Løsningsforslag eksamen R2 våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=3x\cdot\sin x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{3\sin x+3x\cos x=3\left(\sin x+x\cos x\right)}}$

b)

$$g(x)=\frac{\sin\left(2x\right)}{\cos x}$$

gir

$$g'(x)=\frac{\cos\left(2x\right)\cdot 2\cdot\cos x-\sin\left(2x\right)\left(-\sin x\right)}{\cos^2 x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2\cos\left(2x\right)\cos x+\sin\left(2x\right)\sin x}{\cos^2 x}}}$$

Vi har derivert funksjonen, men kan forenkle uttrykket noe hvis vi ønsker det.

$$g'(x)=\frac{2\cos\left(2x\right)\cos x+\sin\left(2x\right)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2\left(1-2\sin^2 x\right)\cdot\cos x+2\sin x\cos x\cdot\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\left(2-4\sin^2 x+2\sin^2 x\right)\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{2-2\sin^2 x}{\cos x}}}$$

Oppgave 2

a) $\int\left(e^x-\sin x\right)dx=\underline{\underline{e^x+\cos x+C}}$

b) Bestemmer først det ubestemte integralet ved hjelp av variabelskifte.

Setter $u=\sin x$. Da har vi $\dfrac{du}{dx}=\cos x \Leftrightarrow dx=\dfrac{du}{\cos x}$.

$$\int\sin x\cdot\cos x\,dx=\int u\cdot\cos x\frac{du}{\cos x}=\int u\,du=\frac{1}{2}u^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C$$

Da kan jeg bestemme det bestemte integralet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-0^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

Oppgave 3

$$2\cos(3x) = -\sqrt{3}$$

$$\cos(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$3x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \vee 3x = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in Z)$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{18} + k\cdot\frac{12\pi}{18} \vee x = \frac{7\pi}{18} + k\cdot\frac{12\pi}{18}$$

$x \in [0, \pi]$ gir da:

$$\underline{\underline{x = \frac{5\pi}{18} \vee x = \frac{7\pi}{18} \vee x = \frac{17\pi}{18}}}$$

Oppgave 4

Lineær differensiallikning av første orden. Integrerende faktor er e^{2x}.

$$y' + 2y = 4$$

$$y'\cdot e^{2x} + 2y\cdot e^{2x} = 4\cdot e^{2x}$$

$$(y\cdot e^{2x})' = 4e^{2x}$$

$$y\cdot e^{2x} = \int 4e^{2x}\,dx$$

$$y\cdot e^{2x} = \frac{4}{2}e^{2x} + C \quad |\cdot e^{-2x}$$

$$y = 2 + Ce^{-2x}$$

Generell løsning er altså $y = 2 + Ce^{-2x}$

$$y(0) = 1$$

$$gir$$

$$2 + C = 1$$

$$C = -1$$

Spesiell løsning: $\underline{\underline{y = 2 - e^{-2x}}}$

Oppgave 5

a) Skal altså bestemme k slik at $\int_1^k \frac{1}{x}\,dx = 2$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

(Vi skal forholde oss til *x*-verdier mellom 1 og *k*, og $k>1$, så vi kan sløyfe absoluttverditegn i den videre beregningen)

$$\left[\ln x\right]_1^k = 2$$
$$\ln k - \ln 1 = 2$$
$$\ln k - 0 = 2$$
$$\ln k = 2$$
$$k = e^2$$

$$\underline{\underline{\text{Arealet av } F \text{ blir 2 når } k = e^2}}$$

b) $V = \pi \cdot \int_1^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \cdot \int_1^4 x^{-2}\, dx = \pi\left[-x^{-1}\right]_1^4 = -\pi\left[\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\pi\left(\frac{1}{4}-1\right) = \frac{3\pi}{4}$

$$\underline{\underline{\text{Når } k = 4, \text{ har vi } V = \frac{3\pi}{4}}}$$

Oppgave 6

a) *Her er det mulig å rett og slett vise at likningen **må** være en mulig likning for planet ved å vise at den stemmer for koordinatene til alle de tre punktene.*
(I følge sensorveiledningen kan dette gi full uttelling).
Jeg velger likevel her å vise litt mer "grundig", som om oppgaveteksten kun hadde gitt meg punktene og bedt meg bestemme likningen.

$$\overrightarrow{AB} = \left[-2-2, 1-3, -3-(-7)\right] = \left[-4,-2,4\right]$$

og

$$\overrightarrow{AC} = \left[3-2, 5-3, -5-(-7)\right] = \left[1,2,2\right]$$

gir

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left[-2\cdot 2 - 4\cdot 2, -\left(-4\cdot 2 - 4\cdot 1\right), -4\cdot 2 - (-2)\cdot 1\right] = \left[-12,12,-6\right] = -6\left[2,-2,1\right]$$

Det betyr at $\vec{n} = \left[2,-2,1\right]$ er en normalvektor for planet α.

Bruker *A* som fast punkt, og får da:

$$2\left(x-2\right) - 2\left(y-3\right) + \left(z-(-7)\right) = 0$$
$$2x - 4 - 2y + 6 + z + 7 = 0$$
$$2x - 2y + z + 9 = 0$$

$2x - 2y + z + 9 = 0$ er en likning for planet α.
<u>Som skulle begrunnes</u>.

b) $\overrightarrow{PQ} = \left[6-3, 3-1, -4-(-2)\right] = \left[3, 2, -2\right]$, så $\vec{r} = \left[3, 2, -2\right]$ er en retningsvektor for linja ℓ.
Dersom linja ℓ er parallell med planet α, må retningsvektoren til linja og normalvektoren til planet stå normalt på hverandre.
$\vec{r} \cdot \vec{n} = \left[3, 2, -2\right] \cdot \left[2, -2, 1\right] = 3 \cdot 2 + 2(-2) - 2 \cdot 1 = 6 - 4 - 2 = 0$, så $\vec{r} \perp \vec{n}$.

Linja ℓ er parallell med planet α.
<u>Som skulle vises</u>.

c) Siden linja er parallell med planet, vil alle punkter på linja ha lik avstand til planet. Bestemmer avstanden fra punktet P til planet.

$$\frac{\left|2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 9\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left|6 - 2 - 2 + 9\right|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{11}{\sqrt{9}} = \frac{11}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Avstanden fra linja } \ell \text{ til planet } \alpha \text{ er } \frac{11}{3}}}$$

Oppgave 7

a)

$$f(x) = 0$$
$$2\cos^2 x + \sin(2x) = 0$$
$$2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 0$$
$$2\cos x(\cos x + \sin x) = 0$$
$$så$$
$$\cos x = 0 \vee \cos x + \sin x = 0$$

$\cos x = 0$ har to løsninger i det aktuelle intervallet, nemlig $x = -\frac{\pi}{2}$ og $x = \frac{\pi}{2}$.

Jobber videre med $\cos x + \sin x = 0$:

$$\cos x + \sin x = 0 \quad | \cdot \frac{1}{\cos x}$$
$$1 + \tan x = 0$$
$$\tan x = -1$$

Denne likningen har to løsninger i det aktuelle intervallet: $x = -\frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{3\pi}{4}$

$f(x)$ har altså følgende nullpunkter for $x \in \left\langle -\pi, \pi \right\rangle$:

$$\underline{\underline{x = -\frac{\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{4} \vee x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{4}}}$$

b) Vi skal altså skrive funksjonsuttrykket om til en ren sinusfunksjon, på formen $f(x) = A\sin\left(cx + \varphi\right) + d$.

Starter også her med å først skrive om uttrykket ved hjelp av trigonometriske identiteter.

$f(x) = 2\cos^2 x + \sin\left(2x\right) = \cos\left(2x\right) + 1 + \sin\left(2x\right) = \sin\left(2x\right) + \cos\left(2x\right) + 1.$

De to første leddene i det omskrevne funksjonsuttrykket er på formen $a\sin\left(cx\right) + b\cos\left(cx\right)$.

Vi kan da bestemme A og φ:

$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

og

$\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ gir $\tan\varphi = \dfrac{1}{1} = 1$.

Punktet $\left(1,1\right)$ er i første kvadrant, så $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Vi har nå funnet ut at $\sin\left(2x\right) + \cos\left(2x\right) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Da har vi $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 1$, som skulle vises.

c) Den største verdien $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ kan ha er 1, så alle toppunktene har

y-koordinat $1 + \sqrt{2}$.

Bestemmer *x*-koordinaten til disse punktene.

$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad \left(k \in Z\right)$$

$$2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \pi$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{8\pi}{8}$$

I intervallet $\left\langle -\pi, \pi \right\rangle$ har likningen følgende løsninger:

$$x=-\frac{7\pi}{8} \vee x=\frac{\pi}{8}$$

Den minste verdien $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ kan ha er -1, så alle bunnpunktene har *y*-koordinat $1-\sqrt{2}$.
Bestemmer *x*-koordinaten til disse punktene.

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

$$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi \qquad (k\in Z)$$

$$2x=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$2x=\frac{5\pi}{4}+k\cdot 2\pi$$

$$x=\frac{5\pi}{8}+k\cdot \pi$$

$$x=\frac{5\pi}{8}+k\cdot \frac{8\pi}{8}$$

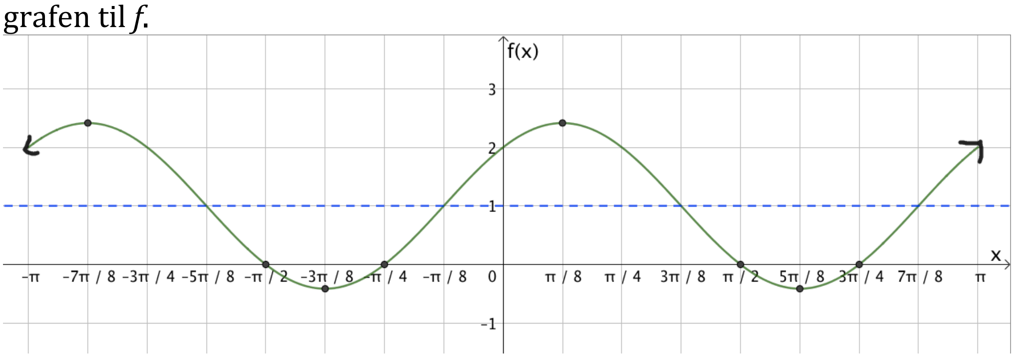
I intervallet $\langle -\pi,\pi\rangle$ har likningen følgende løsninger:

$$x=-\frac{3\pi}{8} \vee x=\frac{5\pi}{8}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har toppunkter } \left(-\frac{7\pi}{8},1+\sqrt{2}\right) \text{ og } \left(\frac{\pi}{8},1+\sqrt{2}\right) \text{ og bunnpunkter } \left(-\frac{3\pi}{8},1-\sqrt{2}\right) \text{ og } \left(\frac{5\pi}{8},1-\sqrt{2}\right)}}$$

Her kunne jeg "slått sammen" de to beregningene ved å legge til $k\cdot\pi$ *istedenfor* $k\cdot 2\pi$ *og brukt at annenhver løsning gir toppunkt og annenhver gir bunnpunkt, siden vi ville alternert mellom 1 og -1 som verdi av* $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

d) Markerer likevektslinja, nullpunktene og topp- og bunnpunktene, og skisserer grafen til *f*.



Oppgave 8

a) Når vi får vite at $a_2 = 8$ og $a_4 = 2$, kan vi se at $d = -3$.
(verdien av leddene minker med 6 på to steg).
Da har vi også at $a_1 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$gir$$

$$a_6 = 11 + (6-1)(-3) = 11 - 15 = -4$$

og

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$gir$$

$$S_6 = \frac{11-4}{2} \cdot 6 = 7 \cdot 3 = 21$$

Dersom rekka er aritmetisk, er summen av de seks første leddene lik 21.

b)

$$a_2 \cdot k^2 = a_4$$

$$gir$$

$$8k^2 = 2$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

$$k = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$k = \pm\frac{1}{2}$$

Når $k = \frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1 = 2a_2 = 2 \cdot 8 = 16$$

$$og$$

$$S_6 = 16 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{\frac{1}{64} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 16 \cdot \frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{1}{2}} = 32 \cdot \frac{63}{64} = \frac{63}{2}$$

Når $k=-\frac{1}{2}$ har vi:

$$a_1=-2a_2=-2\cdot 8=-16$$

og

$$S_6=-16\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^6-1}{-\frac{1}{2}-1}=-16\cdot\frac{\frac{1}{64}-1}{-\frac{3}{2}}=-16\cdot\frac{-\frac{63}{64}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{32}{3}\cdot\frac{63}{64}=-\frac{63}{6}=-\frac{21}{2}$$

Summene av de seks første leddene i hver av de to geometriske rekkene er henholdsvis $\frac{63}{2}$ og $-\frac{21}{2}$.

Oppgave 9

Gitt påstanden $P(n)$: $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

Sjekker først om $P(1)$ er sann: $(-1)^{1-1}\cdot\frac{1(1+1)}{2}=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}=1\cdot 1=1^2$ OK!

Antar nå at påstanden er sann for $n=k$, der k er et naturlig tall.
Vil så vise at påstanden da også er sann for $n=k+1$.

$$\begin{aligned}1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k+1}\cdot k^2+(-1)^{k+2}(k+1)^2&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k+2}(k+1)^2\\&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k-1}\cdot(-1)^3\cdot\frac{2(k+1)^2}{2}\\&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)}{2}-(-1)^{k-1}\cdot\frac{2(k+1)^2}{2}\\&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{k(k+1)-2(k+1)^2}{2}\\&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k+1)(k-2(k+1))}{2}\\&=(-1)^{k-1}\cdot\frac{(k+1)(-k-2)}{2}\\&=(-1)^{k-1}\cdot(-1)\frac{(k+1)(k+2)}{2}\\&=(-1)^{k+1-1}\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\end{aligned}$$

Har vist at påstanden er sann for $n=k+1$ under forutsetning av at den er sann for $n=k$. Av induksjon har vi da at påstanden er sann for alle naturlige tall *n*.
Q.E.D.