Løsningsforslag eksamen R1 (LK06) våren 2022

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x) = x^2 + \ln x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{2x + \frac{1}{x}}}$

b)

$$g(x) = x \cdot \sqrt{1-2x}$$

gir

$$g'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-2x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2) = \underline{\underline{\sqrt{1-2x} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}}}}$$

Vi kan "bearbeide" uttrykket for å se om det kan skrives enklere:

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1-2x} \cdot \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}} - \frac{x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-2x-x}{\sqrt{1-2x}} = \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}} = \underline{\underline{\frac{1-3x}{1-2x} \cdot \sqrt{1-2x}}}$$

c) $h(x) = \frac{x}{e^{x^2}} \Rightarrow h'(x) = \frac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{1-2x^2}{e^{x^2}}}}$

Oppgave 2

a) $\lg x^3 - 2\lg x = 3$

Her ser vi at vi må ha $x > 0$, så vi risikerer ikke å "miste" en løsning om vi bruker 1.logaritmesetning.

$$\lg x^3 - 2\lg x = 3$$
$$3\lg x - 2\lg x = 3$$
$$\lg x = 3$$
$$10^{\lg x} = 10^3$$
$$\underline{\underline{x = 1000}}$$

b)

$$e^x - 2e^{-x} - 1 = 0 \quad | \cdot e^x$$
$$e^{2x} - 2 - e^x = 0$$
$$e^{2x} - e^x - 2 = 0$$

Faktoriserer ved hjelp av "sum og produkt".

$$\left(e^x+1\right)\left(e^x-2\right)=0$$

Siden $e^x>0$ for alle x, har vi da

$$e^x=2$$

$$\underline{\underline{x=\ln 2}}$$

Oppgave 3

a)

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):\left(x-2\right)=\underline{\underline{x^2+4x+3}}$$

$$\underline{x^3-2x^2}$$

$$4x^2-5x-6$$

$$\underline{4x^2-8x}$$

$$3x-6$$

$$\underline{3x-6}$$

$$0$$

b)

$$x^3+2x^2=5x+6$$

$$x^3+2x^2-5x-6=0$$

$$\left(x^2+4x+3\right)\left(x-2\right)=0$$

$$\left(x+3\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)=0$$

$$så$$

$$\underline{\underline{x=-3\vee x=-1\vee x=2}}$$

Oppgave 4

Arealet av grunnflata er gitt ved $A(x)=\dfrac{V(x)}{h}=\dfrac{x^3-4x^2+2x+7}{x+1}$.

Bruker polynomdivisjon til å bestemme $A(x)$.

$$\left(x^3-4x^2+2x+7\right):\left(x+1\right)=x^2-5x+7$$

$$\underline{x^3+x^2}$$

$$-5x^2+2x+7$$

$$\underline{-5x^2-5x}$$

$$7x+7$$

$$\underline{7x+7}$$

$$0$$

Vi har altså $A(x)=x^2-5x+7$.
Bruker den deriverte til å bestemme hvilken verdi av *x* som gir minst mulig areal av grunnflata.

$$A'(x)=0$$
$$2x-5=0$$
$$2x=5$$
$$x=\frac{5}{2}$$

Grafen til den deriverte er ei rett linje med positivt stigningstall, så den deriverte vil gå fra negativ til positiv i nullpunktet.

Da vet vi at $x=\frac{5}{2}$ gir *bunnpunkt* på grafen til *A*.

Når $x=\frac{5}{2}$, har vi $h=\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$.

$$\underline{\underline{\text{Arealet av grunnflata i prismet blir minst mulig når } h=\frac{7}{2}}}$$

Oppgave 5

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=\underline{\underline{2}}$$

Oppgave 6

a) Dersom *f* skal være en kontinuerlig funksjon, må vi ha $\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2^2+1=4+1=5.$$

og

$$f(2)=5$$

gir

$$2-k=5$$
$$k=2-5$$
$$k=-3$$

$$\underline{\underline{f \text{ er en kontinuerlig funksjon når } k=-3}}$$

b) $\lim_{x\to 2^-} f'(x)=\lim_{x\to 2^-} 2x=2\cdot 2=4$

Når vi har $k=-3$, har vi $f(x)=x-(-3)=x+3$ for $x\geq 2$.

Når $x\geq 2$ har vi altså $f'(x)=1$, slik at $f'(2)=1$.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x)\neq f'(2)$, så *f* er <u>*ikke* deriverbar</u> i $x=2$.

Oppgave 7

a) Dekkene kan plasseres på 4! måter.

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

<u>Mari kan plassere de fire sommerdekkene på bilen på 24 måter.</u>

b) Hvis Mari starter med å plassere ett av dekkene feil, kan de andre tre dekkene plasseres feil på tre forskjellige måter.

Eksempel:

Vi lar dekkene representeres ved fire bokstaver.
La oss si riktig rekkefølge er ABCD, men vi gjør feil og setter B først.
Da har vi følgende muligheter der også resten av dekkene er feilplasserte:
BADC
BCDC
BDAC
Siden det er tre dekk som *ikke* hører hjemme på plass nummer 1, gir det totalt $3 \cdot 3 = 9$ muligheter for å plassere alle dekkene på feil plass.

$$P(\text{Mari plasserer alle dekkene feil}) = \frac{9}{24} = \underline{\underline{\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%}}$$

Oppgave 8

$\angle CDA$ er en periferivinkel som spenner over samme bue som periferivinkelen $\angle CBA$
Da har vi $\angle CDA = \angle CBA$, og $\angle CBA = \angle CBS = 52°$, så $u = 52°$.

$\angle CSA$ er en sentralvinkel som spenner over samme bue som periferivinkelen $\angle CDA$, så $v = 2u = 104°$.

$\angle DEA$ og $\angle DEB$ er nabovinkler, så summen av disse er $180°$.
Da har vi $\angle DEA = 180° - 79° = 101°$.
Vinkelsummen i ΔADE er $180°$,
så $w = 180° - u - \angle DEA = 180° - 52° - 101° = 27°$

$\underline{\underline{u = 52° \wedge v = 104° \wedge w = 27°}}$

Oppgave 9

a) Vil bearbeide likningen slik at den blir på formen

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, der (x_0, y_0) er sentrum i sirkelen.

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y = 5$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 5 + 4 + 16$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Sentrum er $(2,4)$, <u>som skulle vises</u>.

<u>Sirkelens radius er 5.</u>

b) Setter inn $y = 0$ i likningen.

$$x^2 + 0^2 - 4x - 8 \cdot 0 = 5$$
$$x^2 - 4x - 5 = 0$$
$$(x+1)(x-5) = 0$$
$$så$$
$$x = -1 \vee x = 5$$

<u>Sirkelen skjærer *x*-aksen i (-1,0) og (5,0)</u>

Oppgave 10

$\vec{u} = [2,-1]$ er en retningsvektor for linja ℓ.

$[2-0, 4-0] = [2,4] = 2[1,2]$, så $\vec{v} = [1,2]$ er en retningsvektor for linja *m*.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = [2,-1] \cdot [1,2] = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = 0$.

Skalarproduktet er 0, så de to retningsvektorene er ortogonale.

$$\underline{\underline{\text{Vinkelen mellom linjene } \ell \text{ og } m \text{ er } 90^\circ}}$$

Oppgave 11

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$.

Bestemmer stigningstallet til tangenten i *B*:

$$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

Det betyr at $\vec{u} = \left[1, \sqrt{3}\right]$ er en retningsvektor for tangenten i *B*.

Siden sentrum i sirkelen ligger på *y*-aksen setter jeg $C = (0, y_0)$.

Da har vi $\overrightarrow{CB} = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{3}{4} - y_0\right] = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4} - y_0\right]$.

Tangenten til en sirkel, står alltid vinkelrett på et linjestykke fra sentrum til tangeringspunktet. Vi har altså at $\vec{u} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.

$$\left[1,\sqrt{3}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}-y_0\right]=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}-y_0\right)=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\sqrt{3}y_0=0 \quad \Big|\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$2+3-4y_0=0$$

$$4y_0=5$$

$$y_0=\frac{5}{4}$$

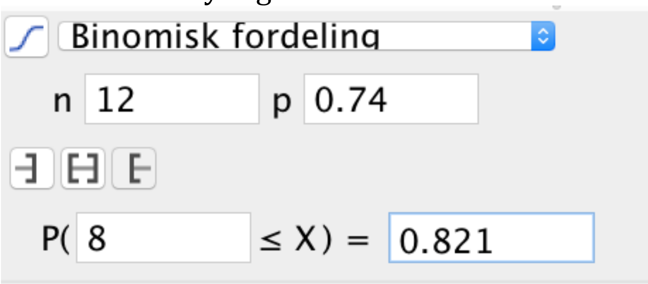
Sirkelen har sentrum i $\left(0,\frac{5}{4}\right)$

Del 2

Oppgave 1

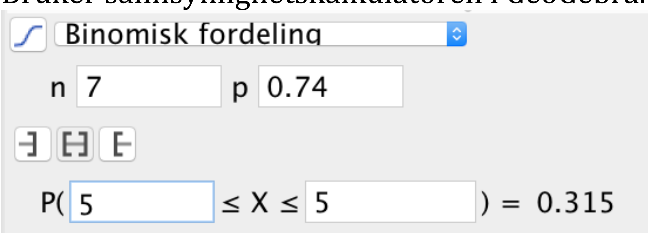
a) Et binomisk forsøk består av uavhengige delforsøk der sannsynligheten for et gitt utfall er likt i hvert delforsøk.
Vi må altså her går ut fra at sannsynligheten for å bestå førerprøven er 74 %, uavhengig av kjønn og årstid, og at sannsynligheten for bestått er like stor for alle de 12 elevene uavhengig av hverandre.

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



Sannsynligheten for at minst 8 av de 12 består er 82,1 %.

c) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra.



Sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene består er 31,5 %.

d) Multipliserer sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene består med sannsynligheten for at akkurat 4 av jentene består.

$$\binom{7}{5}\cdot 0,74^5\cdot 0,26^2\cdot\binom{5}{4}\cdot 0,74^4\cdot 0,26 = 0,123 = 12,3\%$$

<u>Sannsynligheten for at akkurat 5 av guttene og akkurat 4 av jentene består oppkjøringen er 12,3 %.</u>

e) Løser likningen $0,74^x = 0,02$ i CAS:

CAS

1: 0.74^x =0.02

Løs: $\left\{x = -\dfrac{\ln(50)}{\ln(37) - \ln(50)}\right\}$

2: {x = (-ln(50)) / (ln(37) - ln(50))}

$\approx \{x = 12.992\}$

<u>Minst 13 elever ved den andre skolen må ha hatt oppkjøring denne dagen.</u>

Oppgave 2

a)

$$3\vec{a} + 5\vec{b} = [-6,13]$$
$$3[3,1] + 5[k,2] = [-6,13]$$
$$[9,3] + [5k,10] = [-6,13]$$
$$[9+5k,13] = [-6,13]$$
$$så$$
$$9 + 5k = -6$$
$$5k = -15$$
$$\underline{\underline{k = -3}}$$

b)

CAS

1: a:=Vektor(3,1)

$\rightarrow$ a := $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

2: b:=Vektor(k,2)

$\rightarrow$ b := $\begin{pmatrix}k\\2\end{pmatrix}$

3: Vinkel(a, b)>60°

Løs: $\left\{\dfrac{10\sqrt{3} - 12}{13} > k\right\}$

$$\underline{\underline{\text{Vinkelen mellom } \vec{a} \text{ og } \vec{b} \text{ er større enn } 60° \text{ når } k < \frac{10\sqrt{3} - 12}{13}}}$$

Oppgave 3

a)

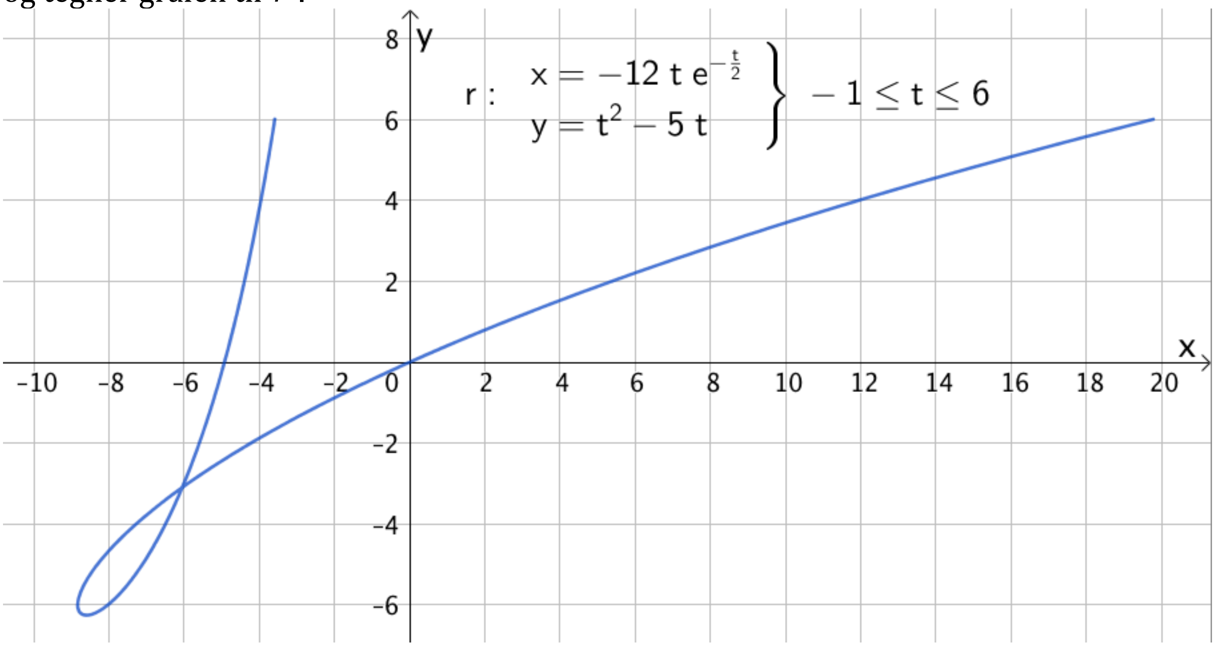
CAS

1	r(t):=Vektor(−12t* e ^(−t/2), t²+k*t)
	$\rightarrow \mathbf{r(t)} := \begin{pmatrix} -12\,t\,e^{-\frac{1}{2}t} \\ k\,t + t^2 \end{pmatrix}$
2	v(t):=r'(t)
	$\rightarrow \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} -12\,e^{-\frac{1}{2}t} + 6\,t\,e^{-\frac{1}{2}t} \\ k + 2\,t \end{pmatrix}$
3	abs(v(0))=13
	Løs: $\{k = -5, k = 5\}$

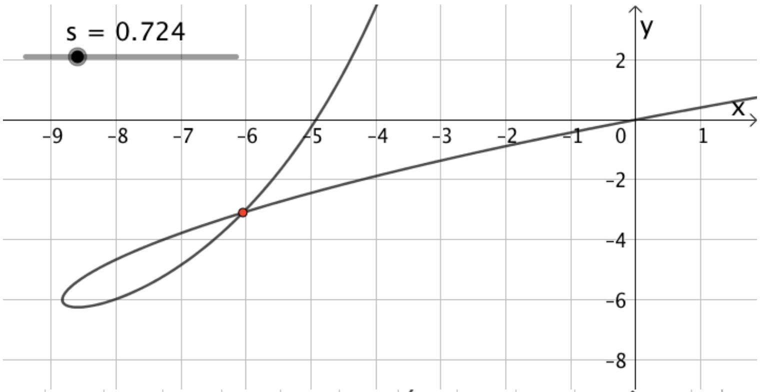
I rad 2 finner jeg fartsvektoren til partikkelen, før jeg i rad 3 setter banefarten lik 13 for $t = 0$.

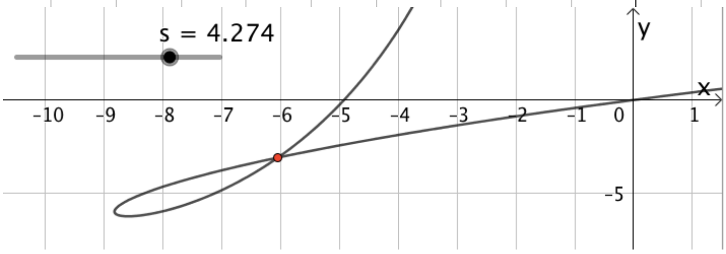
$$\underline{\underline{\text{Banefarten til partikkelen er 13 når } t = 0 \text{ dersom } k = -5 \vee k = 5}}$$

b) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)"
og tegner grafen til $\vec{r}$.



c) Lager et punkt $P = \left(-12s \cdot e^{-\frac{s}{2}}, s^2 - 5s\right)$ og oppretter en glider med animasjonstrinn 0,001.
Justerer glideren til punktet P er i punktet der kurven "skjærer" seg selv, først én gang, så én gang til.





Partikkelen er i samme posisjon ved tidspunktene $\underline{\underline{s = 0{,}724 \text{ og } s = 4{,}274}}$

Oppgave 4

CAS

1	f(x):=a*x³+b*x²+c*x+1 → $f(x) := a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1$
2	f(1)=0 → $a + b + c + 1 = 0$
3	f(2)=−3 → $8\,a + 4\,b + 2\,c + 1 = -3$
4	f''(2)=0 → $12\,a + 2\,b = 0$
5	{\$2, \$3, \$4} Løs: $\left\{\left\{a = \frac{1}{3}, b = -2, c = \frac{2}{3}\right\}\right\}$

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{3} \wedge b = -2 \wedge c = \frac{2}{3}}}$$

Oppgave 5

a) AB er grunnlinje i trekanten og den har lengde $s-1$.
Høyden i trekanten er absoluttverdien til $g(s)$.

CAS

1	g(x):=x³-3x²-13x+15 $\rightarrow\ g(x) := x^3 - 3x^2 - 13x + 15$
2	AB:=s-1 $\rightarrow\ AB := s - 1$
3	A(s):=AB*abs(g(s))/2 $\rightarrow\ A(s) := \frac{1}{2}\left\lvert s^3 - 3s^2 - 13s + 15\right\rvert (s-1)$

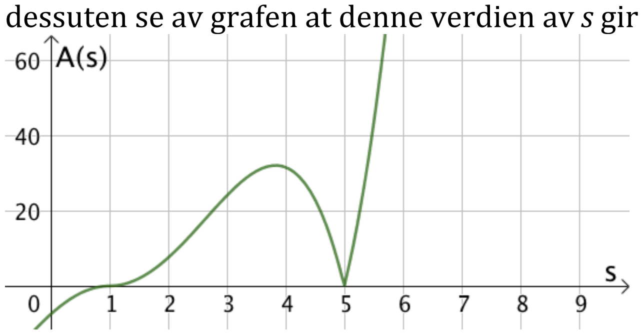
Arealet av trekanten er gitt ved

$$A(s) = \frac{1}{2}\left|s^3 - 3s^2 - 13s + 15\right| \cdot (s-1) \quad , \quad s \in \langle 1,5 \rangle$$

b) Bestemmer nullpunktet til den deriverte av arealet.

4	A'(s)=0 Løs: $\left\{s = -2\sqrt{2} + 1, s = 1, s = 2\sqrt{2} + 1\right\}$

Det er kun $s = 2\sqrt{2} + 1$ som er løsning innenfor definisjonsområdet, og vi kan dessuten se av grafen at denne verdien av *s* gir toppunkt på grafen til *A*.



Setter inn løsningen i uttrykket for arealet.

5	A(2*sqrt(2)+1) $\rightarrow\ 32$

$s = 2\sqrt{2} + 1$ gir det største arealet av trekanten. Da er arealet 32.