Løsningsforslag eksamen R2 – Høsten 2021

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=\frac{1}{6}\cdot\cos\left(2x\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{6}\left(-\sin(2x)\right)\cdot 2=\underline{\underline{-\frac{1}{3}\sin(2x)}}$

b)

$$g(x)=\sin^2\left(x^2+2\right)=\left(\sin\left(x^2+2\right)\right)^2$$

så

$$g'(x)=2\left(\sin\left(x^2+2\right)\right)\cdot\cos\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x\sin\left(x^2+2\right)\cos\left(x^2+2\right)}}$$

Oppgave 2

a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\; dx=\left[-\cos x\right]_{-\pi}^{\pi}=-\cos\left(\pi\right)-\left(-\cos\left(-\pi\right)\right)=-\left(-1\right)+\left(-1\right)=1-1=\underline{\underline{0}}$

b)

$$\int\frac{x}{x^2-9}dx$$

$$u=x^2-9 \text{ gir } \frac{du}{dx}=2x, \text{ så } dx=\frac{du}{2x}$$

$$\int\frac{x}{x^2-9}dx=\int\frac{x}{u}\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{2u}du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln\left|u\right|+C=\underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-9\right|+C}}$$

c) $\int\limits_{0}^{\ln 2}x\cdot e^{2x}\,dx$

Bestemmer først det ubestemte integralet ved hjelp av delvis integrasjon.
Velger $u'=e^{2x}$ og $v=x$.

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 1dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{4}\left(2x-1\right)e^{2x}+C$$

Fortsetter på neste side

Regner ut det bestemte integralet:

$$\int_0^{\ln 2} x \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}\Big[(2x-1)e^{2x}\Big]_0^{\ln 2}$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\big(2\ln 2 - 1\big)e^{2\ln 2} - \big(2\cdot 0 - 1\big)e^{2\cdot 0}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\big(2\ln 2 - 1\big)\cdot 4 + 1\Big)$$

$$= 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{8\ln 2 - 4}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{8\ln 2 - 3}{4}}}$$

Oppgave 3

$2y \cdot y' = \cos x$ er en separabel differensiallikning.

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$2y\ dy = \cos x\ dx$$

$$\int 2y\ dy = \int \cos x\ dx$$

$$y^2 + c_1 = \sin(x) + c_2$$

$$y^2 = \sin(x) + c_2 - c_1 \qquad (c_2 - c_1 = C)$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{\sin(x) + C}}}$$

Initialbetingelsen forteller oss at vi må bruke den positive generelle løsningen.
Da har vi:

$$\sqrt{\sin(0) + C} = 2$$

$$\sqrt{C} = 2$$

$$C = 4$$

$$så$$

$$\underline{\underline{y = \sqrt{\sin(x) + 4}}}$$

Oppgave 4

a) $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx = \left[f(x)\right]_{-1}^{1} = f(1) - f(-1) = 3 - 0 = \underline{\underline{3}}$

b) Siden grafen til *f* er synkende $1 < x \leq 4$, vet vi at den deriverte er negativ for alle verdier av *x* i dette intervallet.
(Mens den er større eller lik null i resten av definisjonsmengden).

Da vil $\int_a^b g(x)\,dx$ bli minst mulig når $\underline{\underline{a = 1 \wedge b = 4}}$

Oppgave 5

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1 \quad , \quad D_f = \langle 0, 10 \rangle$$

a)

$$f(x) = 0$$
$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) + 1 = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) = -\frac{1}{2}$$

så

$$\frac{\pi}{2}x - \pi = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}x - \pi = \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad , \quad k \in Z$$
$$\frac{\pi}{2}x = \frac{7\pi}{6} + \pi + k\cdot 2\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{2}x = \frac{11\pi}{6} + \pi + k\cdot 2\pi$$

Multipliserer med $\frac{2}{\pi}$ i alle ledd

$$x = \frac{7}{3} + 2 + 4k \quad \vee \quad x = \frac{11}{3} + 2 + 4k$$
$$x = \frac{7}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12k}{3} \quad \vee \quad x = \frac{11}{3} + \frac{6}{3} + \frac{12k}{3}$$
$$x = \frac{13 + 12k}{3} \quad \vee \quad x = \frac{17 + 12k}{3}$$

$x \in \langle 0, 10 \rangle$ gir da:

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3} \vee x = \frac{5}{3} \vee x = \frac{13}{3} \vee x = \frac{17}{3} \vee x = \frac{25}{3} \vee x = \frac{29}{3}}}$$

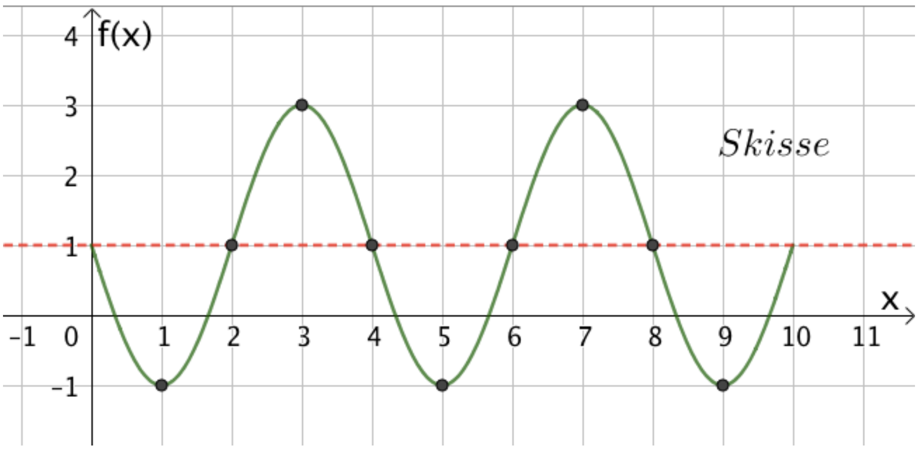
b) Vi har et uttrykk på formen $A\sin(cx+\varphi)+d$

Amplituden er 2 og likevektslinja er $y=1$, så alle bunnpunkter har y-koordinat -1 og alle toppunkter har y-koordinat 3.

Perioden er $p=\dfrac{2\pi}{c}=\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$.

$x_0=\dfrac{\varphi}{c}=\dfrac{-\pi}{\frac{\pi}{2}}=-2$, som betyr at grafen krysser likevektslinja, og er stigende når $x=-2$ (hvis dette hadde vært innenfor definisjonsområdet).
Det går videre en halv periode mellom hver gang grafen krysser likevektslinja.
Topp- og bunnpunktene ligger midt mellom disse skjæringspunktene, i x-retning.

Skjæringspunktene med likevektslinja, sammen med topp- og bunnpunktene, og skisserer grafen til f:



Oppgave 6

a)

$$\overrightarrow{AB}=[0-2,1-1,-2-0]=\underline{\underline{[-2,0,-2]}}$$

$$\overrightarrow{AC}=[-3-2,2-1,1-0]=\underline{\underline{[-5,1,1]}}$$

b) $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[0\cdot1-(-2)\cdot1,-(-2\cdot1-(-2)(-5)),-2\cdot1-0(-5)]=[2,12,-2]=2[1,6,-1]$

Vi ser at $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=2\vec{n}$, så $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\parallel\vec{n}$, <u>som skulle vises</u>.

c) Bruker $\vec{n}$ og punktet A til å sette opp følgende likning for planet:

$$(x-2)+6(y-1)-(z-0)=0$$
$$x-2+6y-6-z=0$$
$$\underline{\underline{x+6y-z=8}}$$

d) $\overrightarrow{AT}=\left[2+t-2,t^2+4-1,1+t-0\right]=\left[t,t^2+3,t+1\right]$

Når $t=2$, har vi $\overrightarrow{AT}=\left[2,7,3\right]$.

Dette gir:

$$V=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AT}\right|}{6}=\frac{\left|\left[2,12,-2\right]\cdot\left[2,7,3\right]\right|}{6}=\frac{\left|2\cdot 2+12\cdot 7-2\cdot 3\right|}{6}=\frac{\left|4+84-6\right|}{6}=\frac{82}{6}=\underline{\underline{\frac{41}{3}}}$$

e)

$$\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AT}\right|}{6}=\frac{26}{3}$$
$$\frac{2\cdot t+12\cdot\left(t^2+3\right)-2\left(1+t\right)}{6}=\frac{26}{3}$$
$$2t+12\left(t^2+3\right)-2\left(1+t\right)=52$$
$$2t+12t^2+36-2-2t=52$$
$$12t^2+34=52$$
$$12t^2=52-34$$
$$t^2=\frac{18}{12}$$
$$t=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Volumet er }\frac{26}{3}\text{ når }t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}}}$$

Oppgave 7

$$S(x) = 2 + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + \frac{(\ln x)^3}{4} + \cdots$$

a) Rekka konvergerer når $-1 < k < 1$. For denne rekka har vi $k = \frac{\ln x}{2}$.

$$-1 < \frac{\ln x}{2} < 1$$

$$-2 < \ln x < 2$$

$$e^{-2} < x < e^{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Konvergensområdet til rekka er } e^{-2} < x < e^{2}}}$$

b)

$$S(e) = \frac{2}{1 - \frac{\ln e}{2}} = \frac{4}{2 - \ln e} = \frac{4}{2-1} = \frac{4}{1} = \underline{\underline{4}}$$

c) Om vi setter $k = 3 - x$, vil vi ha $-1 < k < 1$ når $2 < x < 4$.
Vi kan da sette opp følgende uendelige geometriske rekke:

$$\underline{\underline{1 + (3-x) + (3-x)^2 + (3-x)^3 + \cdots}}$$

Oppgave 8

I punktet P har vi $y' = -1$. Setter dette inn i differensiallikningen.

$$-1 + \frac{1}{x} \cdot y = 1$$

$$\frac{1}{x} \cdot y = 2$$

$$y = 2x$$

Setter dette inn i likningen for tangenten.

$$2x = -x - 6$$

$$3x = -6$$

$$x = -2$$

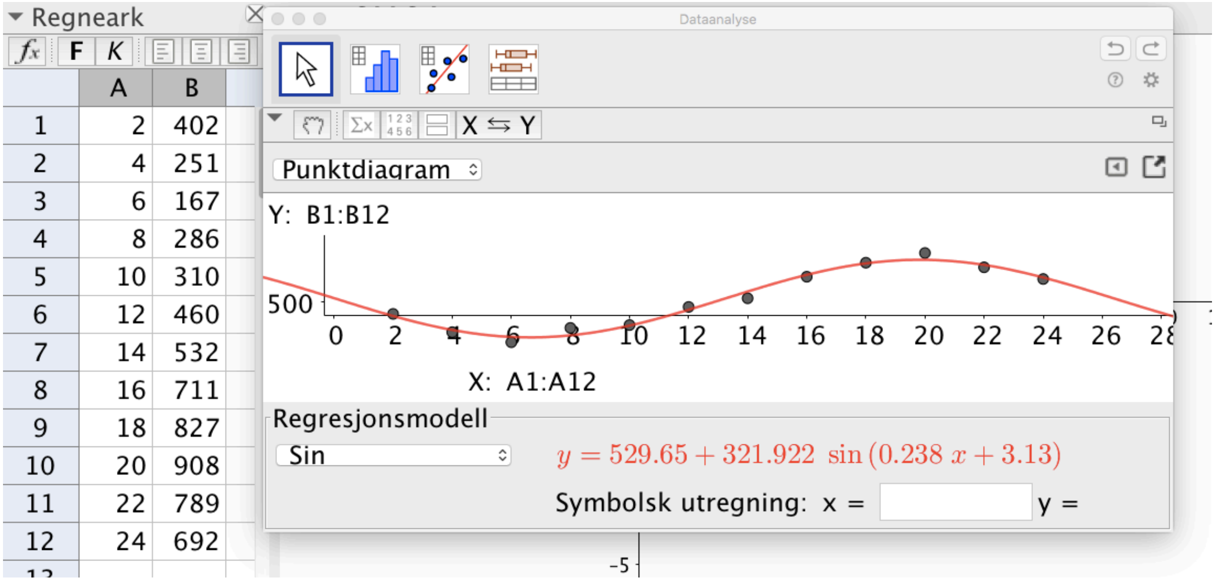
Dette gir $y = 2(-2) = -4$.

<u>Punktet *P* har koordinater (-2, -4)</u>

Del 2

Oppgave 1

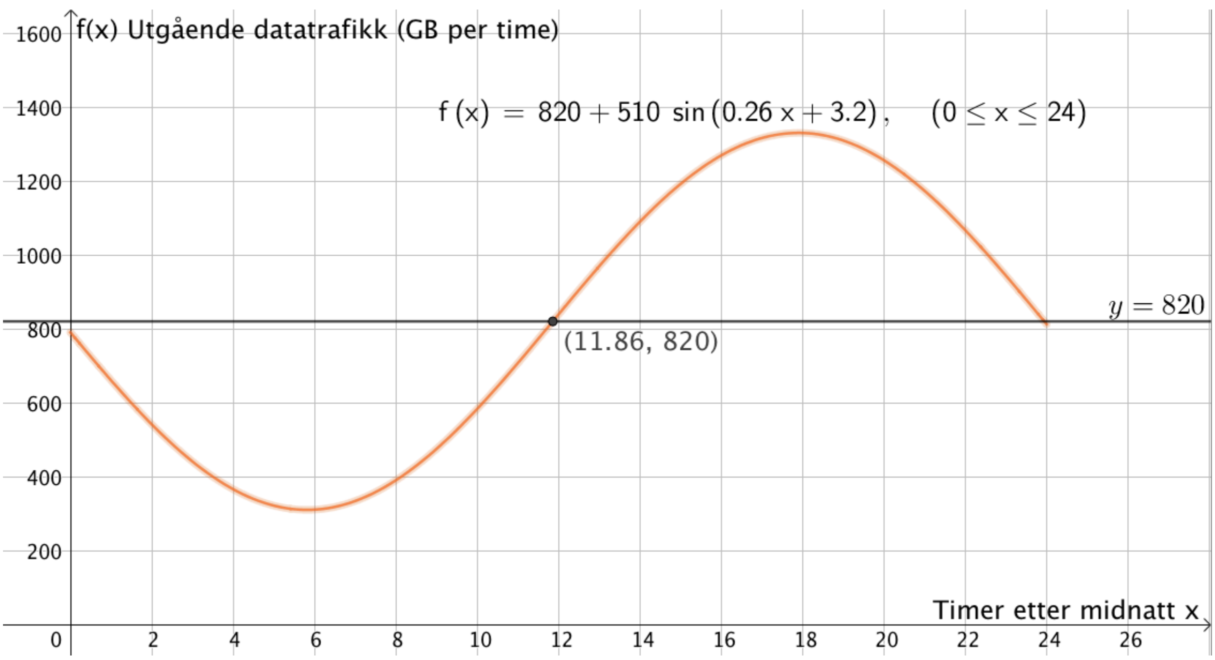
a)



En trigonometrisk funksjon som passer godt med informasjonen i tabellen er:

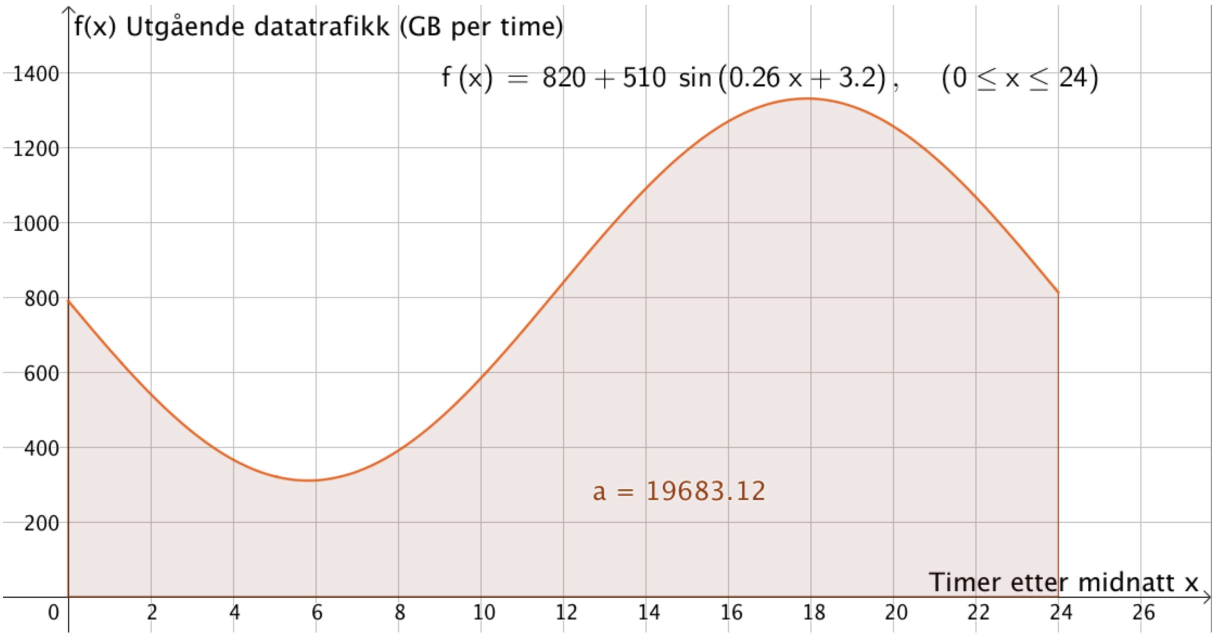
$$\underline{\underline{g(x) = 530 + 322\sin\left(0{,}24x + 3{,}1\right)}}$$

b) Grafen til *f* beskriver en harmonisk svingning. Da er veksten størst når grafen krysser likevektslinja og er stigende.
Tegner grafen til *f* sammen med likevektslinja $y = 820$, og bestemmer det aktuelle skjæringspunktet ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



<u>I følge modellen *f* øker utgående datatrafikk raskest kl.11:52 (altså litt før 12:00)</u>

c) Bruker kommandoen *" Integral(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"* og bestemmer den totale mengden utgående datatrafikk fra selskapet i løpet av et døgn.



<u>Den totale mengden utgående datatrafikk i løpet av et døgn er 19683 GB.</u>

Oppgave 2

a) Etter 0 uker (altså i starten av perioden): 20 smittede (de 20 tilreisende)
Etter 1 uke er antall nye smittede $20 \cdot R$

I uke 2 er antall nye smittede $\underbrace{20 \cdot R}_{\substack{\text{Antall nye} \\ \text{smittede} \\ \text{første uken}}} \cdot R = 20 \cdot R^2$

I uke 3 er antall nye smittede $\underbrace{20 \cdot R^2}_{\substack{\text{Antall nye} \\ \text{smittede} \\ \text{andre uken}}} \cdot R = 20 \cdot R^3$

.
.
.

I uke *n* er antall nye smittede $\underbrace{20 \cdot R^{n-1}}_{\substack{\text{Antall nye} \\ \text{smittede} \\ \text{i uke n-1}}} \cdot R = 20 \cdot R^n$

Når vi summerer antall nye smittede for hver uke, vil summen fortelle hvor mange som er syke, eller har vært syke, med covid 19 i løpet av de *n* første ukene etter at de smittede tilreisende ankom byen.

Dette gir rekka $20 + 20 \cdot R + 20 \cdot R^2 + \cdots + 20 \cdot R^n$, <u>som skulle forklares</u>.

b) Vi skal bestemme summen av de 9 første leddene i rekka fra oppgave a) (de 20 smittede som ankom byen + antall nye smittede i 8-ukersperioden).

CAS

1. 20*(1.7^9−1)/(1.7−1)
   $\checkmark\ 20 \cdot \frac{1.7^9 - 1}{1.7 - 1}$
2. 20(1.7^9 − 1) / (1.7 − 1)
   $\approx\ 3359.654$

<u>Etter 8 uker vil det være 3360 personer i byen som har, eller har hatt, covid 19.</u>

c) Antall nye smittede fra og med uke 8 er gitt ved ei uendelig geometrisk rekke der a_1 er antall nye smittede i uke 8 etter ankomsten til de 20 smittede.

$a_1 = 20 \cdot 1{,}7^8 = 1395{,}15 \approx 1395$.

Når vi legger summen av denne uendelige geometriske rekka til antallet som hadde, eller hadde hatt, covid 19 etter 7 uker, skal ikke summen overstige 10 000.

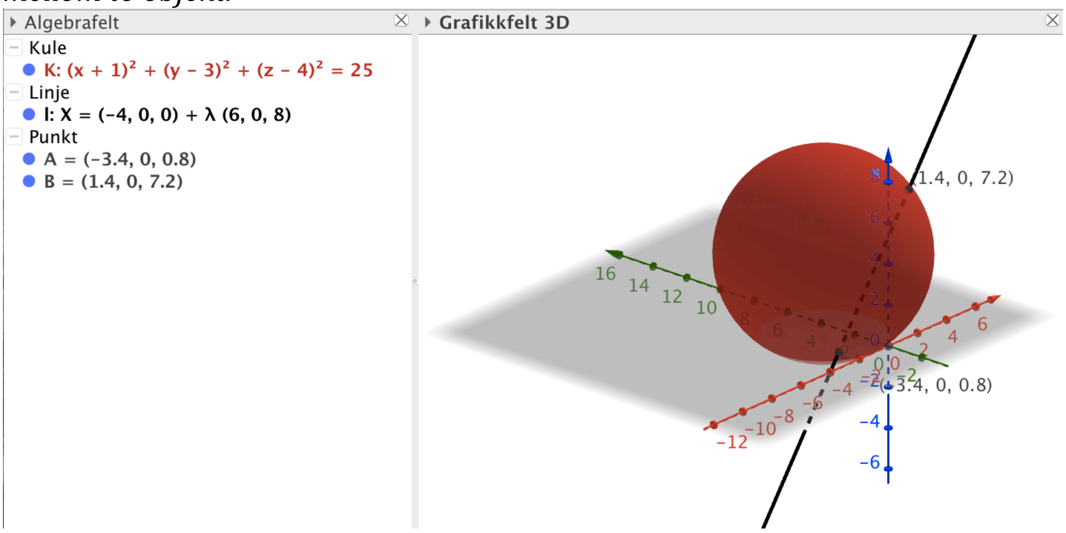
CAS

1. 20*(1.7^8−1)/(1.7−1)+1395/(1−k)=10000
   $\checkmark\ 20 \cdot \frac{1.7^8 - 1}{1.7 - 1} + \frac{1395}{1 - k} = 10000$
2. 20(1.7^8 − 1) / (1.7 − 1) + 1395 / (1 − k) = 10000
   Løs: $\left\{k = \frac{3320248937}{4017748937}\right\}$
3. {k = 3320248937 / 4017748937}
   NLøs: $\{k = 0.83\}$

<u>Etter tiltakene iverksettes må R-tallet være høyst 0,83 for at antallet som har, eller har hatt, covid 19 i byen ikke skal overstige 10 000.</u>

Oppgave 3

a) Alternativ 1 – Grafisk i 3D-grafikkfeltet i GeoGebra:
Tegner kuleflaten og linja og finner skjæringspunktene ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



<u>Skjæringspunktene er (-3,4, 0, 0,8) og (1,4, 0, 7,2)</u>

Alternativ 2 – løsning "ved regning":

$\overrightarrow{AB} = [6,0,8] = 2[3,0,4]$, så $\vec{r} = [3,0,4]$ er en retningsvektor for ℓ.

Bruker punktet A og setter opp følgende parameterfremstilling for ℓ:

$$\ell \begin{cases} x = 3t - 4 \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases}$$

Dette gir at enhver vektor fra sentrum i kuleflata til et punkt på ℓ, er gitt ved

$\vec{u} = [3t - 4 - (-1), 0 - 3, 4t - 4] = [3t - 3, -3, 4t - 4]$.

Når linja ℓ skjærer kuleflata, har vi $|\vec{u}| = 5$.

CAS

1 u:=Vektor((3t-3,-3,4t-4))

$\rightarrow$ u := $\begin{pmatrix} 3t - 3 \\ -3 \\ 4t - 4 \end{pmatrix}$

2 abs(u)=5

Løs: $\left\{ t = \frac{1}{5}, t = \frac{9}{5} \right\}$

Setter dette inn i parameterfremstillingen for ℓ:

$t = \frac{1}{5}$ gir $x = \frac{3}{5} - 4 = -\frac{17}{5} \wedge y = 0 \wedge z = \frac{4}{5}$.

$t = \frac{9}{5}$ gir $x = \frac{27}{5} - 4 = \frac{7}{5} \wedge y = 0 \wedge z = \frac{36}{5}$.

Skjæringspunktene er $\left(-\frac{17}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$ og $\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{36}{5}\right)$

b) Den minste avstanden fra sentrum i kuleflaten til linja ℓ, er et linjestykke fra sentrum som står normalt på ℓ. (Dette er per definisjon *avstanden* fra S til ℓ). Denne avstanden er gitt ved lengden av $\vec{u}$ når $\vec{u} \perp \vec{r}$.

CAS

1 r:=Vektor((3,0,4))

$\rightarrow$ r := $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 u:=Vektor((3t-3,-3,4t-4))

$\rightarrow$ u := $\begin{pmatrix} 3t - 3 \\ -3 \\ 4t - 4 \end{pmatrix}$

3 r*u=0

Løs: $\{t = 1\}$

Når $t=1$ har vi $\vec{u}=\left[0,-3,0\right]$, og lengden av denne er 3.

Det betyr at linja ℓ tangerer kuleflaten når radius er 3, mens den vil ligge utenfor kuleflaten når radius er mindre.

<u>Den minste verdien av *r* som gjør at det er skjæringspunkt mellom kuleflata og linja er 3.</u>

Kommentar:
Oppgaveteksten krevde bruk av CAS, så da er vi "tvunget" til det.
Her kunne vi imidlertid ha funnet løsningen ganske greit ved hjelp av et resonnement. Siden begge punktene A og B ligger i xz-planet, må også linja ligge i xz-planet. Da er korteste avstand fra S til linja, avstanden fra S til xz-planet, som er gitt ved absoluttverdien til y-koordinaten til S.
Kort fortalt: Når linja ligger i xz-planet og S har y-koordinat -3, må (korteste) avstand fra S til linja være 3.

c) Alternativ 1 – Bruker kommandoen *" Plan(<Punkt>, <Punkt>, <Punkt>)" i* CAS:
Kaller skjæringspunktene fra a) for *P* og *Q*.

CAS

1	P:=(-17/5,0,4/5) → $P := \left(-\frac{17}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$
2	Q:=(7/5,0,36/5) → $Q := \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{36}{5}\right)$
3	C:=(0,1,0) → $C := (0, 1, 0)$
4	Plan(P, Q, C) → $-6.4x + 25.6y + 4.8z = 25.6$

Alternativ 2 – Bruker samme metode som om jeg gjorde "for hånd", men med hjelp av CAS:

CAS

1	P:=(-17/5,0,4/5) → $P := \left(-\frac{17}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$
2	Q:=(7/5,0,36/5) → $Q := \left(\frac{7}{5}, 0, \frac{36}{5}\right)$
3	C:=(0,1,0) → $C := (0, 1, 0)$
4	Vektor(C,P)⊗Vektor(C, Q) → $\begin{pmatrix} -\frac{32}{5} \\ \frac{128}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$

Kryssproduktet i linje 4 på bildet over kan uttrykkes slik:

$$\left[-\frac{32}{5},\frac{128}{5},\frac{24}{5}\right]=\frac{8}{5}\left[-4,16,3\right]$$

Da kan vi si at $\vec{n}=\left[-4,16,3\right]$ er en normalvektor for planet α.

Bruker denne normalvektoren og punktet *C* til å bestemme en likning for planet.

$$-4(x-0)+16(y-1)+3(z-0)=0$$
$$-4x+16y-16+3z=0$$
$$-4x+16y+3z=16$$

$$\underline{\underline{\alpha:-4x+16y+3z=16}}$$

Likningen for planet blir forskjellig i de to variantene her, men det er fordi jeg ikke brukte kryssproduktet som normalvektor direkte, men heller en vektor som er parallell med kryssproduktet. Multipliserer vi den "siste" likningen for planet med 8/5, får vi samme likning som i alternativ 1. Begge løsninger er riktige.

d) Planet α er utspent av to vektorer fra punktet *C* til to punkter på linja ℓ.
Linja ℓ er den samme, uavhengig av radius i kuleflata, så da vil også likningen for planet være uavhengig av radius i kuleflata.

Oppgave 4

a) Tilført mengde biodiesel er 1L per liter blanding tappet ut av tanken.
Mengden biodiesel per liter blanding i tanken er til enhver tid
$\frac{B(x)}{400}=0{,}0025\cdot B(x)$, så dette er også mengden biodiesel som tappes ut for hver liter blanding som tappes ut.
Endringen i mengde biodiesel i tanken vil til enhver tid være differansen mellom tilført mengde og mengden som tappes ut.

Da har vi $B'(x)=1-0{,}0025\cdot B(x)$, som skulle forklares.

b) Løser differensiallikningen i CAS.
Av praktiske hensyn bruker jeg *y* og *y'* om $B(x)$ og $B'(x)$ når jeg jobber i CAS.
Siden mengden biodiesel i tanken er 0 liter når 0 liter er tappet ut, tar jeg med initialbetingelsen $y(0)=0$.

CAS

1 LøsODE(y'=1-0.0025y, (0,0))

$\rightarrow\ y = -400\,e^{-\frac{x}{400}} + 400$

Bestemmer hvilken verdi *x* må ha når *y* skal være 200.

2	-400 e^((-x) / 400) + 400=200 ✓ $-400\,e^{-\frac{x}{400}}+400=200$
3	-400 e^((-x) / 400) + 400 = 200 Løs: $\{x = 400\ \ln(2)\}$
4	{x = 400ln(2)} ≈ $\{x = 277.259\}$

Det må tappes ut omtrent 277 liter blanding fra tanken før halvparten av den vanlige dieselen skal være erstattet med biodiesel.

c) Lar y være mengden biodiesel i tanken når det er tappet ut x liter blanding.

For hver liter biodiesel som tilføres, tappes det ut $\frac{y}{V}$ liter biodiesel.

Vi får da følgende differensiallikning: $y' = 1 - \frac{y}{V}$.

Løser denne i CAS med initialbetingelsen $y(0) = 0$.

CAS	
1	LøsODE(y'=1-y/V, (0,0)) → $y = -V\,e^{-\frac{x}{V}} + V$

Bestemmer videre hvilken verdi x må ha for at y skal være $\frac{V}{2}$.

2	-V e^((-x) / V) + V=V/2 Løs: $\{x = V\ \ln(2)\}$

x i denne løsningen i CAS, tilsvarer m i oppgaveteksten.

Vi har altså $m = \ln 2 \cdot V$, som skulle vises.