Løsningsforslag eksamen S2 våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=3x^3+\ln x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{9x^2+\frac{1}{x}}}$

b) $g(x)=x\cdot e^{-2x^2} \Rightarrow g'(x)=1\cdot e^{-2x^2}+x\cdot e^{-2x^2}\cdot(-4x)=\underline{\underline{e^{-2x^2}-4x^2e^{-2x^2}=\left(1-4x^2\right)e^{-2x^2}}}$

c)

$$h(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$h'(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x^2+2-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\underline{\underline{\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}}}$$

Oppgave 2

$f(x)=x^3+6x^2+3x-10$

a) $f(1)=1^3+6\cdot 1^2+3\cdot 1-10=1+6+3-10=10-10=0$

$x=1$ er et nullpunkt til *f*, <u>som skulle vises</u>.

Når $x=1$ er et nullpunkt til f, vet vi at $\left(x-1\right)$ er faktor i *f*.

$$\left(x^3+6x^2+3x-10\right):\left(x-1\right)=x^2+7x+10$$

$$\underline{x^3-x^2}$$

$$7x^2+3x-10$$

$$\underline{7x^2-7x}$$

$$10x-10$$

$$\underline{10x-10}$$

$$0$$

og

$$x^2+7x+10=0$$

$$gir$$

$$\left(x+5\right)\left(x+2\right)=0$$

$$x=-5 \vee x=-2$$

$\underline{\underline{f \text{ har nullpunktene } x=-5\text{ , } x=-2 \text{ og } x=1}}$

b) $f'(x)=3x^2+12x+3=3\left(x^2+4x+1\right).$

Bestemmer nullpunktene til den deriverte:

$$f'(x)=0$$

$$x^2+4x+1=0$$

$$gir$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt{3}}{2}=-2\pm\sqrt{3}$$

Grafen til den deriverte er en parabel som vender hul side opp (”smilemunn”), og er dermed negativ mellom nullpunktene.
Når vi leser fra venstre mot høyre i koordinatsystemet, vil grafen til *f* først ha toppunkt, så bunnpunkt.

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har toppunkt for } x=-2-\sqrt{3} \text{ og bunnpunkt for } x=-2+\sqrt{3}}}$$

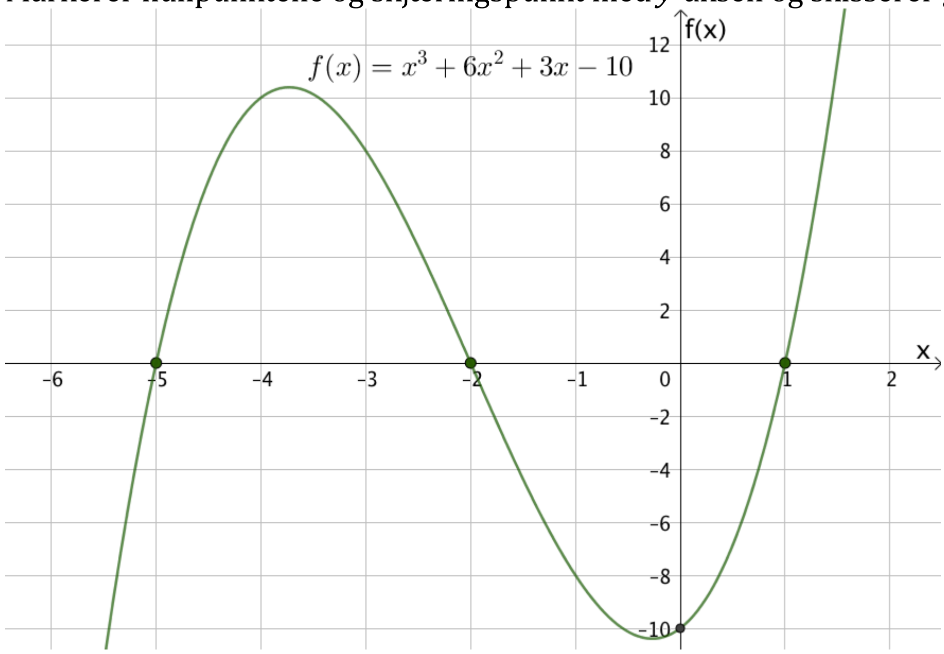
c) Grafen til den deriverte har symmetrilinje $x=-2$, så $\left(-2,f(-2)\right)$ er vendepunkt på grafen til *f*. Vi har allerede funnet ut at dette er et nullpunkt, så grafen til *f* har vendepunkt i $\left(-2,0\right)$.

$$f'(-2)=3\left(-2\right)^2+12\left(-2\right)+3=12-24+3=-9$$

Når vendetangenten går gjennom punktet $\left(-2,0\right)$ og har stigningstall -9, vil den krysse *y*-aksen i $\left(0,-18\right)$.

Likningen til vendetangenten er $\underline{\underline{y=-9x-18}}$

d) Markerer nullpunktene og skjæringspunkt med *y*-aksen og skisserer grafen til *f*.



Oppgave 3

a) Når vi får vite at $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$, kan vi se at $d = -3$.
(verdien av leddene minker med 6 på to steg).
Da har vi også at $a_1 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$gir$$

$$a_6 = 11 + (6-1)(-3) = 11 - 15 = -4$$

og

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$gir$$

$$S_6 = \frac{11-4}{2} \cdot 6 = 7 \cdot 3 = 21$$

<u>Dersom rekka er aritmetisk, er summen av de seks første leddene lik 21.</u>

b)

$$a_2 \cdot k^2 = a_4$$

$$gir$$

$$8k^2 = 2$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$k = \pm\frac{1}{2}$$

Når $k = \frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1 = 2a_2 = 2 \cdot 8 = 16$$

$$og$$

$$S_6 = 16 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{\frac{1}{64} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = 32 \cdot \frac{63}{64} = \frac{63}{2}$$

Når $k = -\frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1 = -2a_2 = -2 \cdot 8 = -16$$

og

$$S_6 = -16 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = -16 \cdot \frac{\frac{1}{64} - 1}{-\frac{3}{2}} = -16 \cdot \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{32}{3} \cdot \frac{63}{64} = -\frac{63}{6} = -\frac{21}{2}$$

Summene av de seks første leddene i hver av de to geometriske rekkene er henholdsvis $\frac{63}{2}$ og $-\frac{21}{2}$.

Oppgave 4

a) Mengden virkestoff (antall mg) Elise har i kroppen like etter hun har tatt den fjerde tabletten, er gitt ved rekka

$$125 + 125 \cdot 0{,}8 + 125 \cdot 0{,}8^2 + 125 \cdot 0{,}8^3$$

Bestemmer summen av denne rekka:

$$\begin{aligned} 125 + 125 \cdot 0{,}8 + 125 \cdot 0{,}8^2 + 125 \cdot 0{,}8^3 &= 125\left(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + 0{,}8^3\right) \\ &= 125\left(1 + 0{,}8 + 0{,}64 + 0{,}512\right) \\ &= 125 + 100 + 80 + 64 \\ &= 369 \end{aligned}$$

Like etter at Elise har tatt den fjerde tabletten har hun 369 mg virkestoff i kroppen.

Her kunne vi også brukt sumformelen for geometrisk rekke, men i dette tilfellet tror jeg ikke utregningene nødvendigvis ville blitt lettere av den grunn.

b) Nå har vi ei uendelig geometrisk rekke der $a_1 = 125$ og $k = 0{,}8$.

Siden $-1 < k < 1$ vil denne rekka konvergere.

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{125}{1-0{,}8} = \frac{125}{0{,}2} = 125 \cdot 5 = 625$$

Dersom Elise fortsetter å ta én tablett hver dag over en lang tidsperiode, vil mengden virkestoff i kroppen være 625 mg.

Oppgave 5

$$K(x) = 0{,}2x^2 + 80x + 720 \quad , \quad 0 < x < 400$$

a) Vi får vite at grensekostnaden ved dagens produksjonsmengde er 160 kroner. Vi finner altså daglig produksjonsmengde ved å løse likningen $K'(x) = 160$ -

$$K'(x) = 160$$
$$0,4x + 80 = 160$$
$$0,4x = 160 - 80$$
$$x = \frac{80}{0,4}$$
$$x = \frac{800}{4}$$
$$x = 200$$

<u>Bedriften produserer 200 enheter per dag.</u>

b) Bestemmer et uttrykk for overskuddet ved produksjon og salg av *x* enheter.
$$O(x) = I(x) - K(x) = 180x - \left(0,2x^2 + 80x + 270\right) = -0,2x^2 + 100x - 270$$

Sjekker om overskuddet er på vei opp eller ned når bedriften produserer og selger 300 enheter.
$$O'(x) = -0,4x + 100$$
$$gir$$
$$O'(300) = -0,4 \cdot 300 + 100 = -120 + 100 = -20$$
Vi ser at overskuddet er på vei nedover ved produksjon og av 300 enheter.
<u>Nei, det vil *ikke* lønne seg og øke produksjonen til mer enn 300 enheter per dag.</u>

c) Enhetskostnaden er gitt ved
$$G(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{0,2x^2 + 80x + 720}{x} = 0,2x + 80 + \frac{720}{x}.$$
Vi kan bestemme kostnadsoptimal produksjonsmengde ved å sette enhetskostnaden lik grensekostnaden.
$$G(x) = K'(x)$$
$$0,2x + 80 + \frac{720}{x} = 0,4x + 80 \quad | \cdot x$$
$$0,2x^2 + 80x + 720 = 0,4x^2 + 80x$$
$$0,2x^2 = 720$$
$$x^2 = \frac{720}{0,2}$$
$$x^2 = 3600$$
$$x = \pm\sqrt{3600}$$
$$x = \pm 60$$

<u>En produksjonsmengde på 60 enheter per dag gir lavest kostnad per enhet.</u>

Oppgave 6

$$q(p)=\frac{10000}{\ln p} \quad , \quad p\in[2,10]$$

Inntekten ved salg av *x* enheter er gitt ved $I(x)=p(x)\cdot x$, der $p(x)$ er prisen per enhet. Bestemmer $p(x)$ ut fra etterspørselsfunksjonen. Etterspørselen tilsvarer antall solgte enheter, så setter etterspørselen lik *x*.

$$x=\frac{10000}{\ln p}$$

$$\ln p=\frac{10000}{x}$$

$$p=e^{\frac{10000}{x}}$$

Vi har altså $p(x)=e^{\frac{10000}{x}}$, slik at $I(x)=xe^{\frac{10000}{x}}$.

$$I'(x)=1\cdot e^{\frac{10000}{x}}+x\cdot e^{\frac{10000}{x}}\cdot\left(-\frac{10000}{x^2}\right)=\left(1-\frac{10000}{x}\right)e^{\frac{10000}{x}}.$$

$e^{\frac{10000}{x}}>0$ for alle *x*, så $I'(x)=0$ når $1-\frac{10000}{x}=0$, altså når $x=10000$.

Vi ser dessuten at $1-\frac{10000}{x}<0$ når $x<10000$ og $1-\frac{10000}{x}>0$ når $x>10000$, så $x=10000$ gir bunnpunkt på grafen til *I*.

$$I(10000)=10000\cdot e^{\frac{10000}{10000}}=10000\cdot e\approx 27200$$

<u>Den laveste daglige inntekten bedriften kan få ved salg av denne varen er ca. 27200kr.</u>

Oppgave 7

a) $E(X)=5\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}4+8\cdot 0{,}2+9\cdot 0{,}1=0{,}5+1{,}2+2{,}8+1{,}6+0{,}9=\underline{\underline{7}}$

Svaret forteller at det over tid, ved kjøp av mange poser med torskefileter, vil være i gjennomsnitt 7 fileter per pose.

b)

$$\begin{aligned}Var(X)&=(5-7)^2\cdot 0{,}1+(6-7)^2\cdot 0{,}2+(7-7)^2\cdot 0{,}4+(8-7)^2\cdot 0{,}2+(9-7)^2\cdot 0{,}1\\&=(-2)^2\cdot 0{,}1+(-1)^2\cdot 0{,}2+0^2\cdot 0{,}4+1^2\cdot 0{,}2+2^2\cdot 0{,}1\\&=4\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}2+0+1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1\\&=0{,}4+0{,}2+0{,}2+0{,}4\\&=1{,}2\end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>.

c) Vi har her 120 uavhengige stokastiske variabler (antall torskefileter i en pose), der alle har samme sannsynlighetsfordeling. Da sier sentralgrensesetningen at det totale antallet torskefileter vil være tilnærmet normalfordelt.
Da har vi $E(S) = 7 \cdot 120 = 840$ og $Var(S) = 1{,}2 \cdot 120 = 144$.
<u>Som skulle begrunnes</u>.

d) Antall torskefileter i hver pose er uavhengig av hverandre, og utvalget er stort, så vi kan argumentere med sentralgrensesetningen her også.

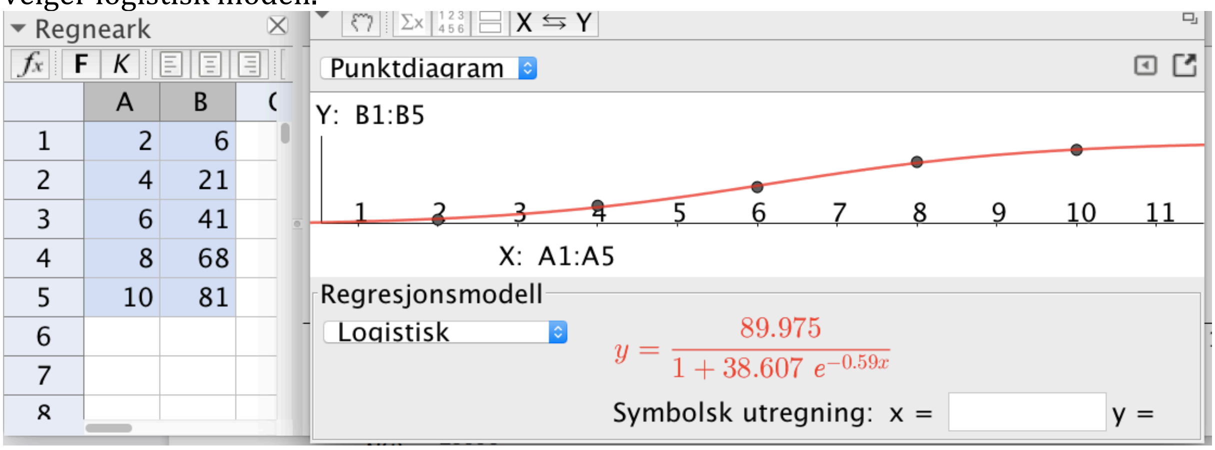
$$\begin{aligned} P(S \geq 822) &= 1 - P\left(z \leq \frac{822-840}{\sqrt{144}}\right) \\ &= 1 - P\left(z \leq \frac{-18}{12}\right) \\ &= 1 - P(z \leq -1{,}5) \\ &= 1 - 0{,}0668 \\ &= 0{,}9332 \end{aligned}$$

<u>Sannsynligheten for at Caroline får nok torskefileter denne uken er 93,32 %.</u>

Del 2

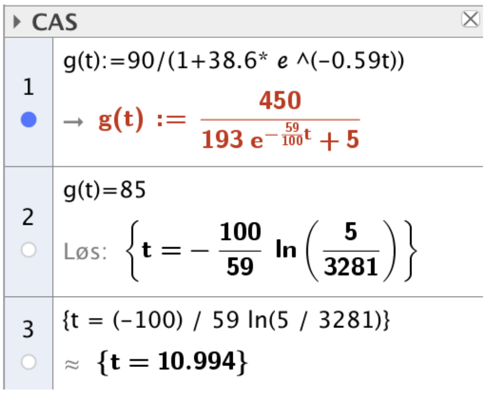
Oppgave 1

a) Legger inn verdiene i regnearket i GeoGebra, gjennomfører regresjonsanalyse og velger logistisk modell.



$$\underline{\underline{g(t) = \frac{90}{1 + 38{,}6e^{-0{,}59t}}}}$$

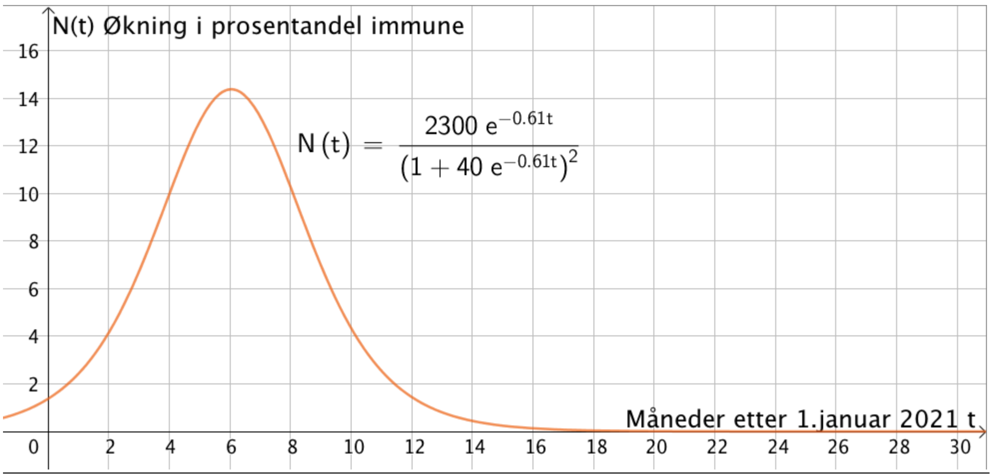
b)



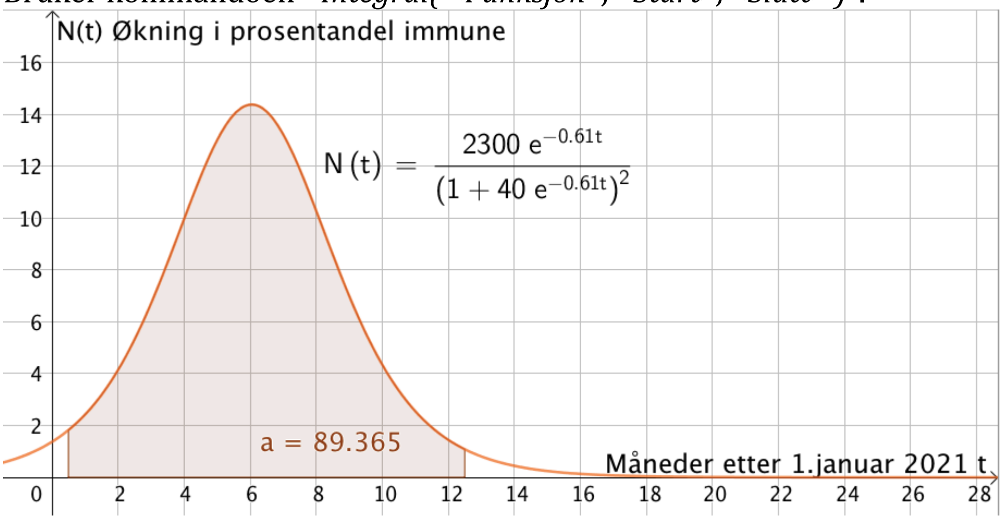
<u>I følge modellen vil andelen immune passere 85 % i slutten av november 2021</u>

c) Når t går mot uendelig, vil $e^{-0{,}59t}$ gå mot null.
Det betyr at verdien til g vil nærme seg, men aldri nå, 90 etter hvert som tiden går. Det vil altså aldri være 90 % eller mer som oppnår immunitet i følge modellen.
<u>Nei, i følge modellen vil aldri hele befolkningen bli immune.</u>

d)



e) Bruker kommandoen *" Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"*.

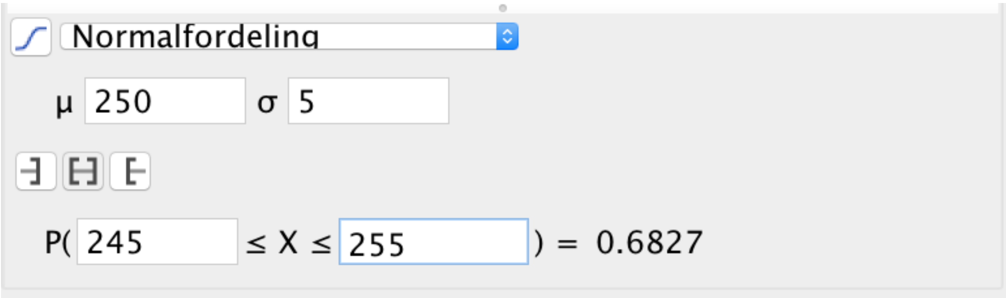


$$\underline{\underline{\int_{0,5}^{12,5} N(t)\,dt = 89,37}}$$

Dette forteller at den samlede økningen i prosentandel immune i byen var 89,37 % fra midten av januar 2021 til midten av januar 2021.
Flesteparten av dem som oppnådde immunitet, oppnådde det altså i denne perioden.

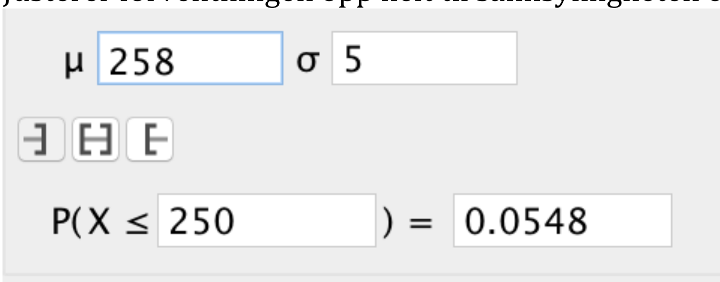
Oppgave 2

a) Vi ser at vi er i området $\pm$ ett standardavvik fra forventningen, så da vet vi at sannsynligheten skal være omtrent 68,3 %, når X er normalfordelt.
Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra til å bestemme sannsynlighet til å "bekrefte" at dette stemmer.

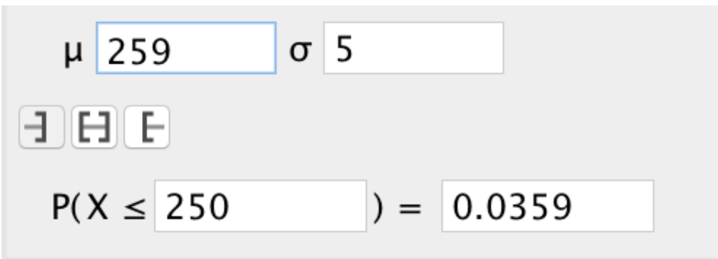


<u>Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt pose inneholder mellom 245 gram og 255 gram kaffe er 68,3 %.</u>

b) Justerer forventningen opp helt til sannsynligheten er høyst 5 %.



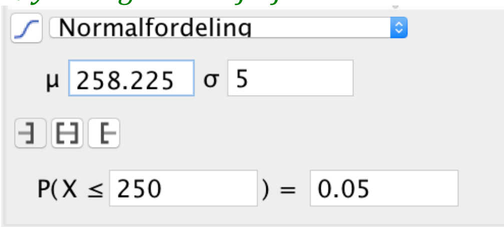
Forventning på 258 gram er litt for lavt.



Forventningsverdi på 259 gram er høyt nok.

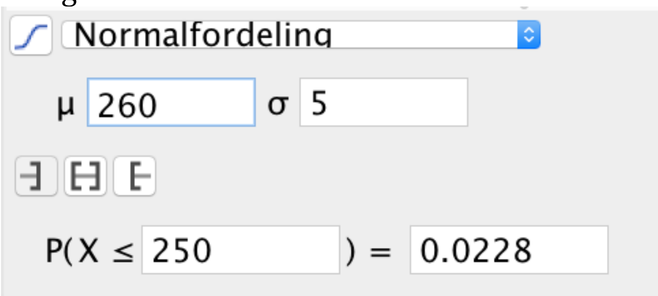
<u>Forventningsverdien må være minst 259 gram for at sannsynligheten for at høyst 5 % av posene inneholder mindre enn 250 gram kaffe.</u>

Vi kan finjustere og finne en enda mer presis verdi ved å være mer nøyaktige enn hele gram, så kan det sikkert diskuteres hvor realistisk det er i praksis. Altså hvor *nøye det går an å finjustere den aktuelle maskinen.*

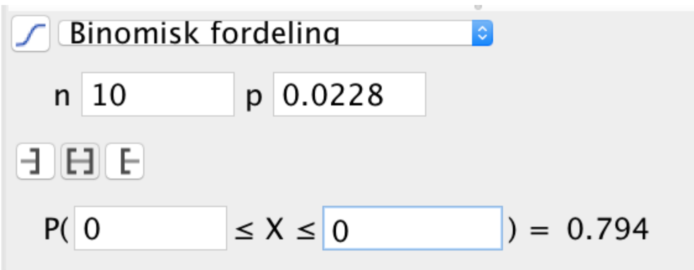


Vi kan altså fortsette å finjustere i sannsynlighetskalkulatoren og komme frem til at en forventning på minst 258,255 gram vil gi akkurat 5% sannsynlighet for at en pose inneholder mindre enn 250 gram kaffe, og at forventningen derfor må settes til minst 258,255 gram.

c) Bestemmer først sannsynligheten for at en tilfeldig pose inneholder mindre enn 250 gram kaffe.



Vi kan se på pakkingen av 10 poser kaffe i en eske som 10 uavhengige delforsøk, der vi kjenner sannsynligheten for at en tilfeldig pose inneholder mindre enn 250 gram kaffe. Vi har altså en binomisk sannsynlighetsmodell.



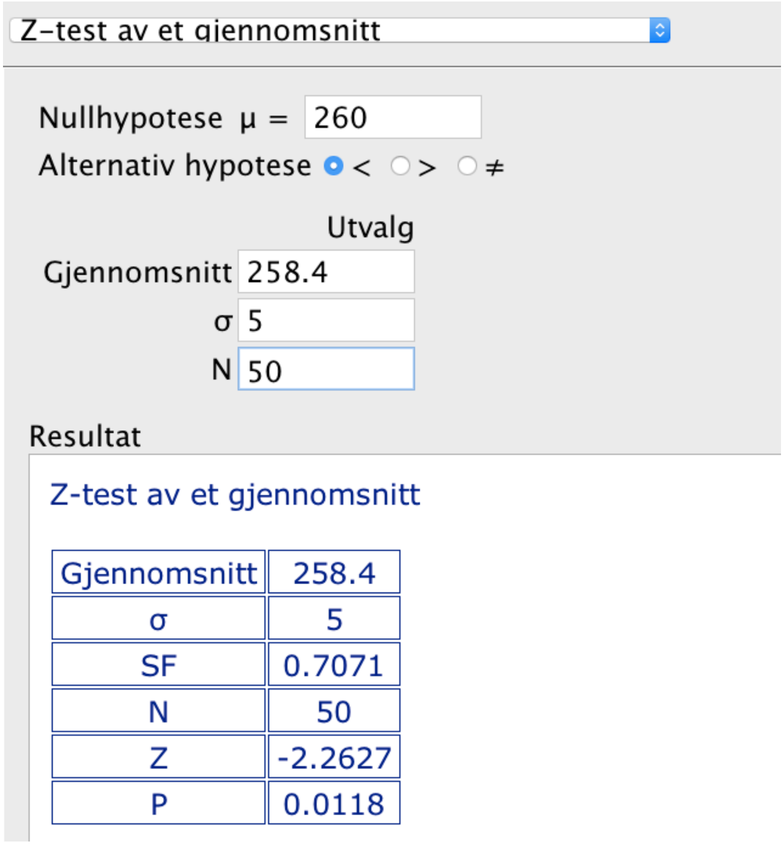
<u>Sannsynligheten for at ingen av posene i en tilfeldig eske inneholder mindre enn 250 gram kaffe er 79,4 %.</u>

d) Nullhypotesen er at forventningen er 260 gram, mens den alternative hypotesen er at forventningen er lavere.

$$H_0 : \mu = 260$$

$$H_A : \mu < 260$$

e) Vi antar at vekten til kaffen i de 50 posene er tilnærmet normalfordelt og at standardavviket på 5 gram fortsatt er gjeldende. Da kan vi gjennomføre en Z-test av gjennomsnittet.

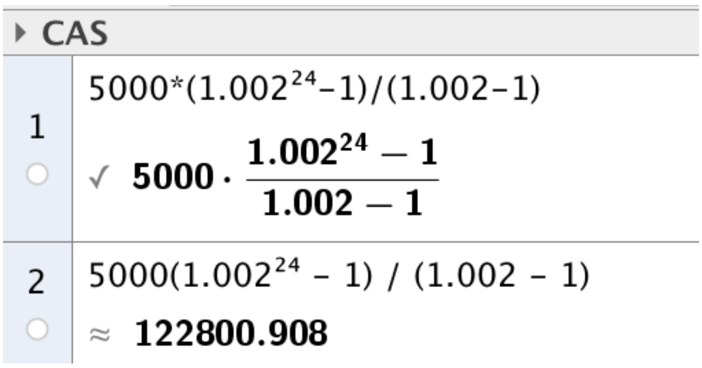


Vi får en *p*-verdi på 1,18%, som ligger langt under signifikansnivået på 5%.

Vi *forkaster nullhypotesen*, og konkluderer med at ledelsen *har* grunnlag for sin mistanke om at det er noe galt med innstillingen til pakkemaskinen.

Oppgave 3

a) Summen av sluttverdiene til innskuddene danner ei geometrisk rekke der $a_1 = 5000$, $k = 1{,}002$ og antall ledd er 24. Bestemmer summen av denne rekka.



<u>Camilla har 122 800,91 kroner på konten like etter det 24.innskuddet.</u>

b) Summen av nåverdiene til terminbeløpene danner ei geometrisk rekke der $a_1 = \frac{x}{1{,}015}$, $k = \frac{1}{1{,}015}$ og antall ledd er 36.
Setter summen av rekka til 100 000 og bestemmer *x*.

CAS

1 (x/1.015)*((1/1.015)^36-1)/((1/1.015)-1)=100000

$$\checkmark \quad \frac{x}{1.015} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1.015}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{1.015} - 1} = 100000$$

2 $x / 1.015 \, ((1 / 1.015)^{36} - 1) / (1 / 1.015 - 1) = 100000$

NLøs: $\{x = 3615.24\}$

<u>De månedlige terminbeløpene blir på 3615,24 kroner.</u>

c) Setter opp *"samme"* likning som i forrige deloppgave, men bytter ut *x* med 2926 og bytter ut 1,015 med *x*. Løsningen vil altså gi oss vekstfaktoren ved en prosentvis økning tilsvarende rentefoten til lånet.

CAS

1 (2926/x)*((1/x)^36-1)/((1/x)-1)=100000

$$\checkmark \quad \frac{2926}{x} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{36} - 1}{\frac{1}{x} - 1} = 100000$$

2 $2926 / x \, ((1 / x)^{36} - 1) / (1 / x - 1) = 100000$

Løs: $\{x = -0.89, x = 1.003\}$

Det er kun den positive løsningen som er aktuell å bruke her.

<u>Den månedlige rentefoten på dette lånet er 0,3 %.</u>