Løsningsforslag eksamen 1T våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a)

$$(x-2)(x+1)=0$$
$$gir$$
$$x-2=0 \vee x+1=0$$
$$så$$
$$\underline{\underline{x=2 \vee x=-1}}$$

b) Tar utgangpunkt i likningen fra forrige deloppgave.

$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x^2-x-2=0$$

Vi vet at nullpunktene til uttrykket på venstre side er $x=-1$ og $x=2$, og grafen til uttrykket vil være en parabel som vender hul side opp ("smilemunn"). Da vet vi at verdien av uttrykket er negativ mellom nullpunktene, og følgelig positiv på "hver sin side" av nullpunktene.

Vi kan da sette opp følgende ulikhet med tilhørende løsningsmengde:

$$\underline{\underline{x^2-x-2>0 \text{ når } x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle}}$$

Oppgave 2

$$9x^2-30x+r=(3x-s)^2$$
$$9x^2-30x+r=9x^2-6s\cdot x+s^2$$

Vi må ha $-6s=-30 \Leftrightarrow s=5$ og $r=s^2=5^2=25$

Sammenhengen $9x^2-30x+r=(3x-s)^2$ er en identitet når $\underline{\underline{r=25 \wedge s=5}}$

Oppgave 3

Første kulepunkt:

Nei, det kan *ikke* være riktig at $\sin \angle B = \dfrac{3}{10}$.

Når $\tan \angle B = \dfrac{3}{4}$, er forholdet mellom motstående katet og hosliggende katet $\dfrac{3}{4}$.

I en trekant der katetene er 3 og 4, vil hypotenusen være 5.

Det betyr at i en trekant der $\tan \angle B = \frac{3}{4}$, vil alltid *forholdet* mellom motstående katet og hypotenus være $\frac{3}{5}$.

Andre kulepunkt:
Ja, det kan være riktig at den ene kateteten er 6 og den andre er 8. Dersom kateten som er 6 er motstående til $\angle B$ og den andre er hosliggende til $\angle B$, vil vi ha
$\tan \angle B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Tredje kulepunkt:
Ja, det kan være riktig at hypotenusen er kortere enn 4.

Dersom katetene er for eksempel 0,3 og 0,4, kan vi ha $\tan \angle B = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}$, mens hypotenusen vil være $\sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = \sqrt{0,09 + 0,16} = \sqrt{0,25} = 0,5$, som er kortere enn 4.

Oppgave 4

Når programmet kjøres genereres det kvadrattall.
Man har definert funksjonen $f(x) = x^2$ og satt $x = 1$.
While-løkken vil altså først printe $f(1) = 1$, før *x* økes med én, slik at det i neste "runde" printes $f(2) = 4$ før *x* øker med én igjen. While løkken kjører helt til $f(x) \leq 400$, altså $f(x) \leq 20^2$ -
Siden "printen" står inni løkken, vil programmet printe for hver runde.
Resultatet blir at man får printet ut de 20 første kvadrattallene.

Oppgave 5

Vi må ha et rasjonalt funksjonsuttrykk som ikke er definert for $x = -2$.
$x = -2$ må altså gi 0 i nevner.
Nevneren kan altså være for eksempel $x + 2$. Samtidig må det være slik at verdien av uttrykket nærmer seg 3 når *x* går mot uendelig (eller minus uendelig).
En litt "forenklet" måte å se dette på, er å se på forholdet mellom teller og nevner når man ser bort fra konstantene.
(Konstantene vil ikke ha noen betydning når *x* blir tilstrekkelig stor).

$f(x) = \frac{3x}{x+2}$ tilfredsstiller kravene som nevnes her, men det gjør også $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$.

De to funksjonssuttrykkene over er altså to mulige funksjonsuttrykk for *f*.

Oppgave 6

a) Dersom $(x-3)$ er faktor i $f(x)$, må vi ha $f(3)=0$.

$f(3)=2\cdot 3^3+3^2-18\cdot 3-9=2\cdot 27+9-54-9=54-54=0$.

Divisjonen $f(x):(x-3)$ går opp.

Som skulle vises.

b) Vi ser at $f(0)=9$, så vi kan utelukke graf A.
Faktoriserer *f* for å få bedre oversikt.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3+x^2-18x-9):(x-3)=2x^2+7x+3 \\
\underline{2x^3-6x^2} \\
\qquad 7x^2-18x-9 \\
\qquad \underline{7x^2-21x} \\
\qquad\qquad 3x-9 \\
\qquad\qquad \underline{3x-9} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$2x^2+7x+3=0$$

$$gir$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-7\pm 5}{4}$$

$$så$$

$$f(x)=2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)$$

Nullpunktene $x=-3$ og $x=3$ er symmetriske om *y*-aksen, og nullpunktet $x=\frac{1}{2}$, ligger mellom disse. Dette stemmer godt med graf C.

Det er graf C som er grafen til *f*.

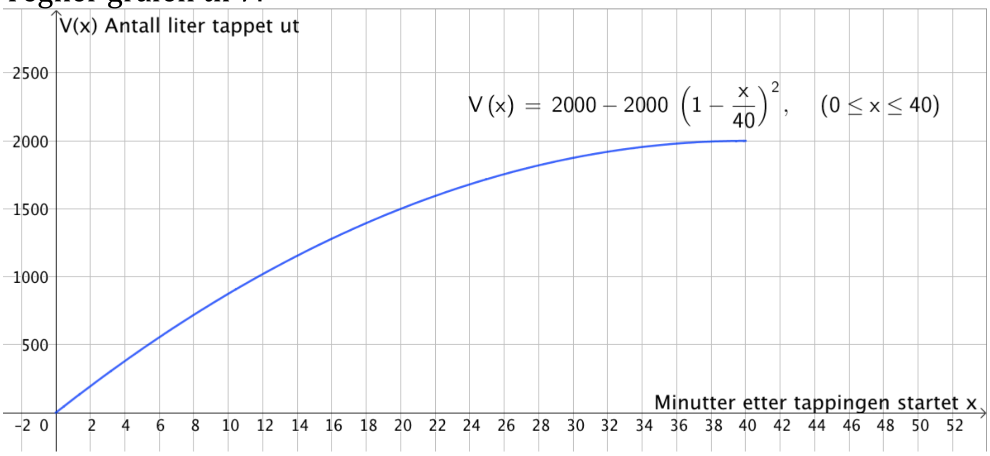
Del 2

Oppgave 1

a) $V(0) = 2000 - 2000\left(1 - \dfrac{0}{40}\right)^2 = 2000 - 2000 \cdot 1^2 = 0$

$V(0) = 0$ forteller at det ikke er tappet ut noe vann av tanken før tappingen starter.

b) Tegner grafen til *V*:

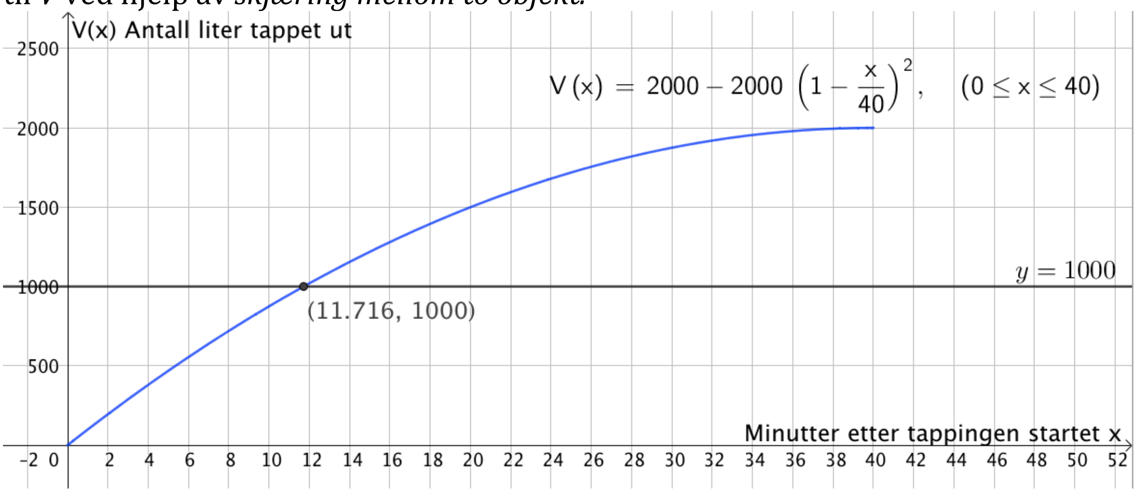


Ser av grafen at største verdien til *V* er 2000.
Kan dobbeltsjekke at dette stemmer nøyaktig ved å regne ut $V(40)$.

$$V(40) = 2000 - 2000\left(1 - \frac{40}{40}\right)^2 = 2000 - 2000 \cdot 0^2 = 2000$$

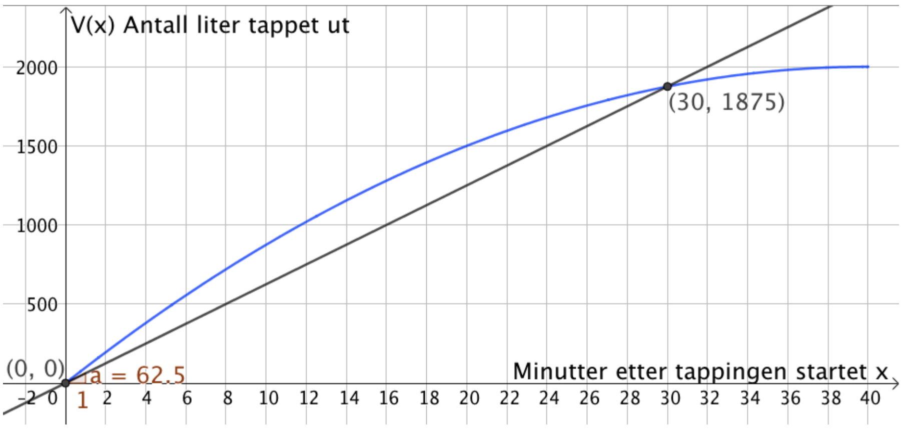
<u>Verdimengden til *V* er [0, 2000].</u>

c) Tegner linja $y = 1000$ og bestemmer skjæringspunktet mellom denne og grafen til *V* ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



<u>Halvparten av vannet er tappet ut etter ca. 11,7 minutter (ca. 11 min og 42 sek).</u>

d)



Markerer punktene på grafen og tegner linje gjennom dem.
Finner stigningstallet til linja ved hjelp av *stigning.*

<u>Stigningstallet til den rette linja gjennom $(0,V(0))$ og $(30,V(30))$ er 62,5</u>.
Det betyr at det tappes ut 62,5 liter vann per minutt i gjennomsnitt den første halvtimen av tappingen.

e) Grafen er brattest i starten og flater mer og mer ut. Det betyr at det tappes ut mindre og mindre vann per minutt etter hvert som tiden går. Det betyr at det første minuttet er det minuttet der det tappes ut mest vann.

$$V(1) = 2000 - 2000\left(1 - \frac{1}{40}\right)^2 = 98,75$$

Det minuttet det tappes ut mest vann, tappes det ut 98,75 liter.
<u>Det vil altså *aldri* tappes ut mer enn 105 liter vann i løpet av ett minutt.</u>

Oppgave 2

a) Antall klosser i figur 5 vil være summen av de fem første kvadrattallene.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

<u>Roar trenger 55 klosser for å lage figur 5.</u>

b) Lager et regneark med oversikt: *Formler:*

	A	B
1	Figurnummer	Antall klosser i figur
2	1	1
3	2	5
4	3	14
5	4	30
6	5	55
7	6	91
8	7	140
9	8	204
10	9	285
11	10	385
12	**Sum**	**1210**
13		

	A	B
1	Figurnummer	Antall klosser i figur
2	1	=A2*A2
3	2	=A3*A3+B2
4	3	=A4*A4+B3
5	4	=A5*A5+B4
6	5	=A6*A6+B5
7	6	=A7*A7+B6
8	7	=A8*A8+B7
9	8	=A9*A9+B8
10	9	=A10*A10+B9
11	10	=A11*A11+B10
12	**Sum**	**=SUMMER(B2:B11)**
13		

<u>Roar trenger 1210 klosser til sammen for å lage de 10 første figurene</u>.

c) Utvider regnearket fra forrige deloppgave:

	A	B	C
1	Figurnummer	Antall klosser i figur	Klosser totalt
2	1	1	1
3	2	5	6
4	3	14	20
5	4	30	50
6	5	55	105
7	6	91	196
8	7	140	336
9	8	204	540
10	9	285	825
11	10	385	1210
12	11	506	1716
13	12	650	2366
14	13	819	3185
15	14	1015	4200
16	15	1240	5440
17	16	1496	6936
18	**17**	**1785**	**8721**
19	*18*	*2109*	*10830*

Formler

	A	B	C
1	Figurnummer	Antall klosser i figur	Klosser totalt
2	1	=A2*A2	=B2
3	2	=A3*A3+B2	=C2+B3
4	3	=A4*A4+B3	=C3+B4
5	4	=A5*A5+B4	=C4+B5
6	5	=A6*A6+B5	=C5+B6
7	6	=A7*A7+B6	=C6+B7
8	7	=A8*A8+B7	=C7+B8
9	8	=A9*A9+B8	=C8+B9
10	9	=A10*A10+B9	=C9+B10
11	10	=A11*A11+B10	=C10+B11
12	11	=A12*A12+B11	=C11+B12
13	12	=A13*A13+B12	=C12+B13
14	13	=A14*A14+B13	=C13+B14
15	14	=A15*A15+B14	=C14+B15
16	15	=A16*A16+B15	=C15+B16
17	16	=A17*A17+B16	=C16+B17
18	**17**	**=A18*A18+B17**	**=C17+B18**
19	*18*	*=A19*A19+B18*	*=C18+B19*

$$10000-8721=1279$$

<u>Roar kan lage 17 klosser. Da vil han ha 1279 klosser til overs.</u>

Oppgave 3

a)

CAS	
1	Bestemmer først BD ved hjelp av cosinussetningen
2	BD:=sqrt((2a)²+(2a)²−2*2a*2a*cos(120°)) → $\mathbf{BD := 2\sqrt{3}\ \vert a\vert}$
3	Bestemmer AD og AB ved hjelp av sinussetningen
4	AD:=BD/sin(45°)*sin(75°) → $\mathbf{AD := \vert a\vert \left(\sqrt{3}+3\right)}$
5	AB:=BD/sin(45°)*sin(180°−45°−75°) → $\mathbf{AB := \sqrt{2}\cdot 3\ \vert a\vert}$
6	Bestemmer omkretsen av fikanten
7	2a+2a+AD+AB → $\mathbf{\vert a\vert \left(\sqrt{2}\cdot 3+\sqrt{3}+3\right)+4\,a}$
8	Vet at a>0, så dropper absoluttverditegn
9	a (sqrt(2) 3 + sqrt(3) + 3) + 4a → $\mathbf{a\left(\sqrt{2}\cdot 3+\sqrt{3}+7\right)}$

$$\underline{\underline{\text{Omkretsen er } \left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}+7\right)a}}$$

b) Lar arealet av ΔABD være A_1 og arealet av ΔBCD være A_2.

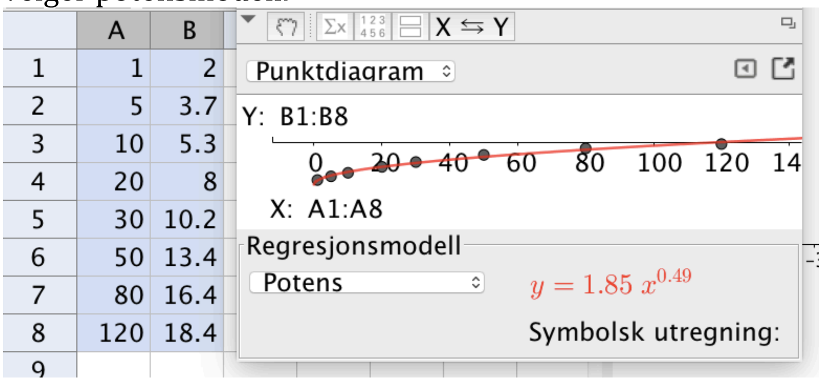
10	A_1:=1/2*AD*AB*sin(45°) $\rightarrow\ \mathbf{A_1} := \frac{1}{2}\, a^2 \left(\sqrt{3}\cdot 3+9\right)$
11	A_2:=1/2*2a*2a*sin(120°) $\rightarrow\ \mathbf{A_2} := \sqrt{3}\, a^2$
12	A_1/A_2 $\rightarrow\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cdot 3+3\right)$

Forholdet mellom arealet av ΔABD og arealet av ΔBCD er

$\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}+3\right)=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$, <u>som skulle vises</u>

Oppgave 4

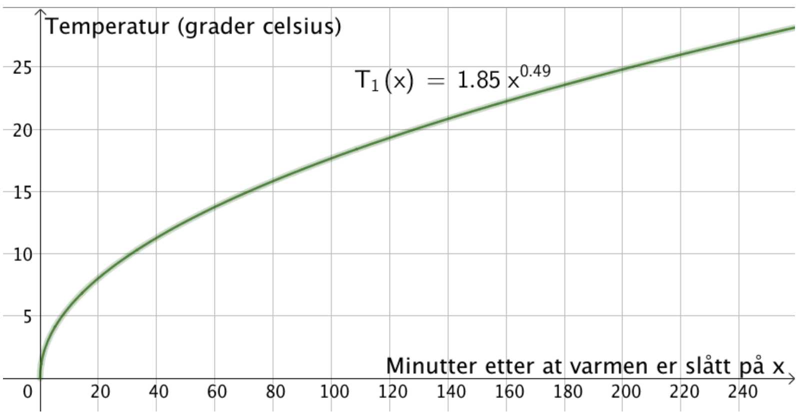
a) Legger tallene inn i regnearket i GeoGebra. Gjennomfører regresjonsanalyse og velger potensmodell.



	A	B
1	1	2
2	5	3.7
3	10	5.3
4	20	8
5	30	10.2
6	50	13.4
7	80	16.4
8	120	18.4
9		

$\underline{\underline{a=1{,}85 \text{ og } b=0{,}49}}$

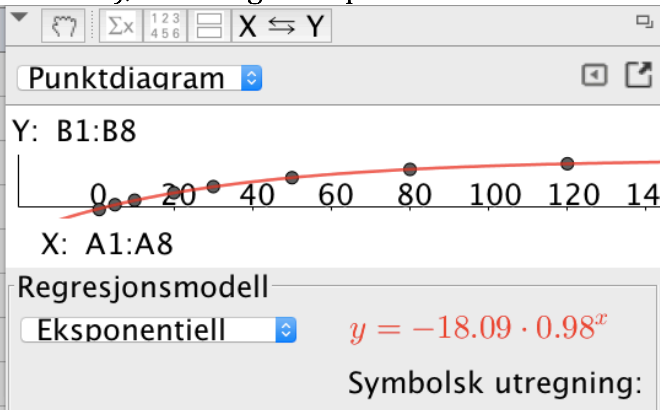
b) Tegner grafen til T_1:



I følge modellen vil temperaturen fortsette å stige ganske kraftig etter hvert som tiden går. Vi ser at temperaturen er 20 grader celsius, som termostaten er stilt på, etter ca.130 minutter. Modellen T_1 er kan være gyldig de første par timene etter varmen er skrudd på, men ikke særlig lenger.

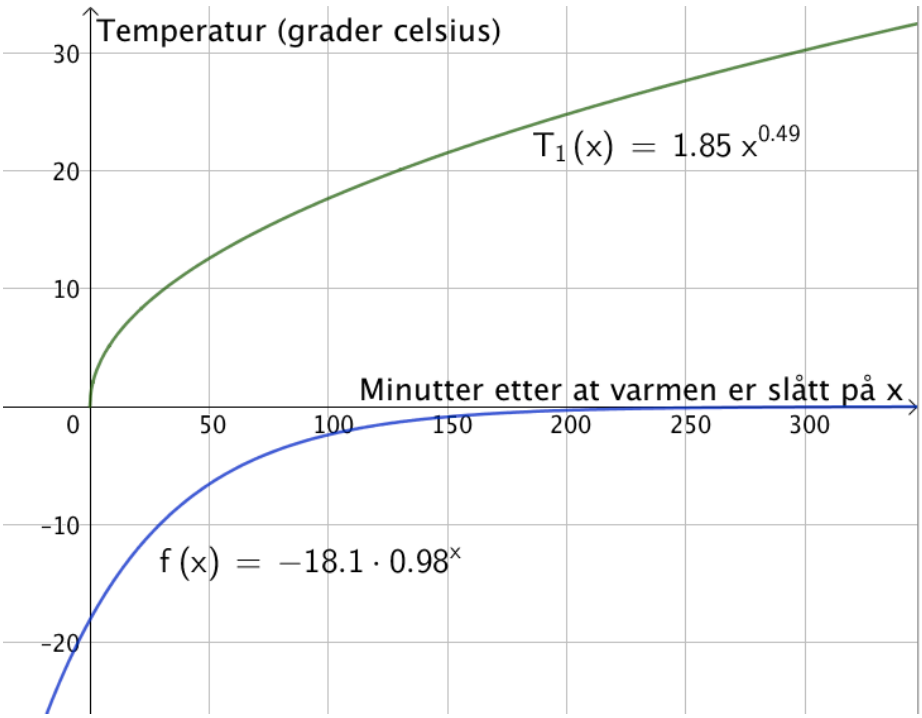
c) Bruker samme metode som i a), men velger eksponentiell modell.

	A	B
1	1	−18
2	5	−16.3
3	10	−14.7
4	20	−12
5	30	−9.8
6	50	−6.6
7	80	−3.6
8	120	−1.6



$\underline{\underline{f(x) = -18{,}1 \cdot 0{,}98^x}}$

d)



Grafene har en nokså lik utvikling i starten, men grafen til *f* flater helt ut.
(I motsetning til grafen til T_1, som er stadig stigende).
Det kan se ut som at grafen til *f* beskriver *utviklingen* i temperaturen i stua på en god måte, og at denne modellen kan være et godt utgangspunkt for å lage en modell som også gir riktige temperaturer.

e)

$$T_2(x) = f(x) + 20$$

så

$$\underline{\underline{T_2(x) = -18{,}1 \cdot 0{,}98^x + 20}}$$

Fire timer tilsvarer 240 minutter.

$$T_2(240) = -18{,}1 \cdot 0{,}98^{240} + 20 \approx 19{,}9$$

<u>I følge modellen T_2 vil temperaturen i stua være 19,9°C etter 4 timer.</u>

Oppgave 5

a) Siden *f* er en andregradsfunksjon, kan jeg uttrykke den deriverte som $f'(x) = 2ax + b$.

Opplysningene i oppgaveteksten gir to likninger med to ukjente, som kan løses i CAS.

CAS	
1	f'(x):=2a*x+b → $f'(x) := 2ax + b$
2	f'(1)=0 → $2a + b = 0$
3	f'(4)=6 → $8a + b = 6$
4	{$2, $3} Løs: $\{\{a = 1, b = -2\}\}$

$$\underline{\underline{f'(x) = 2x - 2}}$$

b) $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Vi har allerede funnet at $a = 1$ og $b = -2$. Skjæringspunktet med *y*-aksen forteller at $c = 4$.

$$\underline{\underline{f(x) = x^2 - 2x + 4}}$$

Oppgave 6

a)

CAS	
1	f(x):=x^3-2b*x^2+(b^2+3)*x → $f(x) := -2bx^2 + b^2x + x^3 + 3x$
2	f(x)=0 Løs: $\{x = 0\}$

f har bare ett nullpunkt, nemlig $x = 0$. Dette er uavhengig av verdien av *b*.

<u>Som skulle vises.</u>

b)

CAS

1 f(x):=x³-2b*x²+(b²+3)*x

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -2\,b\,x^2 + b^2\,x + x^3 + 3\,x}$

2 f'(x)=0

Løs: $\left\{x = \dfrac{2\,b - \sqrt{b^2 - 9}}{3}, x = \dfrac{2\,b + \sqrt{b^2 - 9}}{3}\right\}$

Dersom uttrykkene under rottegnene i løsningene er lik 0, vil den deriverte kun ha ett nullpunkt, og grafen til *f* vil følgelig ha kun ett stasjonært punkt.

$$b^2 - 9 = 0$$
$$b^2 = 9$$
$$b = \pm\sqrt{9}$$
$$b = \pm 3$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har kun ett stasjonært punkt når } b = \pm 3}}$$

c) Løser likningen $f\,'(x) = 3$. Løsningene er *x*-koordinatene til tangeringspunktene med grafen til *f*. Bestemmer videre likningene til tangentene i de aktuelle punktene.

CAS

1 f(x):=x³-2b*x²+(b²+3)*x

$\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := -2\,b\,x^2 + b^2\,x + x^3 + 3\,x}$

2 f'(x)=3

Løs: $\left\{x = b, x = \dfrac{1}{3}\,b\right\}$

3 Tangent(b, f)

$\rightarrow$ $\mathbf{y = 3\,x}$

4 Tangent(b/3, f)

$\rightarrow$ $\mathbf{y = \dfrac{4}{27}\,b^3 + 3\,x}$

$$\underline{\underline{\text{Likningene til tangentene er } y = 3x \text{ og } y = 3x + \frac{4}{27}b^3}}$$