Løsningsforslag eksamen S2 – Høsten 2021

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=x^3+e^x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{3x^2+e^x}}$

b) $g(x)=\ln\left(x^3+1\right)\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x^3+1}\cdot 3x^2=\underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3+1}}}$

Oppgave 2

$P(x)=x^3-2x^2-31x-28$

a) $P(1)=1^3-2\cdot 1^2-31\cdot 1-28=1-2-31-28=-60$

$P(1)\neq 0$, så $P(x)$ er ikke delelig med $(x-1)$, <u>som skulle vises</u>.

b)

$$\left(x^3-2x^2-31x-28\right):\left(x+1\right)=\underline{\underline{x^2-3x-28}}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^3+x^2} \\
\quad -3x^2-31x-28 \\
\quad \underline{-3x^2-3x} \\
\qquad\qquad -28x-28 \\
\qquad\qquad \underline{-28x-28} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

c) Faktoriserer $P(x)$ ved hjelp av "sum og produkt".

$P(x)=\left(x+1\right)\left(x^2-3x-28\right)=\left(x+1\right)\left(x+4\right)\left(x-7\right)=\left(x+4\right)\left(x+1\right)\left(x-7\right)$

Har allerede vist at $P(1)<0$, så da vet jeg at $P(x)<0$ mellom nullpunktene $x=-1$ og $x=7$. Da må vi også ha $P(x)<0$ når $x<-4$.
(Vi kjenner forløpet til en tredjegradsfunksjon med 3 nullpunkter).

$\underline{\underline{P(x)\geq 0 \text{ når } x\in\left[-4,-1\right]\cup\left[7,\rightarrow\right\rangle}}$

d) Bruker faktoriseringen fra tidligere i oppgaven, men erstatter x med e^x.

$$e^{3x}-2e^{2x}-31e^x-28=0$$

$$\left(e^x+4\right)\left(e^x+1\right)\left(e^x-7\right)=0$$

$e^x>0$ for alle *x*, så vi må ha $e^x-7=0$, som gir $\underline{\underline{x=\ln 7}}$

Oppgave 3

a) Bestemmer a_1:

$$a_1=S_1=2\cdot 1^2+1=2+1=3$$

Bestemmer a_{10}:

$$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10$$

$$så$$

$$\frac{3+a_{10}}{2}\cdot 10=2\cdot 10^2+10$$

$$5\left(3+a_{10}\right)=210$$

$$15+5a_{10}=210$$

$$a_{10}=\frac{210-15}{5}$$

$$a_{10}=\frac{195}{5}$$

$$a_{10}=39$$

$$\underline{\underline{a_1=3 \text{ og } a_{10}=39}}$$

b) Bruker a_1 og a_{10} til å bestemme *d*:

$$3+\left(10-1\right)d=39$$

$$9d=39-3$$

$$d=\frac{36}{9}$$

$$d=4$$

$$a_n=a_1+\left(n-1\right)d=3+\left(n-1\right)4=3+4n-4=\underline{\underline{4n-1}}$$

c)

$$\begin{aligned} 4n-1&=399 \\ 4n&=399+1 \\ n&=\frac{400}{4} \\ n&=100 \end{aligned}$$

Rekka har altså 100 ledd.

$$S_{100}=\frac{3+399}{2}\cdot 100=\frac{402}{2}\cdot 100=201\cdot 100=20100$$

Summen av rekka er 20100

Oppgave 4

a)

$$K'(400)=0{,}4\cdot 400+500=160+500=660$$

$$I'(400)=-0{,}3\cdot 400+850=-120+850=730$$

Grenseinntekten er større enn grensekostnaden ved produksjon og salg av 400 enheter per dag.

En økning i den daglige produksjonsmengden *vil* kunne gi et større overskudd.

b)

$$\begin{aligned} K'(x)&=I'(x) \\ 0{,}4x+500&=-0{,}3x+850 \\ 0{,}4x+0{,}3x&=850-500 \\ 0{,}7x&=350 \\ x&=\frac{350}{0{,}7} \\ x&=500 \end{aligned}$$

For størst mulig overskudd, må bedriften produsere og selge 500 enheter pr. dag.

c) Når grensekostnaden, altså den deriverte av kostnadsfunksjonen, beskrives ved hjelp av en lineær funksjon, vet vi at kostnadsfunksjonen må være en andregradsfunksjon.

Kostnadsfunksjonen er altså en funksjon på formen $K(x)=ax^2+bx+c$.
Konstantleddet *c* representerer her de faste kostnadene, som ikke avhenger av produksjonsmengde, vi vet altså at vi skal ha $c=50000$.
Den deriverte av kostnadsfunksjonen blir $K'(x)=2ax+b$. Vi har allerede fått oppgitt grensekostnaden, og vi ser dermed at vi må ha $2a=0{,}4 \Leftrightarrow a=0{,}2$ og $b=500$.

Da har vi $K(x)=0,2x^2+500x+50000$, slik at:

$$\begin{aligned}K(400)&=0,2\cdot 400^2+500\cdot 400+50000\\&=0,2\cdot 160000+200000+50000\\&=32000+250000\\&=282000\end{aligned}$$

<u>De daglige kostnadene ved produksjon av 400 enheter er 282 000 kroner.</u>

Kommentar:
Vi kunne her funnet kostnadsfunksjonen mer "direkte" ved å integrere uttrykket for grensekostnaden. Siden integrasjon uten hjelpemidler ikke nevnes eksplisitt i kompetansemålene i læreplanen for S2, valgte jeg her en litt annerledes tilnærming.

Oppgave 5

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}$$

a)

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$, <u>som skulle vises.</u>

b)

$$\begin{aligned}f'(x)&=0\\&\textit{gir}\\1-\ln x&=0\\\ln x&=1\\x&=e\end{aligned}$$

Vi kan se at vi må ha $x>0$, siden uttrykket for den deriverte inneholder $\ln x$.
Da vil nevneren være positiv for alle gyldige verdier av *x*.
Når $0<x<e$, har vi $\ln x<0$, slik at $1-\ln x>0$.
Når $x>e$, har vi $\ln x>1$, slik at $1-\ln x<0$.
Da vet vi at $\left(e,f(e)\right)$ er et toppunkt på grafen til *f*.

$$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har toppunkt i } \left(e,\frac{1}{e}\right)}}$$

c)

$$g(x) = 3 - 6e \cdot f(x)$$

$$så$$

$$g'(x) = -6e \cdot f'(x) = -6e \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$g'(x) = 0$ når $f'(x) = 0$, men siden $f'(x)$ her er multiplisert med den negative faktoren $-6e$, vil fortegnet til $g'(x)$ være motsatt enn hva tilfellet er for $f'(x)$. Grafen til g vil altså ha et *bunnpunkt* i $(e, g(e))$.

$$g(e) = 3 - 6e \cdot f(e) = 3 - 6e \cdot \frac{1}{e} = 3 - 6 = -3$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } g \text{ har bunnpunkt i } (e, -3)}}$$

Oppgave 6

a) Ser ganske greit at vi skal bestemme sannsynligheten for at vekten av en tilfeldig valgt potet ligger innenfor 0,5 standardavvik i hver retning fra gjennomsnittet, så kan gå rett i standardnormalfordelingstabellen og finne de aktuelle sannsynlighetene.
Om vi ikke ser dette umiddelbart, gjør vi slik:

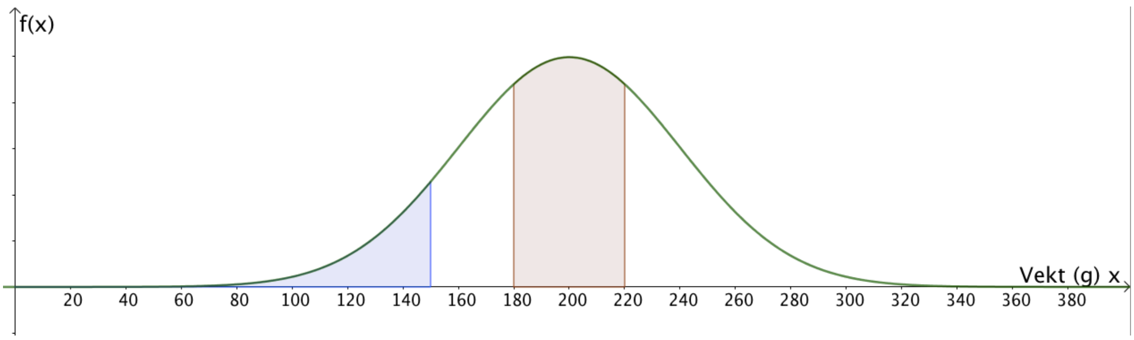
$$\begin{aligned} P(180 < X < 220) &= P\left(Z \le \frac{220-200}{40}\right) - P\left(Z \le \frac{180-200}{40}\right) \\ &= P(Z \le 0{,}5) - P(Z \le -0{,}5) \\ &= 0{,}6915 - 0{,}3085 \\ &= 0{,}3830 \\ &= 38{,}3\% \end{aligned}$$

<u>Sannsynligheten for at poteten veier mellom 180 gram og 200 gram er 38,3 %</u>

b) $\int_0^{150} f(x) = P(X \le 150) = P\left(Z \le \frac{150-200}{40}\right) = P\left(Z \le -\frac{50}{40}\right) = P(Z \le -1{,}25) = \underline{\underline{0{,}1056}}$

Svaret forteller at det er 10,56 % sannsynlig at vekten til en tilfeldig valgt potet er mindre enn 150 gram.

c)



d) 300 gram er 2,5 standardavvik over forventningen.
Sannsynligheten for at en tilfeldig potet veier minst 300 gram er derfor gitt ved
$1-P\left(Z\leq 2{,}5\right)=1-0{,}9938=0{,}0062$.

Når Jostein plukker 500 poteter, er det altså sannsynlig at 0,62 % av disse ville veie mer enn 300 gram.
$0{,}0062\cdot 500=0{,}62\cdot 5=3{,}1$

<u>Jostein kan regne med at omtrent 3 av potetene vil veie minst 300 gram.</u>

Del 2

Oppgave 1

Lar x være timelønnen Solveig har for arbeid på dagtid, lar y representere timelønn for arbeid på kveldstid og z representere timelønn for arbeid i helgen.
Setter opp tre likninger av tre ukjente og løser i CAS:

CAS	
1	45x+21y+14z=17830 → $45x+21y+14z=17830$
2	28x+35y+24z=21470 → $28x+35y+24z=21470$
3	33x+18y+12z=14280 → $33x+18y+12z=14280$
4	{$1, $2, $3} Løs: $\{\{x=180, y=250, z=320\}\}$

<u>Når Solveig jobber på dagtid, får hun betalt 180 kroner per time</u>.

Oppgave 2

a) Skal bestemme summen av ei geometrisk rekke med 10 ledd, der
$a_1=6000\cdot 1{,}06$ og $k=1{,}06$.

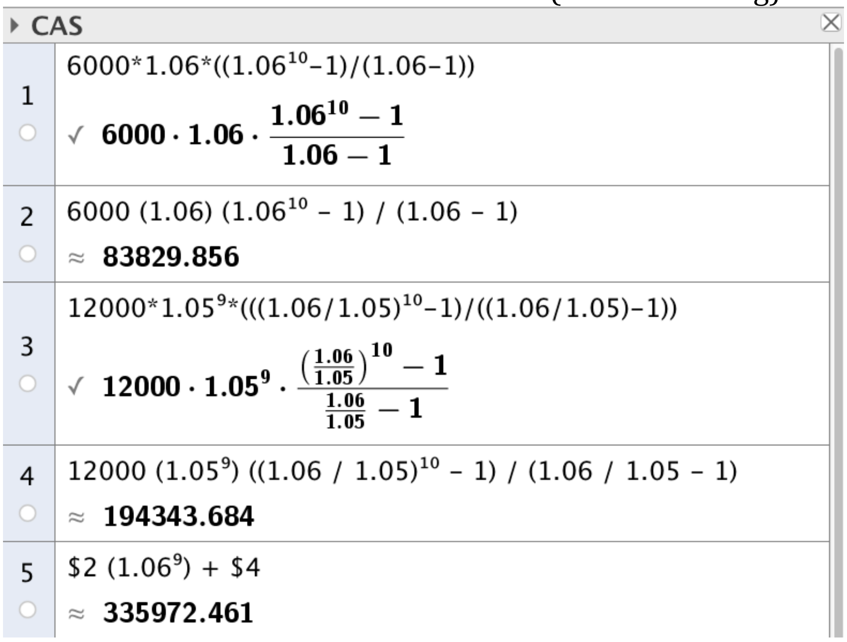
CAS	
1	6000*1.06*((1.06^10−1)/(1.06−1)) ✓ $6000\cdot 1.06\cdot \frac{1.06^{10}-1}{1.06-1}$
2	6000 (1.06) (1.06^10 − 1) / (1.06 − 1) ≈ 83829.856

<u>Dagen før Camillas 11-årsdag, er hennes andel i aksjefondet verdt ca. 83 830 kr.</u>

b) Sluttverdien til de 10 innskuddene fra og med 11-årsdagen til Camilla og frem til og med 20-årsdagen hennes, danner ei geometrisk rekke der $a_1 = 12000 \cdot 1.05^9$ og $k = \dfrac{1{,}06}{1{,}05}$.

Vi lar a_1 representere siste innskudd, og "jobber oss bakover". Derfor må vi dele på 1.05 for å få størrelsen på innskuddet året før og multiplisere med 1,06 siden vi må regne med avkastningen fra innskuddet året før.

Summen Camilla hadde på kontoen dagen før 11-årsdagen, har nå fått 6% avkastning årlig i 9 år. Vi legger sammen dette beløpet med summen av rekka som dannes av de siste 10 innskuddene (inkl.avkastning).



<u>Rett etter siste beløp er satt inn, på Camillas 20-årsdag, er verdien av hennes andel i aksjefondet omtrent 336 000 kroner.</u>

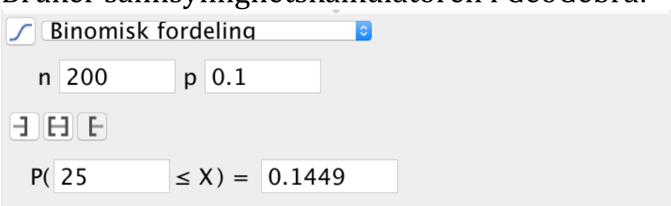
Oppgave 3

a) $P\left(\text{Fem kunder etter hverandre blir ikke trukket ut}\right) = \left(1-0{,}1\right)^5 = 0{,}9^5 = \underline{\underline{0{,}59 = 59\%}}$

b) $E\left(X\right) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{20}}$

$Var\left(X\right) = n \cdot p\left(1-p\right) = 200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{18}}$

c) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra:



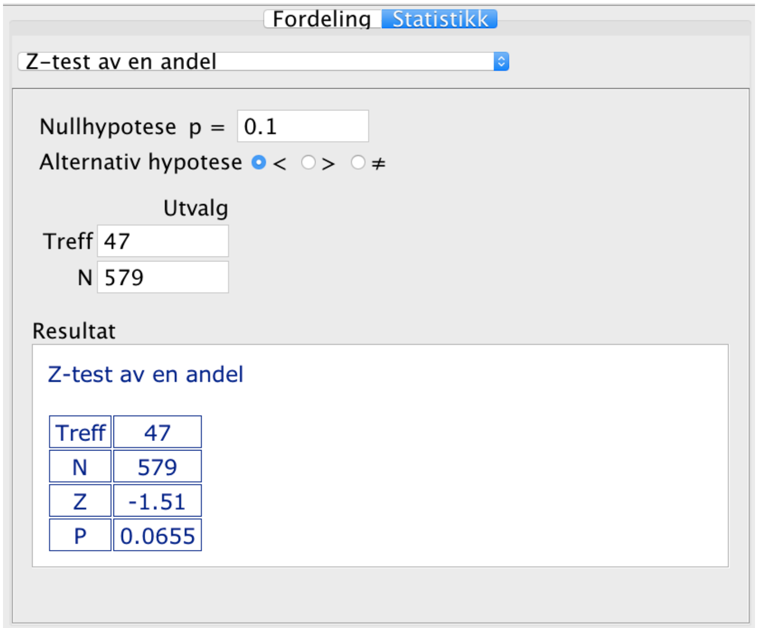
$P\left(X \geq 25\right) = \underline{\underline{0{,}1449 \approx 14{,}5\%}}$

d) Setter opp følgende nullhypotese og alternativ hypotese:

$$H_0 : p = 0{,}1$$

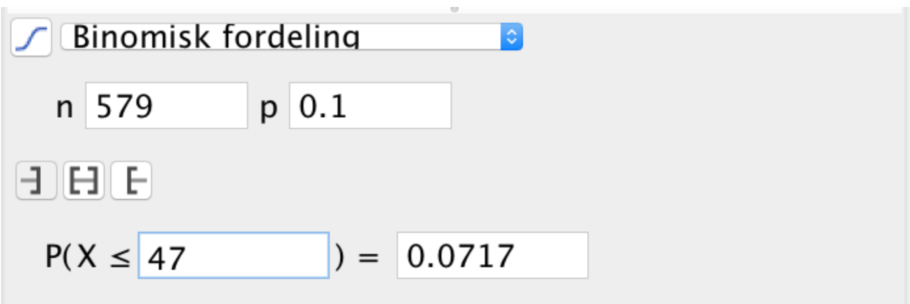
$$H_A : p < 0{,}1$$

e) Siden antallet kunder som brukte selvbetjeningskassen (antall "forsøk") er så høyt som 579, lar jeg antallet som trekkes ut til kontroll være tilnærmet normalfordelt.
Velger "Z-test av en andel" i sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra og gjennomfører hypotestetesten:



p-verdien er 0,0655, som er høyere enn signifikansnivået på 5 %.
Vi beholder derfor nullhypotesen og konkluderer med at ledelsens mistanke ikke er berettiget.

Om vi ikke bruker sentralgrensesetningen her, men ser på situasjonen som et "rent binomisk forsøk", vil vi få følgende resultat:



Her er p-verdien 0,0717, som også overstiger signifikansnivået, slik at vi må trekke samme konklusjon som vi gjorde ved Z-testen over.

Oppgave 4

a) Bruker opplysningene i oppgaveteksten, sammen med det gitte funksjonsuttrykket, til å sette opp tre likninger av tre ukjente som løses i CAS:

CAS

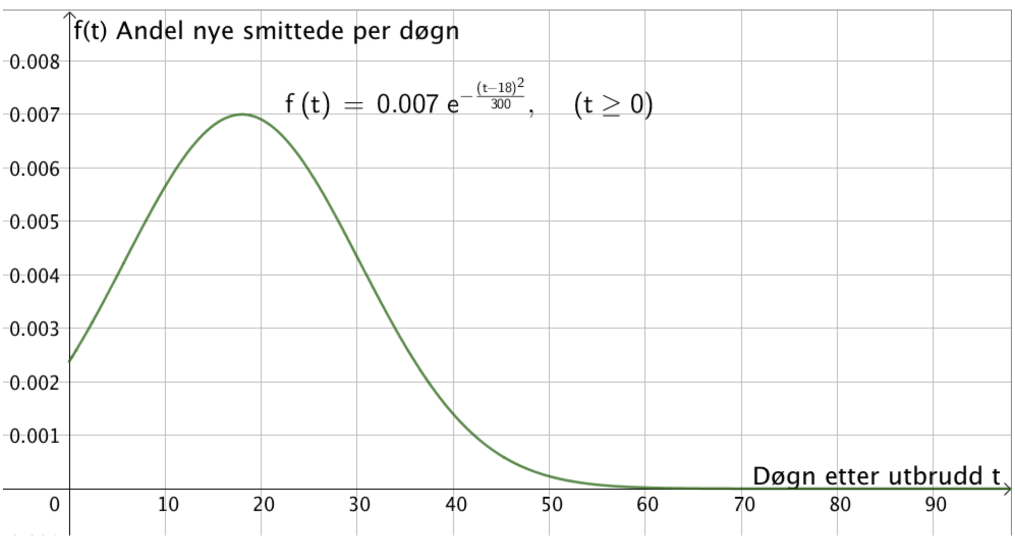
1	g(t):=N/(1+a* e ^(-k*t)) $\rightarrow\ \mathbf{g(t)\ :=\ \frac{N}{a\,e^{-kt}+1}}$
2	g(0)=0.015 $\rightarrow\ \mathbf{\frac{N}{a+1}=\frac{3}{200}}$
3	g(20)=0.22 $\rightarrow\ \mathbf{\frac{N}{a\,e^{-20k}+1}=\frac{11}{50}}$
4	g(30)=0.44 $\rightarrow\ \mathbf{\frac{N}{a\,e^{-30k}+1}=\frac{11}{25}}$
5	{$2, $3, $4} Løs: $\mathbf{\left\{\left\{N=\frac{11\sqrt{993}+1573}{3200},a=\frac{11\sqrt{993}+1525}{48},k=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{\sqrt{993}-3}{6}\right)\right\}\right\}}$
6	{{N = (11sqrt(993) + 1573) / 3200, a = (11sqrt(993) + 1525) / 48, k = 1 / 10 ln((sqrt(993) - 3) / 6)}} $\approx\ \mathbf{\{\{N=0.6,a=38.992,k=0.156\}\}}$

$$\underline{\underline{N=0{,}6\wedge a=39\wedge k=0{,}156}}$$

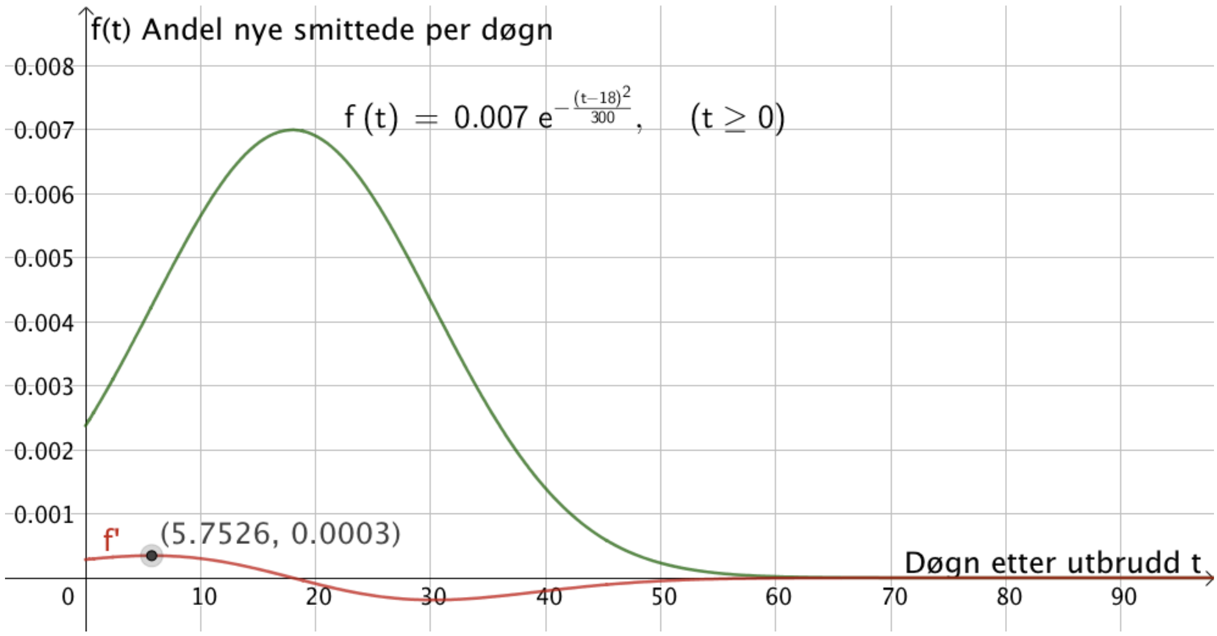
b) *N* representerer *bæreevnen*, altså den verdien den logistiske funksjonen vil nærme seg etter hvert som den flater ut.

<u>I følge modellen ville 60 % av befolkningen bli smittet.</u>

c)

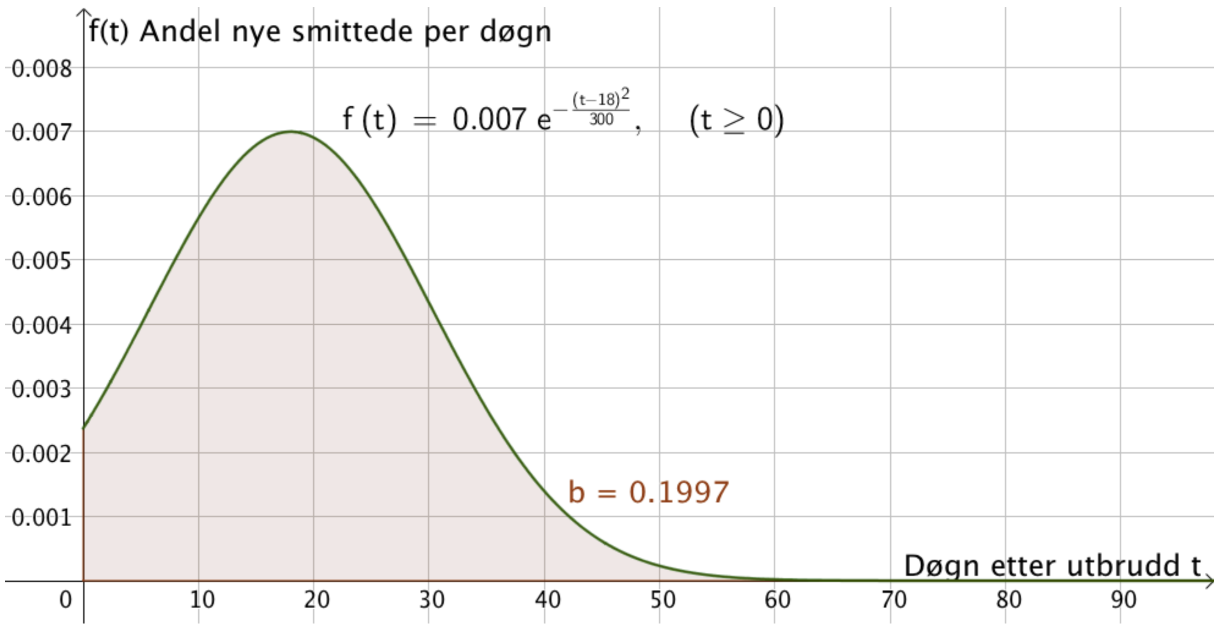


d) Tegner grafen til den deriverte av *f* og finner toppunktet på grafen til den deriverte ved hjelp av kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* .



<u>I følge modellen, vil smitten øke mest det sjette døgnet etter utbruddet oppdages</u>.

e) Bruker kommandoen *" Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og bestemmer arealet under grafen til *f*.
(Velger 0 og 100 som integrasjonsgrenser, etter å ha sett utflatingen av grafen)



<u>Omtrent 20 % av befolkningen blir smittet av viruset</u>