Løsningsforslag eksamen R1 – Høsten 2021

Del 1

Oppgave 1

a) $f(x)=\ln x+x^2+2 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{1}{x}+2x}}$

b) $g(x)=\left(x^2+2\right)^7 \Rightarrow g'(x)=7\left(x^2+2\right)^6\cdot 2x=\underline{\underline{14x\left(x^2+2\right)^6}}$

c) $h(x)=3x\cdot e^{2x} \Rightarrow h'(x)=3\cdot e^{2x}+3x\cdot 2e^{2x}=\underline{\underline{3\left(2x+1\right)e^{2x}}}$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\frac{2x+2}{x^2-x}-\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2+x}&=\frac{2x+2}{x\left(x-1\right)}-\frac{2x+2}{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x\left(x+1\right)}\\&=\frac{\left(2x+2\right)\left(x+1\right)}{x\left(x-1\right)\left(x+1\right)}-\frac{x\left(2x+2\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}+\frac{\left(x+1\right)\left(x-1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}\\&=\frac{2x^2+4x+2-2x^2-2x+x^2-1+x^2-1}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}\\&=\frac{2x^2+2x}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}\\&=\frac{2x\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\left(x-1\right)}\\&=\underline{\underline{\frac{2}{x-1}}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\ln\left(4x\right)+3\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\ln\left(2x^2\right)&=\ln 4+\ln x+3\left(\ln x-\ln 2\right)+\ln 2+\ln x^2\\&=\ln 2^2+\ln x+3\ln x-3\ln 2+\ln 2+2\ln x\\&=2\ln 2+6\ln x-2\ln 2\\&=\underline{\underline{6\ln x}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

a)

$\overrightarrow{AC} = [6-2, 5-2] = [4,3]$ og $\overrightarrow{BD} = [2-6, 6-1] = [-4,5]$ er retningsvektorer for henholdsvis linja ℓ og linja m.

Bruker punktene *A* og *B* som faste punkter, og setter opp følgende parameterfremstillinger:

$$\underline{\underline{\ell : \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 2+3t \end{cases} \quad \text{og} \quad m : \begin{cases} x = 6-4s \\ y = 1+5s \end{cases}}}$$

b) Setter parameterfremstillingene lik hverandre og får følgende likningssett:

$$I. \quad 2+4t = 6-4s$$

$$II. \quad 2+3t = 1+5s$$

Likning *I* kan omformes:

$$4t = 6-2-4s$$

$$t = 1-s$$

Setter dette inn i likning *II:*

$$2+3(1-s) = 1+5s$$

$$2+3-3s = 1+5s$$

$$8s = 4$$

$$s = \frac{1}{2}$$

Setter $s = \frac{1}{2}$ inn i parameterfremstillingen for m:

$$x = 6-4\cdot\frac{1}{2} = 6-2 = 4$$

$$y = 1+5\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\underline{\underline{\ell \text{ og } m \text{ skjærer hverandre i } \left(4, \frac{7}{2}\right)}}$$

c) Regner ut skalarproduktet til retningsvektorene:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD} = [4,3]\cdot[-4,5] = 4(-4)+3\cdot5 = -16+15 = -1 \neq 0$$

<u>Skalarproduktet er forskjellig fra null, så linjene står ikke normalt på hverandre</u>.

Oppgave 4

$$f(x)=\frac{5}{x^2+4}$$

Rektangelet *ABCD* har gunnlinje med lengde $2t$, mens høyden er $f(t)$.
Det gir følgende uttrykk for arealet:

$$A(t)=2t\cdot\frac{5}{t^2+4}=\frac{10t}{t^2+4}$$

Bruker derivasjon til å bestemme det største arealet rektangelet kan få:

$$A'(t)=\frac{10\left(t^2+4\right)-10t\cdot 2t}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{10t^2+40-20t^2}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{-10t^2+40}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{-10\left(t^2-4\right)}{\left(t^2+4\right)^2}$$

$$A'(t)=0 \text{ gir } t^2-4=\left(t+2\right)\left(t-2\right)=0$$

Skal ha $t>0$, så $t=2$ er det aktuelle nullpunktet til den deriverte av arealet.
Siden nevneren i uttrykket for den deriverte er positiv for alle *x*, ser vi nærmere på fortegnet til telleren.

$-10t^2+40$ er funksjonsuttrykket til en parabel som vender hul side ned (”sur munn”). Da vet vi at denne er positiv mellom nullpunktene. Det betyr at den deriverte går fra å være positiv til å være negativ i nullpunktet $t=2$.

$t=2$ gir altså toppunkt på grafen til *A*.

$$A(2)=\frac{10\cdot 2}{2^2+4}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{\text{Det største arealet rektangelet kan ha er } \frac{5}{2}}}$$

Oppgave 5

a) $x=10$ gir $\lg 10^2=\lg 100=2$

$x=-10$ gir $\lg\left(-10\right)^2=\lg 100=2$

Vi ser altså at påstandene ikke er ekvivalente, men at det er implikasjon fra høyre mot venstre.

$\underline{\underline{\lg x=2 \Leftarrow x=10}}$

b) $x^2-2x=x\left(x-2\right)$ har nullpunkter $x=0$ og $x=2$. Siden grafen til uttrykket er en parabel som vender hul side opp ”smilemunn”, vet vi at verdien av uttrykket er negativ mellom nullpunktene. Det betyr at $x^2-2x<0$ når $x\in\langle 0,2\rangle$. Dette intervallet inkluderer intervallet $\langle 0,1\rangle$, så vi har implikasjon fra høyre mot venstre.

$\underline{\underline{x^2-2x<0 \Leftarrow x\in\langle 0,1\rangle}}$

Oppgave 6

a) Vi plasserer først én person, før vi fordeler de andre fem.
Disse fem kan nå plasseres på $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ulike måter.
Da har vi alle de ulike måtene vennene kan plassere seg i ringen, som altså er 120 ulike måter.
Som skulle begrunnes.

b) Når Audun og Siv holder hender, er det fire plasser igjen i ringen. Disse 4 plassene gir $4! = 24$ ulike kombinasjoner av resten av vennene. Audun og Siv kan bytte plass, og fortsatt holde hender, og da er det 24 nye mulige kombinasjoner der Audun og Siv holder hender.

$$P(\text{Audun og Siv får holde hender}) = \frac{48}{120} = \underline{\underline{\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%}}$$

c) Hvis vi ser på Audun og Siv som én enhet, er det 5 steder å plassere paret på linja. De to kan også bytte plass med hverandre, så det totalt sett blir 10 mulige plasseringer av Siv og Audun, for hver av de $4! = 24$ kombinasjonene av resten. Totalt $24 \cdot 10 = 240$ måter å stille opp vennegjengen når Siv og Audun skal stå ved siden av hverandre, av totalt $6! = 720$ mulige kombinasjoner.

$$P(\text{Audun og Siv står sammen på bildet}) = \frac{240}{720} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Oppgave 7

a) $\angle BAC$ og $\angle BDC$ er periferivinkler som spenner over samme bue. Da må disse vinklene være like store.
$\angle BAC = \angle BDC$, som skulle forklares.

b) Har allerede vist at $\angle BAC = \angle BDC$. Når da punktet E plasseres slik at $\angle DCE = \angle ACB$, har trekantene ΔDEC og ΔABC to vinkler som er parvis like store. Da må alle de tre vinklene være parvis like store i de to trekantene. Da vet vi at ΔDEC og ΔABC er formlike, og at forholdet mellom samsvarende sider er likt.

$$\frac{ED}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$ED = \frac{DC}{AC} \cdot AB$$

$$ED \cdot AC = AB \cdot DC$$

Som skulle vises.

c) $\angle DAC$ og $\angle DBC$ er periferivinkler som spenner over samme bue. Da må disse vinklene være like store.
$\angle ACD = \angle BCD - \angle ACB$ og $\angle BCE = \angle BCD - \angle DCE$
Vi har allerede vist at $\angle DCE = \angle ACB$, så da må vi også ha $\angle ACD = \angle BCE$.
Da er to vinkler parvis like store i ΔACD og ΔBCE, slik at disse to trekantene er formlike, og forholdet mellom samsvarende sider er likt.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BE}$$

$$BE \cdot \frac{AC}{BC} = AD$$

$$BE \cdot AC = BC \cdot AD$$

Som skulle vises.

d) Fra oppgave a) har vi at $ED \cdot AC = AB \cdot DC \Leftrightarrow AC = \dfrac{AB \cdot DC}{ED}$.

Figur 2 forteller oss at $BD = BE + ED$.
Da har vi:

$$\begin{aligned} AC \cdot BD &= \frac{AB \cdot DC}{ED}\left(BE + ED\right) \\ &= \frac{AB \cdot DC \cdot BE}{ED} + AB \cdot DC \qquad \left(ED \cdot AC = AB \cdot DC \Leftrightarrow ED = \frac{AB \cdot DC}{AC}\right) \\ &= \frac{AB \cdot DC \cdot BE}{\frac{AB \cdot DC}{AC}} + AB \cdot DC \\ &= BE \cdot AC + AB \cdot DC \end{aligned}$$

Vi har vist i oppgave c) at $BE \cdot AC = BC \cdot AD$,
og vi kan da si at $AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$, som skulle vises.

e) Bruker Ptolemaios' setning på figuren til høyre i oppgaveteksten.
Den sykliske firkanten på figuren er et rektangel, så diagonalene er like lange.

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

$$c \cdot c = a \cdot a + b \cdot b$$

$$gir$$

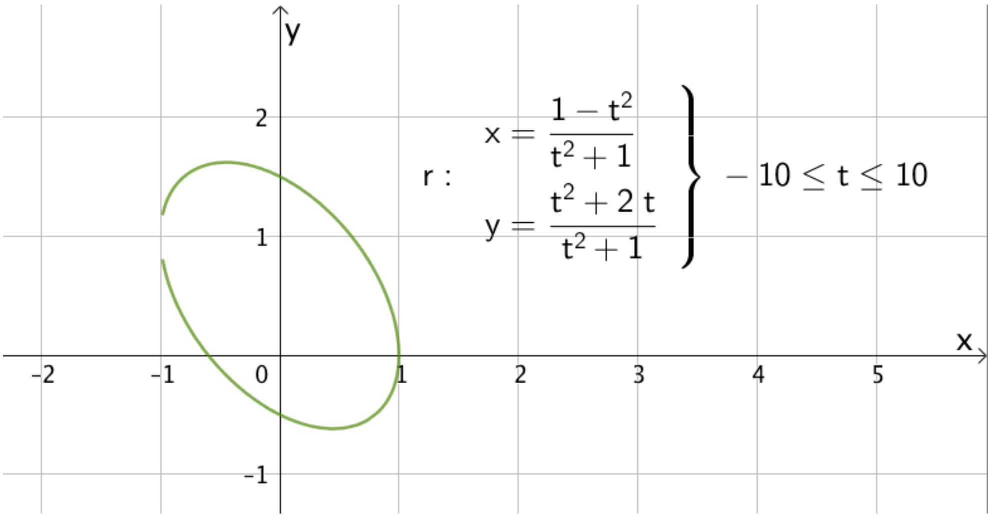
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Har da bevist Pythagoras' setning ved hjelp av Ptolemaios' setning og figuren.

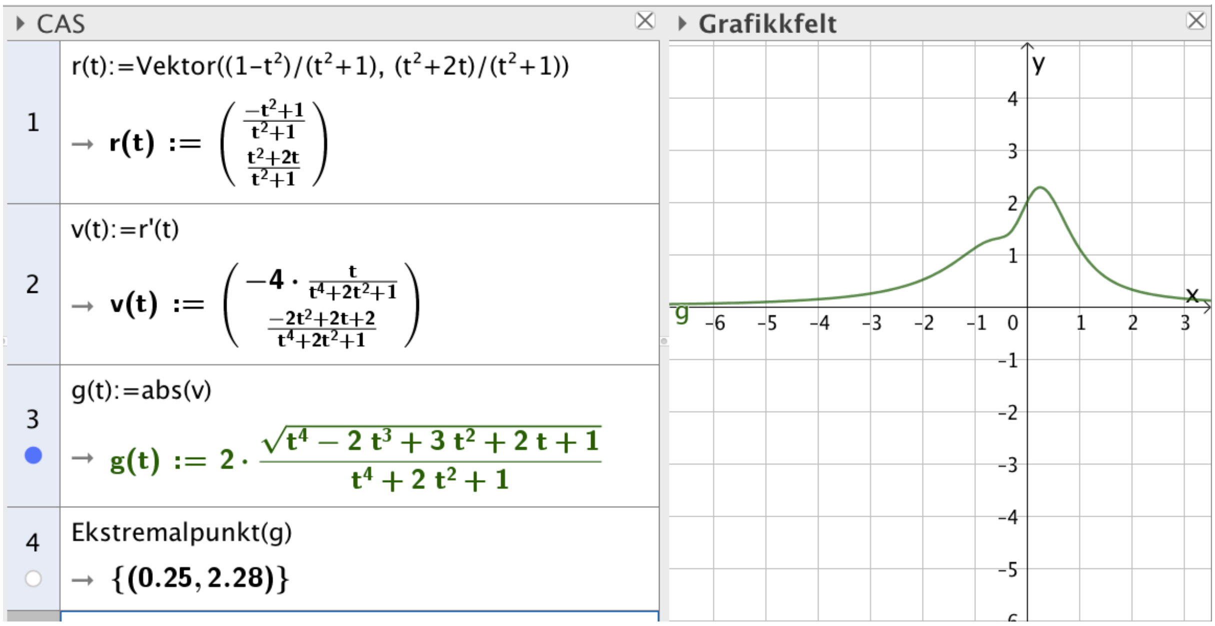
Del 2

Oppgave 1

a) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)"
og tegner grafen til $\vec{r}$



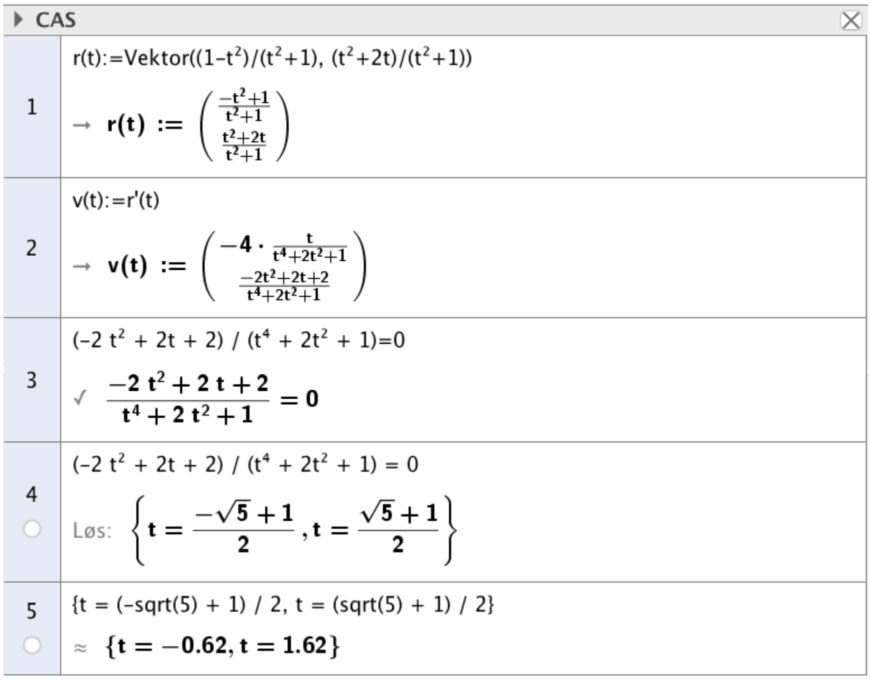
b)



Definerer en funksjon g som absoluttverdien til fartsvektoren og finer ekstremalpunkt i linje 4. (Ser av grafen at det er snakk om toppunkt).

<u>Farten til partikkelen var størst når $t = 0{,}25$ sekunder</u>.

c) Når partikkelen beveger seg parallelt med x-aksen, er y-komponenten til fatsvektoren lik 0.



Tidspunktene der partikkelen beveger seg parallelt med x-aksen er oppgitt med eksakte verdier i linje 4 på bildet over, mens avrundede verdier presenteres i linje 5.

Oppgave 2

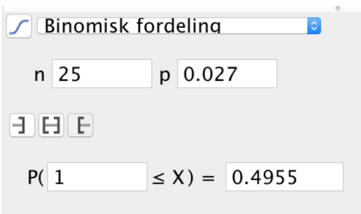
a) Sannsynligheten for at kulen havner på det grønne feltet minst én gang på 10 omganger, er det motsatte av at den *aldri* havner på det grønne feltet i løpet av 10 omganger.

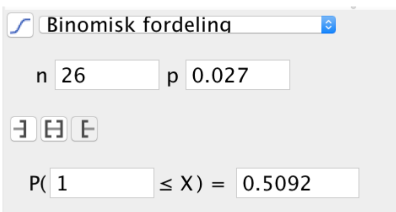
$$1-\left(\frac{36}{37}\right)^{10}=0,240=24,0\%$$

<u>Sannsynligheten for at kulen havner på det grønne feltet minst én gang på 10 omganger er 24 %.</u>

b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra. Vi har en binomisk sannsynlighetsmodell der $p=\dfrac{1}{37}$.

Justerer n til sannsynligheten passerer 50 % for minst ett treff på grønt felt.

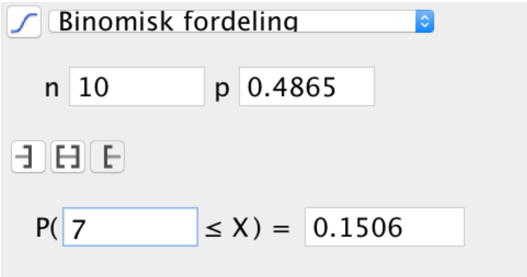




Vi ser at sannsynligheten passerer 50 % når vi går fra 25 til 26 spill.

<u>Vi må spille minst 26 ganger dersom sannsynligheten skal være mer enn 50 % for at kulen havner på grønt felt minst én gang.</u>

c) Dersom vi sier at vi har to mulige utfall, enten rødt felt eller ikke rødt felt, har vi et binomisk forsøk. Sannsynligheten for "rødt felt" er $\frac{18}{37}$ i hvert delforsøk og delforsøkene er uavhengige av hverandre.
Jeg kan da bruke sannsynlighetskalkulatoren til å vise at $p \approx 0{,}151$ for at kulen havner på rødt felt i minst 7 av 10 spillomganger:

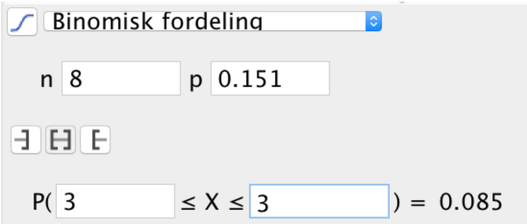


$p \approx 0{,}151$, <u>som skulle vises.</u>

Skulle jeg gjort dette *for hånd*, kunne jeg ha regnet ut verdien av følgende uttrykk:

$$\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^7\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^3+\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^8\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^2+\binom{10}{9}\cdot\left(\frac{18}{37}\right)^9\cdot\left(\frac{19}{37}\right)+\left(\frac{18}{37}\right)^{10}$$

d) Her har vi et binomisk forsøk der $n = 8$ og $p \approx 0{,}151$.



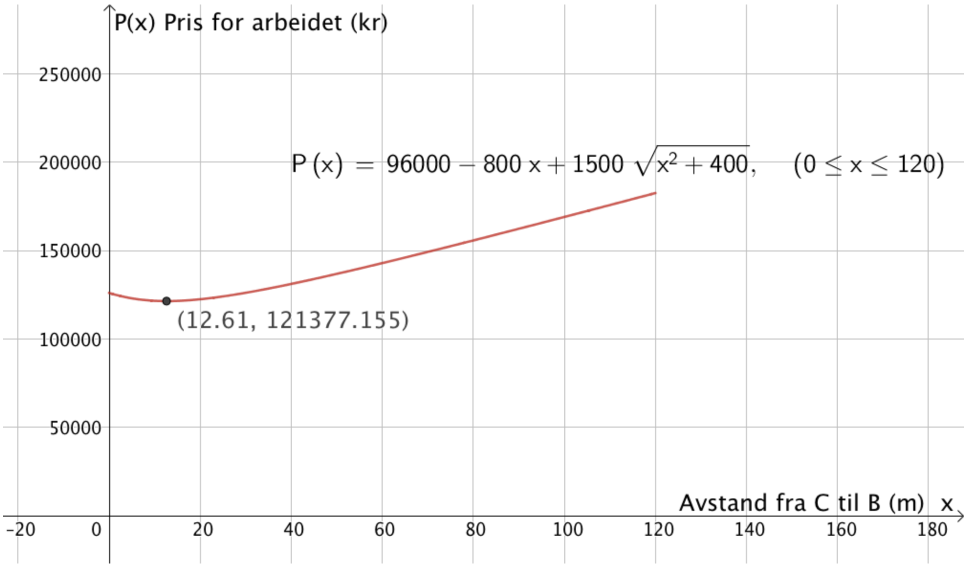
<u>Sannsynligheten for at nøyaktig 3 av de 8 vennene får rødt tall minst 7 av de 10 omgangene er 8,5 %.</u>

Oppgave 3

a) Avstanden mellom *A* og *B* er $(120-x)m$, så da blir prisen for denne delen av gravingen $(120-x)m\cdot 800\,{}^{kr}\!/_{m} = (120-x)\cdot 800kr = (96000-800x)kr$
Avstanden mellom *B* og *D* kan vi bestemme ved hjelp av Pythagoras' setning, og denne avstanden er $\sqrt{x^2+20^2}\ m = \sqrt{x^2+400}\ m$. Da blir prisen for denne delen av arbeidet $\sqrt{x^2+400}\ m\cdot 1500\,{}^{kr}\!/_{m} = 1500\sqrt{x^2+400}\ kr$.
Totalprisen for arbeidet er da gitt ved summen av prisen for hver av de to delene.
Når $P(x)$ er prisen i kroner for hele arbeidet, har vi

$P(x) = 9000 - 800x + 15\sqrt{x^2+400}$, <u>som skulle vises</u>

b) Tegner grafen til P for $x \in [0,120]$ og finner bunnpunktet ved hjelp av kommandoen *" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)"*.



<u>Terje bør sette punkt *B* omtrent 13 meter fra *D*, for at prisen skal bli lavest mulig. Da blir prisen omtrent 121 400 kroner.</u>

c) Lar $Q(x)$ være totalprisen for arbeidet når det utføres av dette andre firmaet. Setter prisen for å lage grøft i terrenget til k kroner per meter.
Da har vi $Q(x) = 1000(120 - x) + k \cdot \sqrt{400 + x^2}$.

CAS	
1	Q(x):=1000*(120−x)+k*sqrt(400+x^2) → $Q(x) := k\sqrt{x^2+400} - 1000\,x + 120000$
2	Q'(10)=0 Løs: $\{k = 1000\sqrt{5}\}$
3	{k = 1000sqrt(5)} ≈ $\{k = 2236.068\}$
4	Q''(10) ≈ $0.036\,k$

Definerer Q og finner hvilken verdi k må ha for at $x = 10$ skal være et nullpunkt for den deriverte av Q. I linje 4 bekrefter jeg at dette nullpunktet til den deriverte gir bunnpunkt på grafen til Q, ved hjelp av andrederiverttesten.
(Vi har at $k > 0$, så da må også $0{,}036k > 0$).

<u>Det andre firmaet tar 2236 kroner per meter for å lage grøft i terrenget</u>

Oppgave 4

a) $f(x)=x^3-2b\cdot x^2+\left(b^2+3\right)x=x\left(x^2-2b\cdot x+b^2+3\right)=x\left(\left(x-b\right)^2+3\right)$

Dette gir videre:

$$f(x)=0$$
$$x\left(\left(x-b\right)^2+3\right)=0$$
$$x=0\vee\left(x-b\right)^2+3=0$$

Siden $\left(x-b\right)^2\geq 0$ for alle *x* og alle *b*, må $\left(x-b\right)^2+3>0$ for alle *x* og alle *b*.
Det betyr at $x=0$ er eneste nullpunktet til *f*.

f har kun ett nullpunkt, uavhengig av verdien av *b*. Som skulle forklares.

b) $f'(x)=3x^2-4b\cdot x+b^2+3$

Når likningen $f'(x)=0$ har to løsninger, vil grafen til *f* ha både toppunkt og bunnpunkt.

Da må vi ha $\left(-4b\right)^2-4\cdot 3\left(b^2+3\right)>0$ (jf. abc-formelen)

CAS

1	(-4b)^2-4*3*(b^2+3)>0 ✓ $(-4\,b)^2-4\cdot 3\ (b^2+3)>0$
2	(-4 b)^2 - 4 (3) (b^2 + 3) > 0 Løs: $\{b<-3, b>3\}$

Grafen til f har både topp- og bunnpunkt når $b<-3$ og når $b>3$

c)

CAS

1	f(x):=x^3-2b*x^2+(b^2+3)*x → $f(x) := -2\,b\,x^2+b^2\,x+x^3+3\,x$
2	g(x):=3x → $g(x) := 3\,x$
3	f=g Løs: $\{x=b, x=0\}$
4	Tangent(b, f) → $y=3\,x$
5	f(b) → $3\,b$

Siden likningen til tangenten i punktet $\left(b, f(b)\right)$ er $y = 3x$, og dermed uavhengig av *b*, kan vi konkludere med at grafen til *f* tangerer linja $y = 3x$, uavhengig av hvilken verdi *b* har. Som skulle vises.
Tangeringspunktet er $\left(b, 3b\right)$.