Utdanningsdirektoratet

Eksamen

27.11.2014

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (2 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5$

b) $g(x) = x^2 \cdot e^x$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \quad , \quad D_P = \mathbb{R}$$

a) Faktoriser $P(x)$ i førstegradsfaktorar.

b) Løys ulikskapen $P(x) \leq 0$.

Oppgåve 3 (4 poeng)

Samanhengen mellom lydstyrken L db (desibel) og lydintensiteten I W/m^2 er gitt ved

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$$

$I_0 = 10^{-12}$ er ein konstant.

a) Vis at formelen kan skrivast som

$$L = 10 \cdot \lg I + 120$$

b) På ein arbeidsplass blir lydintensiteten målt til 10^{-4} W/m^2.
Kor mange desibel er lydstyrken på arbeidsplassen?

c) På ein klassefest blir lydstyrken målt til 100 dB.
Kva lydintensitet svarer det til?

Oppgåve 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-1} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

a) Lag ei skisse av grafen til f.

b) Bestem $f'(x)$.

c) Bestem likninga til tangenten i punktet $(2,0)$ på grafen.

Oppgåve 5 (2 poeng)

a) Forklar at $\vec{v} = [1, a]$ er ein retningsvektor til linja $y = ax + b$

To linjer er gitt ved likningane $y = a_1 \cdot x + b_1$ og $y = a_2 \cdot x + b_2$

b) Bruk skalarprodukt til å vise at dersom linjene står vinkelrett på kvarandre, er $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Oppgåve 6 (2 poeng)

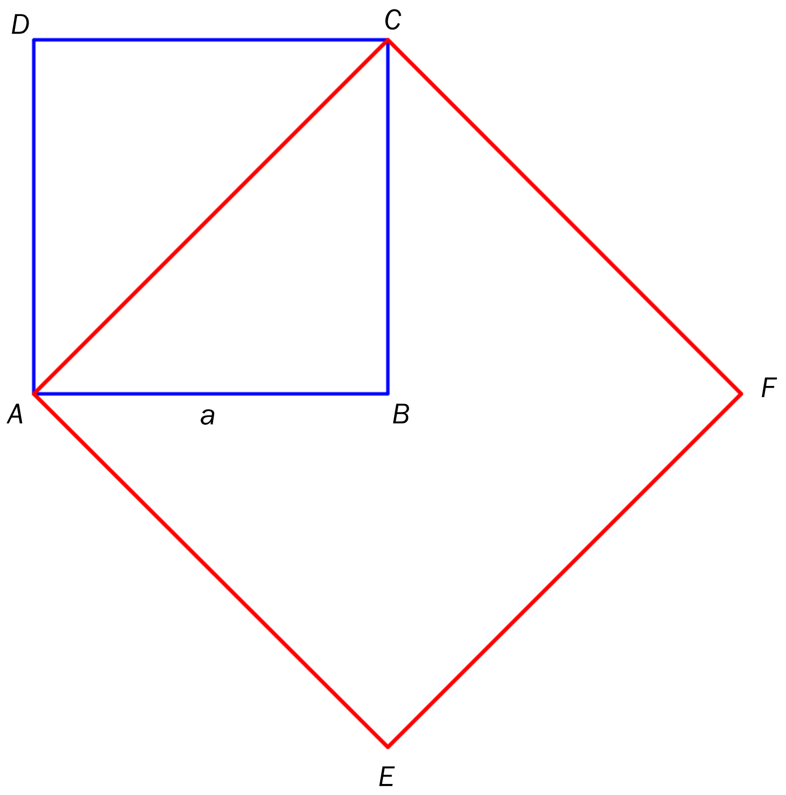
Løys likninga

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2 - x} = \frac{3}{8}$$

Oppgåve 7 (4 poeng)

På figuren nedanfor har vi teikna kvadrata *ABCD* og *AEFC*.

Vi set sida i kvadratet *ABCD* lik a.



a) Vis at kvadratet *AEFC* har dobbelt så stort areal som kvadratet *ABCD*.

b) Konstruer eit kvadrat med areal eksakt lik $50\ \text{cm}^2$.

Oppgåve 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 3x^2 - 1$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

Ved ein bestemt kjemisk reaksjon vil konsentrasjonen av eit stoff vere gitt ved

$$f(t) = 2{,}50 - 2{,}50 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}012 \cdot t}$$

der $f(t)$ er talet på millimol per liter av stoffet, t sekund etter at reaksjonen starta.

a) Kva er konsentrasjonen etter 15 s?
Kor lang tid tek det før konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

b) Teikn grafen til f.
Kva vil konsentrasjonen nærme seg dersom den kjemiske reaksjonen går svært lenge?

Reaksjonsfarten på eit tidspunkt t er $f'(t)$.

c) Kva er reaksjonsfarten når konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

Oppgåve 2 (5 poeng)

a) Skriv opp alle primtala frå og med 2 til og med 25.

25 like kuler som er merkte med tala frå og med 1 til og med 25, ligg i ein bolle. Vi trekkjer tilfeldig 5 kuler frå bollen utan tilbakelegging og les av tala.

b) Bestem sannsynet for at vi trekkjer ut akkurat 2 primtal.

c) Bestem sannsynet for at vi trekkjer ut minst 3 primtal.

Oppgåve 3 (4 poeng)

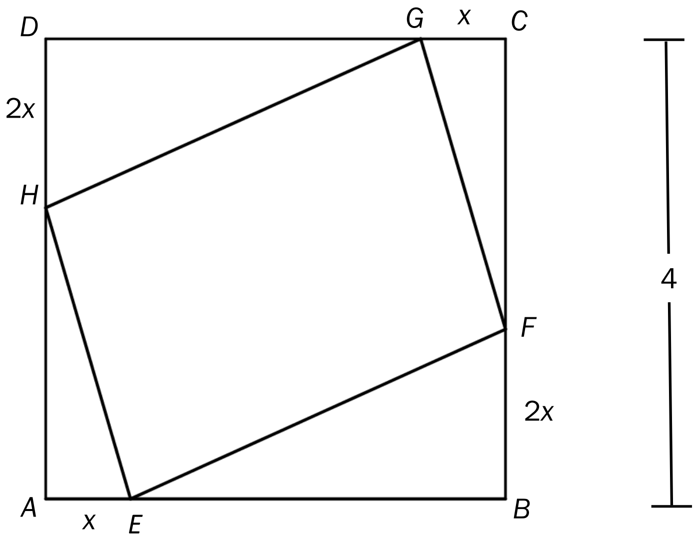
Vi har punkta $A(2, 1)$, $B(4, 5)$ og $C(t+3, t)$.

a) Bruk vektorrekning til å bestemme t slik at punkta *A, B* og *C* ligg på ei rett linje.

b) Bruk vektorrekning til å bestemme t slik at $\angle ACB = 90°$.

Oppgåve 4 (8 poeng)

I eit kvadrat *ABCD* med side 4 er det skrive inn eit parallellogram *EFGH*. Vi set $AE = CG = x$ og $BF = DH = 2x$. Sjå skissa nedanfor.



a) Vis at arealet T av parallellogrammet *EFGH* er

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16 \qquad , \qquad x \in [0, 2]$$

b) Bestem x slik at arealet av parallellogrammet *EFGH* blir halvparten av arealet av kvadratet *ABCD*.

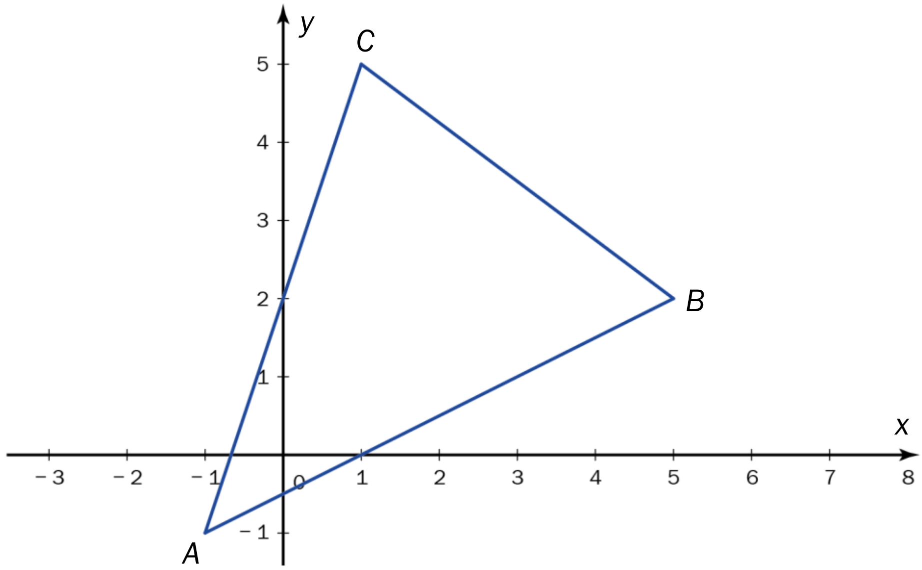
c) Bestem x slik at arealet av parallellogrammet *EFGH* blir minst mogleg. Bestem det minste arealet.

Vi legg figuren inn i eit koordinatsystem slik at A ligg i origo og B på positiv x-akse.

d) Bestem vektorane $\overrightarrow{HE}$ og $\overrightarrow{HG}$ uttrykt ved x og bruk dette til å bestemme x slik at parallellogrammet *EFGH* blir eit rektangel.

Oppgåve 5 (6 poeng)

$\triangle ABC$ har hjørna $A(-1,\ -1)$, $B(5, 2)$ og $C(1, 5)$. Sjå figuren nedanfor.



Likninga for linja gjennom A og B er $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, og likninga for linja gjennom A og C er $y=3x+2$.

a) Bestem likninga for linja gjennom B og C.

I oppgåve 5 i Del 1 har du vist at dersom to linjer står vinkelrett på kvarandre, er produktet av stigingstala lik -1.

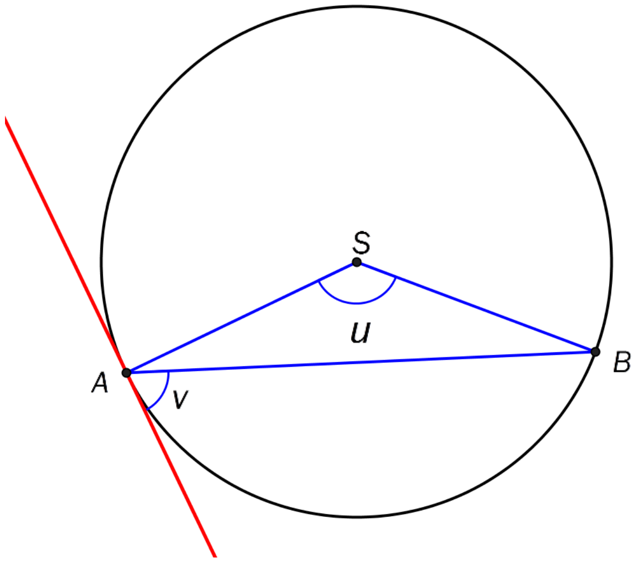
b) Bruk denne eigenskapen til å vise at linja som går gjennom C og som står vinkelrett på sidekanten AB har likninga $y=-2x+7$.

På same måte kan det visast at linja som går gjennom A og som står vinkelrett på sidekanten BC har likninga $y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$, og linja som går gjennom B og som står vinkelrett på AC har likninga $y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

c) Vis ved rekning at dei tre høgdene i $\triangle ABC$ skjer kvarandre i eitt og same punkt.
Bestem koordinatane til dette skjeringspunktet.

Oppgåve 6 (3 poeng)

I ein sirkel med sentrum S er det skrive inn ein $\triangle ABS$ der $\angle ASB = u$. Sirkelen har ein tangent i punktet A. Vinkelen mellom tangenten og sida AB er v.



a) Vis at $\angle BAS = 90° - \dfrac{u}{2}$.

b) Vis at $v = \dfrac{u}{2}$.

Oppgåve 7 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

der u og v er funksjonar av x. Vi går i denne oppgåva ut frå at $u > 0$ og $v > 0$.

Logaritmeregelen for ein brøk gir $\ln(f(x)) = \ln u - \ln v$

a) Bruk logaritmeregelen og kjerneregelen til å bestemme $(\ln f(x))'$ uttrykt ved u, v, u' og v'.

b) Bruk uttrykket frå oppgåve a) til å utleie derivasjonsregelen for ein brøk.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (2 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 5x^3 - 2x^2 + 5$

b) $g(x) = x^2 \cdot e^x$

Oppgave 2 (4 poeng)

Polynomfunksjonen P er gitt ved

$$P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8 \quad , \quad D_P = \mathbb{R}$$

a) Faktoriser $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

b) Løs ulikheten $P(x) \leq 0$.

Oppgave 3 (4 poeng)

Sammenhengen mellom lydstyrken L db (desibel) og lydintensiteten I W/m^2 er gitt ved

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$$

$I_0 = 10^{-12}$ er en konstant.

a) Vis at formelen kan skrives som

$$L = 10 \cdot \lg I + 120$$

b) På en arbeidsplass blir lydintensiteten målt til 10^{-4} W/m^2.
Hvor mange desibel er lydstyrken på arbeidsplassen?

c) På en klassefest blir lydstyrken målt til 100 dB.
Hvilken lydintensitet svarer det til?

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{2x-4}{x-1} \quad , \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

a) Lag en skisse av grafen til f.

b) Bestem $f'(x)$.

c) Bestem likningen til tangenten i punktet $(2,0)$ på grafen.

Oppgave 5 (2 poeng)

a) Forklar at $\vec{v} = [1, a]$ er en retningsvektor til linjen $y = ax + b$

To linjer er gitt ved likningene $y = a_1 \cdot x + b_1$ og $y = a_2 \cdot x + b_2$

b) Bruk skalarprodukt til å vise at dersom linjene står vinkelrett på hverandre, er $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Oppgave 6 (2 poeng)

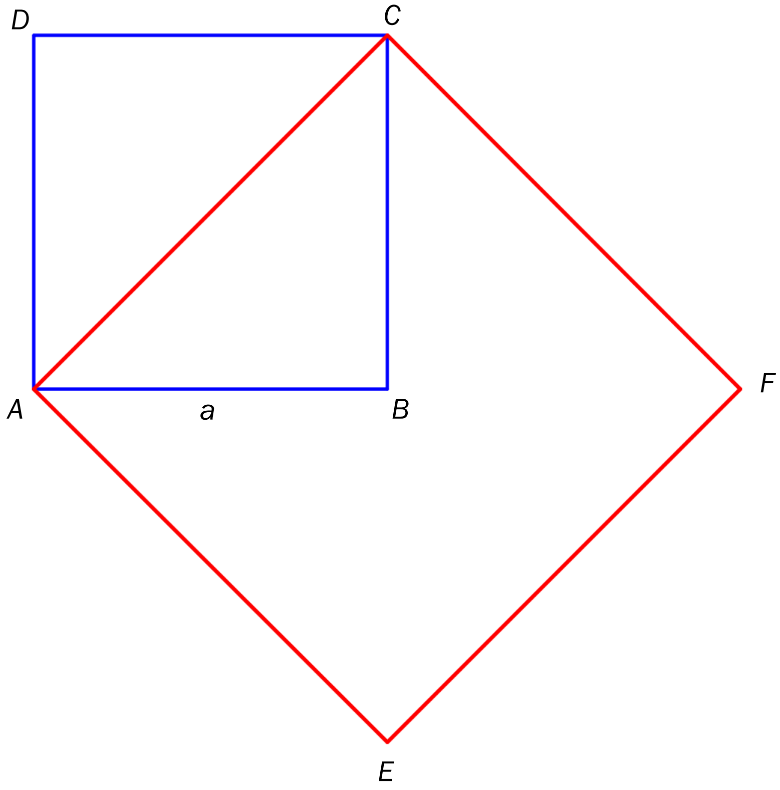
Løs likningen

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-x} = \frac{3}{8}$$

Oppgave 7 (4 poeng)

På figuren nedenfor har vi tegnet kvadratene $ABCD$ og $AEFC$.

Vi setter siden i kvadratet $ABCD$ lik a.



a) Vis at kvadratet $AEFC$ har dobbelt så stort areal som kvadratet $ABCD$.

b) Konstruer et kvadrat med areal eksakt lik $50\ \text{cm}^2$.

Oppgave 8 (2 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - x \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at $f'(x) = 3x^2 - 1$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

Ved en bestemt kjemisk reaksjon vil konsentrasjonen av et stoff være gitt ved

$$f(t) = 2{,}50 - 2{,}50 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t}$$

der $f(t)$ er antall millimol per liter av stoffet, t sekunder etter at reaksjonen startet.

a) Hva er konsentrasjonen etter 15 s?
Hvor lang tid tar det før konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

b) Tegn grafen til f.
Hva vil konsentrasjonen nærme seg dersom den kjemiske reaksjonen går veldig lenge?

Reaksjonshastigheten på et tidspunkt t er $f'(t)$.

c) Hva er reaksjonshastigheten når konsentrasjonen er 2,00 millimol/L?

Oppgave 2 (5 poeng)

a) Skriv opp alle primtallene fra og med 2 til og med 25.

25 like kuler som er merket med tallene fra og med 1 til og med 25, ligger i en bolle. Vi trekker tilfeldig 5 kuler fra bollen uten tilbakelegging og leser av tallene.

b) Bestem sannsynligheten for at vi trekker ut akkurat 2 primtall.

c) Bestem sannsynligheten for at vi trekker ut minst 3 primtall.

Oppgave 3 (4 poeng)

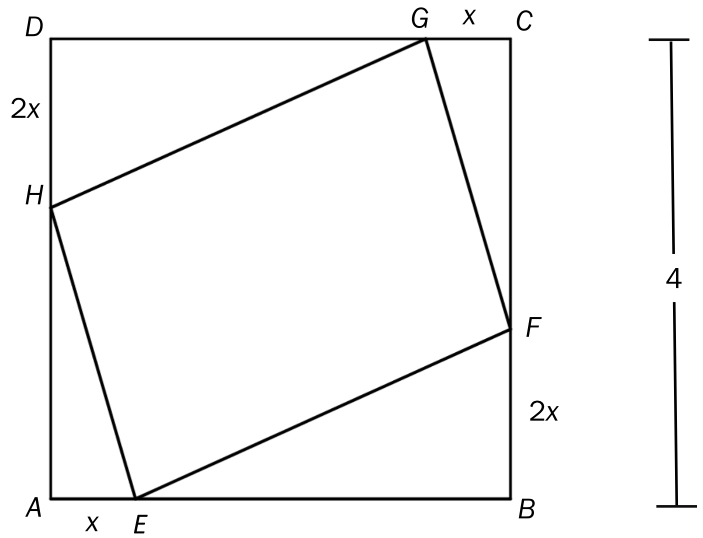
Vi har punktene $A(2,1)$, $B(4,5)$ og $C(t+3,t)$.

a) Bruk vektorregning til å bestemme t slik at punktene A, B og C ligger på en rett linje.

b) Bruk vektorregning til å bestemme t slik at $\angle ACB = 90°$.

Oppgave 4 (8 poeng)

I et kvadrat $ABCD$ med side 4 er det innskrevet et parallellogram $EFGH$. Vi setter $AE = CG = x$ og $BF = DH = 2x$. Se skissen nedenfor.



a) Vis at arealet T av parallellogrammet $EFGH$ er

$$T(x) = 4x^2 - 12x + 16 \qquad , \qquad x \in [0\,,2]$$

b) Bestem x slik at arealet av parallellogrammet $EFGH$ blir halvparten av arealet av kvadratet $ABCD$.

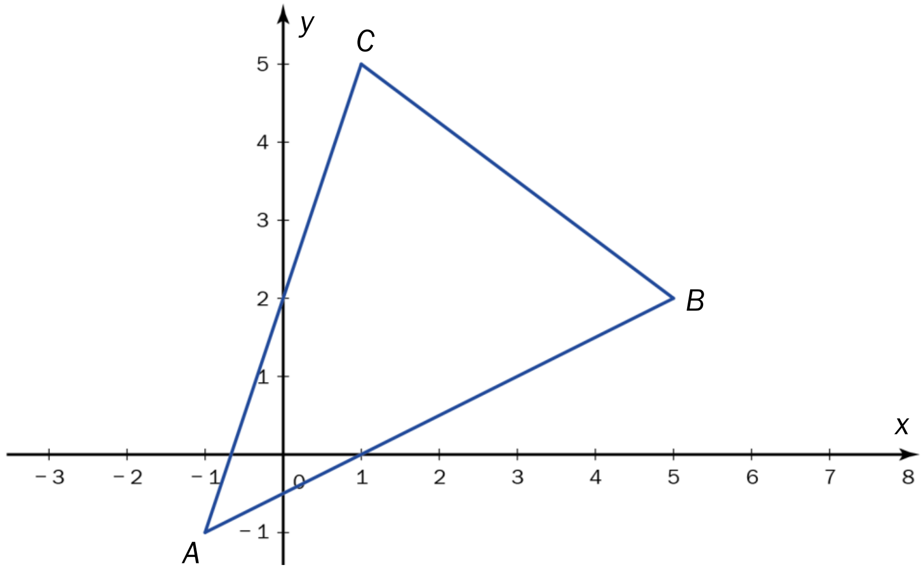
c) Bestem x slik at arealet av parallellogrammet $EFGH$ blir minst mulig.
Bestem det minste arealet.

Vi legger figuren inn i et koordinatsystem slik at A ligger i origo og B på positiv x-akse.

d) Bestem vektorene $\overrightarrow{HE}$ og $\overrightarrow{HG}$ uttrykt ved x og bruk dette til å bestemme x slik at parallellogrammet $EFGH$ blir et rektangel.

Oppgave 5 (6 poeng)

$\triangle ABC$ har hjørnene $A(-1, -1)$, $B(5, 2)$ og $C(1, 5)$. Se figuren nedenfor.



Likningen for linjen gjennom A og B er $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, og likningen for linjen gjennom A og C er $y = 3x + 2$.

a) Bestem likningen for linjen gjennom B og C.

I oppgave 5 i Del 1 har du vist at dersom to linjer står vinkelrett på hverandre, er produktet av stigningstallene lik -1.

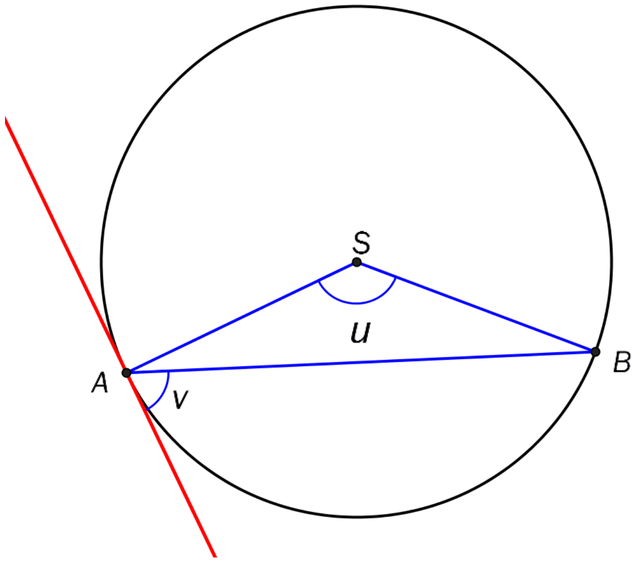
b) Bruk denne egenskapen til å vise at linjen som går gjennom C og som står vinkelrett på sidekanten AB har likningen $y = -2x + 7$.

På samme måte kan det vises at linjen som går gjennom A og som står vinkelrett på sidekanten BC har likningen $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$, og linjen som går gjennom B og som står vinkelrett på AC har likningen $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$

c) Vis ved regning at de tre høydene i $\triangle ABC$ skjærer hverandre i ett og samme punkt.
Bestem koordinatene til dette skjæringspunktet.

Oppgave 6 (3 poeng)

I en sirkel med sentrum S er det innskrevet en $\triangle ABS$ der $\angle ASB = u$. Sirkelen har en tangent i punktet A. Vinkelen mellom tangenten og siden AB er v.



a) Vis at $\angle BAS = 90° - \dfrac{u}{2}$.

b) Vis at $v = \dfrac{u}{2}$.

Oppgave 7 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

der u og v er funksjoner av x. Vi antar i denne oppgaven at $u > 0$ og $v > 0$.

Logaritmeregelen for en brøk gir $\ln(f(x)) = \ln u - \ln v$

a) Bruk logaritmeregelen og kjerneregelen til å bestemme $(\ln f(x))'$ uttrykt ved u, v, u' og v'.

b) Bruk uttrykket fra oppgave a) til å utlede derivasjonsregelen for en brøk.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet