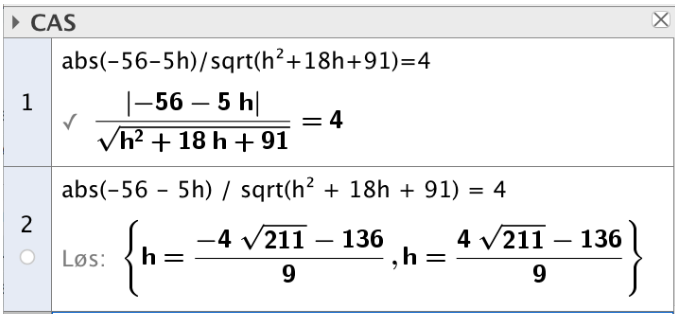
$$\frac{\left|3(-2) + (h+9) \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 68 - 7h\right|}{\sqrt{3^2 + (h+9)^2 + 1^2}} = 4$$

$$\frac{\left|-6 + 2h + 18 - 68 - 7h\right|}{\sqrt{9 + h^2 + 18h + 81 + 1}} = 4$$

$$\frac{\left|-6 + 2h + 18 - 68 - 7h\right|}{\sqrt{9 + h^2 + 18h + 81 + 1}} = 4$$

$$\frac{\left|-56 - 5h\right|}{\sqrt{h^2 + 18h + 91}} = 4$$

Løser i CAS.



Avstanden mellom linjene ℓ og *m* blir 4 når $h = \dfrac{-136 + 4\sqrt{211}}{9} \vee h = \dfrac{-136 - 4\sqrt{211}}{9}$

Oppgave 3

a) Endringen i mengden virkestoff pasienten har i kroppen *t* timer etter behandlingen starter, er gitt ved $M'(t)$. Denne endringen er summen av nedgang som følge av nedbrytning og økning i form av tilførsel av medisin.
Når bryter ned virkestoffet med en fart som er proporsjonal med mengden virkestoff, $M(t)$, kan denne nedbrytningen uttrykkes som $-k \cdot M(t)$.
Tilførselen av virkestoff er konstant 5mg per time.
Ved $t = 0$, har ikke behandlingen startet ennå, så mengden virkestoff i kroppen

er da 0 mg. Det gir initialbetingelsen $M(0)=0$.

$M(t)$ må tilfredsstille differensiallikningen

$M'(t)=-k\cdot M(t)+5 \quad , \quad M(0)=0$, <u>som skulle forklares</u>.

b) Bytter ut *M* og *t* med henholdsvis *y* og *x* når jeg jobber i CAS.

CAS

1 LøsODE(y'=-k*y+5, (0,0))

→ $y=\frac{-5\,e^{-kx}+5}{k}$

2 Setter inn 24 for x og 80 for y:

3 80 = (-5 e^(-k*24) + 5) / k

NLøs: $\{k=0.036\}$

$$\underline{\underline{M(t)=\frac{-5e^{-0{,}036t}+5}{0{,}036}}}$$

c) Setter opp en ny differensiallikning. Har proporsjonalitetskonstanten *k* fra før, men erstatter 5 med *d*, som representerer tilførsel av virkestoff.

Initialbetingelsen blir $(24,80)$.

CAS

1 LøsODE(y'=-0.036y+d, (24,80))

→ $y=\frac{250\,d\,e^{-\frac{108}{125}}-250\,d\,e^{-9\cdot\frac{x}{250}}+720\,e^{-9\cdot\frac{x}{250}}}{9\,e^{-\frac{108}{125}}}$

2 Setter inn 48 for x og 150 for y:

3 150 = (250d e^((-108) / 125) - 250d e^(-9*48 / 250) + 720e^(-9*48 / 250)) / (9e^((-108) / 125))

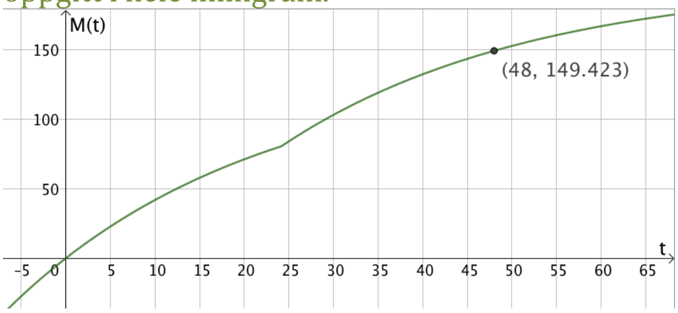
Løs: $\left\{d=\frac{135\,e^{-\frac{108}{125}}-72\,e^{-\frac{216}{125}}}{25\,e^{-\frac{108}{125}}-25\,e^{-\frac{216}{125}}}\right\}$

4 {d = (135e^((-108) / 125) - 72e^((-216) / 125)) / (25e^((-108) / 125) - 25e^((-216) / 125))}

≈ $\{d=7.236\}$

<u>Pasienten må få tilført 7,2 mg virkestoff per time for at mengden virkestoff i kroppen skal være 150 mg ett døgn senere.</u>

For ordensskyld har jeg tegnet en graf som viser situasjonen når *d* er rundet ned til 7,2 mg. Hadde vi satt doseringen til 7,236 mg ville vi nok truffet 150mg mer nøyaktig, men i praksis er jeg usikker på om man går ned på mikrogram nøyaktighet i disse situasjonene. Dessuten var jo doseringen for første døgn oppgitt i hele milligram.



Oppgave 4

a)

CAS

1	1/(k(k+2))==(1/2)*((1/k)-(1/(k+2))) ✓ $\dfrac{1}{(k+2)\,k} \stackrel{?}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$
2	1 / ((k + 2) k) $\stackrel{?}{=}$ 1 / 2 (1 / k - 1 / (k + 2)) → **true**

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$, som skulle vises.

Om vi tenker at vi ikke akkurat "viser" når vi bruker spørrende likhet i CAS, kan vi gjøre det mer "manuelt" ved delbrøksoppspalting.
(Sensorveiledning og forhåndssensurrapport sier ikke noe om hva som kreves her, men vi skal jo bruke resultatene videre, og da må vi jo vite hva vi holder på med).

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2}$$

$$(k+2)A+k\cdot B=1$$

$k=0$ gir $A=\frac{1}{2}$ og $B=-\frac{1}{2}$

Da har vi:

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{\frac{1}{2}}{k+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$, Som skulle vises.

b) Bruker først resultatet i a) til å regne ut summen.

$$s_5=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$$

Vi ser at dette stemmer med oppgaveteksten, men skal også forsøke å *begrunne* det.

(fortsetter på neste side).

Når vi har $\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$, vil altså hvert ledd rekka inneholde ett positivt og ett negativt ledd inni parentesene (så lenge k>0). I annethvert ledd i rekka vil de negative leddene inni parentesene utlignes av et tilsvarende positivt ledd to ledd lenger fremme i summen. Dette fører til at man til slutt sitter igjen med de to positive leddene inni parentesene i de første to leddene i summen, og de negative leddene inni parentesene fra de siste to leddene i summen.

c) Vi har allerede de to første leddene inni parentesene i summen, gjennom arbeidet i forrige deloppgave.

De to siste leddene i rekka er $\dfrac{1}{(n-1)(n+1)}$ og $\dfrac{1}{n(n+2)}$.

Resultatet fra a) gjør at vi skriver disse som $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ og $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$

Resonnementet i forrige deloppgave sier da at vi skal sitte igjen med de to negative leddene fra parentesene, altså $-\dfrac{1}{n+1}$ og $-\dfrac{1}{n+2}$.

Da har vi $s_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$, som skulle begrunnes.

d)

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{k^2+2k} \quad \text{og} \quad \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{k^2+2k+1}$$

Vi ser at nevneren i uttrykket til høyre er større enn nevneren i uttrykket til venstre, mens telleren er den samme i begge uttrykkene.

Da har vi at $\dfrac{1}{k(k+2)} > \dfrac{1}{(k+1)^2}$, som igjen gir at $s_n > \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Som skulle forklares.

I rekka $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ har vi $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Vi har gjennom denne oppgaven kommet frem til at rekka s_n konvergerer. Når hvert ledd i rekka $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ har lavere verdi enn leddene i rekka s_n må også rekka $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} + \cdots$ konvergere.

Som skulle begrunnes.