Løsningsforslag eksamen 2P-Y høsten 2021

Del 1

Oppgave 1

Starter med å sortere tallene i stigende rekkefølge:

0 0 4 4 4 5 5 7 7 9

a) ***Medianen*** ligger midt mellom verdi nummer fem og verdi nummer seks når tallene er sortert i stigende rekkefølge, altså midt mellom 4 og 5.

$$\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2}=4,5$$

Gjennomsnitt: $\dfrac{0+0+4+4+4+5+5+7+7+9}{10}=\dfrac{45}{10}=4,5$

Typetall: Det er verdien 4 som forekommer flest ganger, så typetallet er 4.

Variasjonsbredde: $9-0=9$

Tallene i svaret refererer til antall dager med snøfall i april i en kommune i Norge, basert på målinger gjort de siste 10 årene.

<u>Medianen er 4,5, gjennomsnittet er 4,5, typetallet er 4 og variasjonsbredden er 9</u>

b) Når vi bestemmer den kumulative frekvensen for 5 dager med snøfall, ser vi hvor mange av tallene i datamaterialet som har verdien 5 eller lavere.

<u>Den kumulative frekvensen for fem dager med snøfall i april er 7</u>

Svaret forteller at det har vært høyst fem dager med snøfall i april i 7 av de 10 årene målingene er gjort.

Oppgave 2

a) $\dfrac{20\cdot 5+50\cdot 15+20\cdot 30+10\cdot 60}{100}=\dfrac{2\cdot 5+5\cdot 15+2\cdot 30+1\cdot 60}{10}=\dfrac{10+75+60+60}{10}=1+7,5+6+6=20,5$

<u>Gjennomsnittlig tid brukt på skoleveien er 20,5 minutter</u>

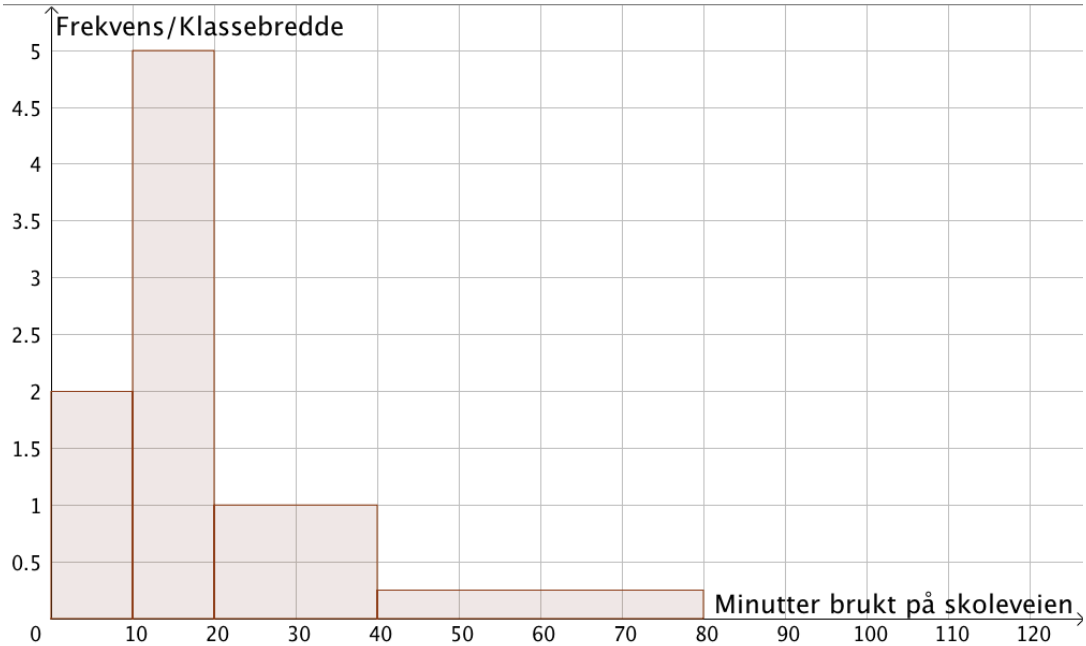
b) Medianen ligger i det intervallet der den kumulative frekvensen passerer 50 (altså halvparten av de 100 målingene).

$$\underline{\underline{\text{Medianen ligger i intervallet } \left[10,20\right\rangle}}$$

c) Regner ut histogramhøydene, som er $\dfrac{\text{Frekvens}}{\text{Klassebredde}}$.

$\dfrac{20}{10}=2 \qquad \dfrac{50}{10}=5 \qquad \dfrac{20}{20}=1 \qquad \dfrac{10}{40}=0{,}25$.

Da har jeg høyden i alle rektanglene, mens breddene er klassebreddene i tabellen.



Oppgave 3

a) $8^5=\left(2^3\right)^5=2^{3\cdot 5}=2^{15}$, så <u>Idar sin påstand stemmer</u>.

b) $3^{10}=3^{2\cdot 5}=\left(3^2\right)^5=9^5$.

Siden $8<9$, må også $8^5<9^5$.

<u>3^{10} har den største verdien av de to potensene.</u>

Oppgave 4

a)

1) Når Hans trekker sete 1, er det kun ett av de fire resterende setene som er gunstig for Grete om hun skal få sitte sammen med Hans.

$$P(\text{Grete får sitte ved siden av Hans} \mid \text{Hans trekker sete } 1)=\underline{\underline{\frac{1}{4}=0{,}25=25\%}}$$

2) Når Hans trekker sete 3, er det to av de resterende fire setene som er gunstige for Grete om hun skal få sitte sammen med Hans.

$$P(\text{Grete får sitte ved siden av Hans} \mid \text{Hans trekker sete } 3)=\underline{\underline{\frac{2}{4}=0{,}5=50\%}}$$

b) Dersom Hans trekker sete 2 eller 4, blir situasjonen den samme som om han trekker sete 3. (Det vil være to gunstige seter for Grete).
Dersom Hans trekker sete 5, blir det som om han trekker sete 1.
(Ett gunstig sete for Grete).
Vi summerer sannsynligheten for hvert av de fem tilfellene, og deler på 5 siden det er 1/5 sannsynlighet for hver av situasjonene. (Hans trekker én av fem lapper).

$$P(\text{Grete får sitte ved siden av Hans}) = \frac{2\cdot 0{,}25 + 3\cdot 0{,}5}{5} = \frac{0{,}5+1{,}5}{5} = \underline{\underline{\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%}}$$

Oppgave 5

a) Vi skal ha en lineær modell på formen $f(x) = ax + b$.

$$a = \frac{6000-4000}{50} = \frac{2000}{50} = 40$$

$$b = 4000$$

så

$$\underline{\underline{f(x) = 40x + 4000}}$$

b)

$$f(x) = 10000$$
$$40x + 4000 = 10000$$
$$40x = 10000 - 4000$$
$$x = \frac{6000}{40}$$
$$x = 150$$

<u>I følge modellen vil det gå 150 dager fra 1.januar 2021 før 10 000 er smittet.</u>

Oppgave 6

a) Deler figuren inn i ulike deler:
- To horn, der hvert horn består av like mange sirkler som figurnummeret.
- To ben, der hvert ben består av like mange sirkler som figurnummeret
- Hode, som er et kvadrat der sidelengden er én større en figurnummeret.
- Kropp + hale, som blir et rektangel der grunnlinjen er to større enn figurnummeret og høyden er én større enn figurnummeret.
(Hodet og kroppen har på en måte én sirkel felles. Når vi tar bort hodet, kan vi flytte halen frem, slik at vi likevel har rektangel.)

Finner antall sirkler i horn, ben, hode og kropp + hale i figur 5:

$$2\cdot 5 + 2\cdot 5 + 6\cdot 6 + 7\cdot 6 = 10 + 10 + 36 + 42 = 98$$

<u>Det vil være 98 små sirkler i figur 5.</u>

b) Bruker resonnementet mitt og utregningen fra a), men erstatter 5 med *n*.

$$2\cdot n + 2\cdot n + (n+1)(n+1) + (n+2)(n+1) = 4n + n^2 + n + n + 1 + n^2 + n + 2n + 2 = 2n^2 + 9n + 3$$

Antall små sirkler i figur *n* er gitt ved $F_n = \underline{\underline{2n^2 + 9n + 3}}$

Del 2

Oppgave 1

Vekstfaktor for prisendring i butikk A er $\frac{184}{160} = 1{,}15$, som er vekstfaktor ved 15% økning.

Vekstfaktor for prisendring i butikk B er $\frac{153}{180} = 0{,}85$, som er vekstfaktor ved 15 % nedgang.

Prisen har altså økt med like mange prosent i butikk A som den har gått ned med i butikk B. <u>Som skulle vises</u>.

Oppgave 2

Vekstfaktoren ved halvering (nedgang på 50 %), er 0,5.

Løser likningen $100 \cdot 0{,}5^x = 10$ for å bestemme antall halveringer.

Løser i CAS:

	CAS
1	100*0.5^x=10,x=1 NLøs: $\{x = 3.322\}$
2	Antall halveringer multiplisert med halveringstiden:
3	$3.321928094887 * 4.47 * 10^9$ ≈ **14849018584.14**
4	Standardform(14849018584.14) ≈ $\mathbf{1.48490185841400 \cdot 10^{10}}$

<u>100 gram Uran-238 er redusert til 10 gram i løpet av $1{,}48 \cdot 10^{10}$ år</u>

Kommentar:
Hvis man ikke bruker CAS her, kan man fint løse likningen i rad 1 grafisk og så gjennomføre multiplikasjonen i rad 3 på en kalkulator.

Oppgave 3

a)

$$x \cdot 1{,}03^5 = 4100000$$

$$x = \frac{4100000}{1{,}03^5}$$

$$x = 3536696$$

<u>Huset var verdt omtrent 3,5 millioner kroner da Birthe og Emil kjøpte det.</u>

b)

$$4100000 \cdot x^5 = 5100000$$

$$x^5 = \frac{5100000}{4100000}$$

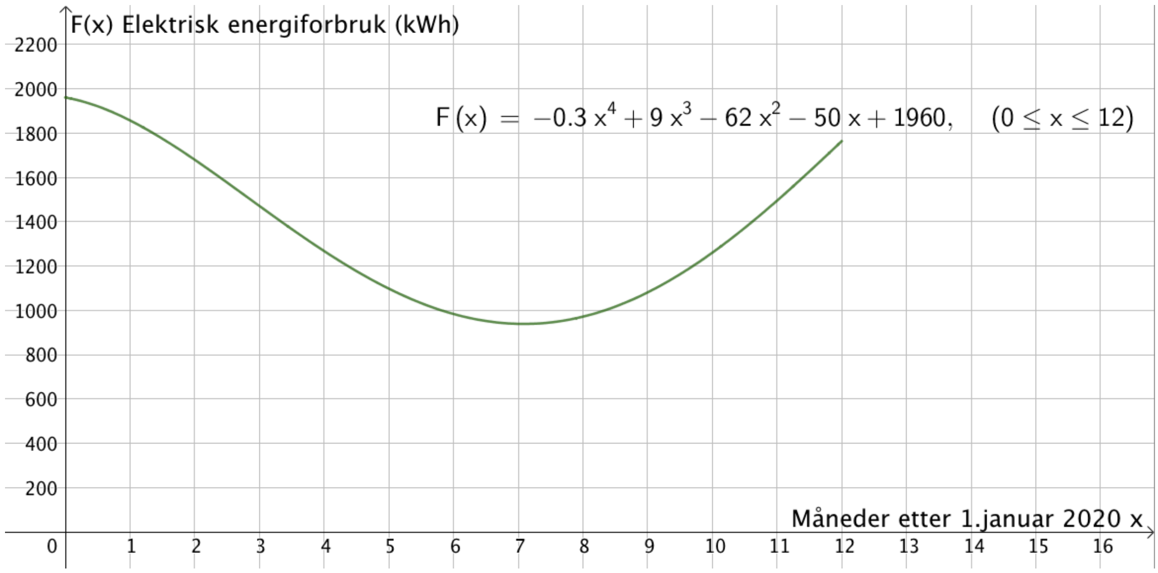
$$x = \sqrt[5]{\frac{51}{41}}$$

$$x = 1{,}045$$

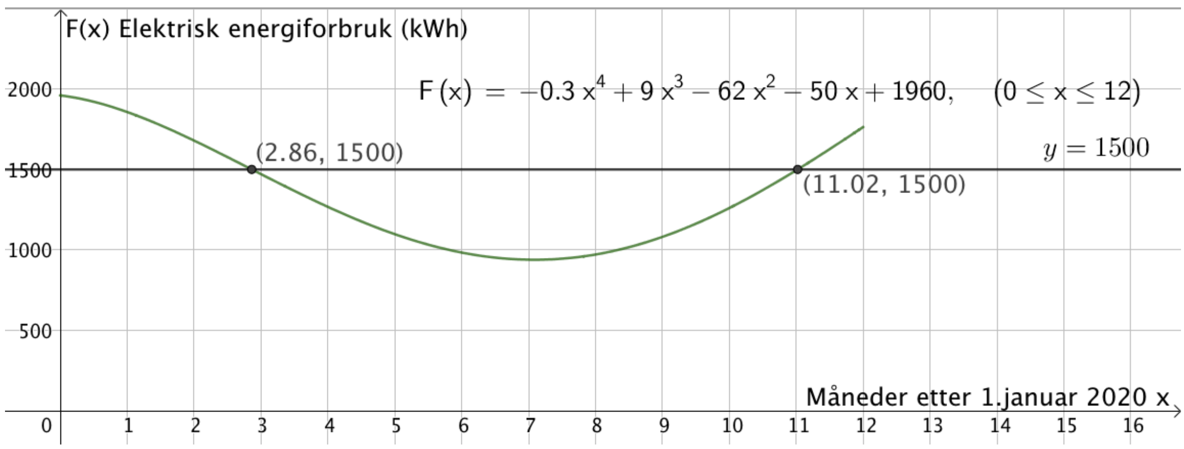
Verdien øker med 4,5% per år de neste fem årene om Emil har rett.

Oppgave 4

a)

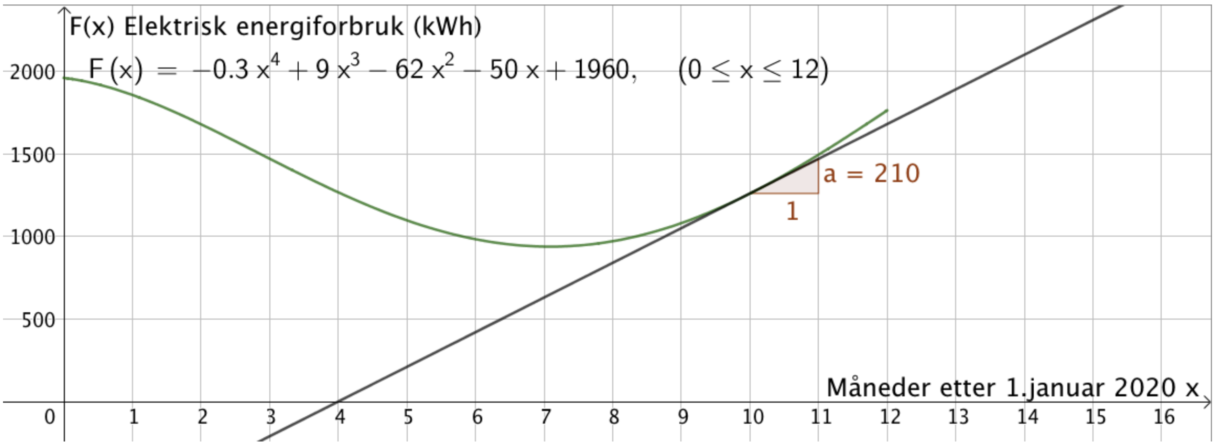


b) Tegner linja $y = 1500$ og finner skjæringspunktet mellom denne og grafen til F ved hjelp av *skjæring mellom to objekt.*



I følge modellen var forbruket lavere enn 1500 kWh per måned fra slutten av mars til månedsskiftet november/desember.

c) Bruker kommandoen *" Tangent(<x-verdi>, <Funksjon>)"* til å tegne tangenten i punktet $\left(10, F(10)\right)$, og bestemmer stigningstallet til denne tangenten ved hjelp av *stigning*.



<u>Den momentane vekstfarten er 210 kWh per måned per måned når $x = 10$.</u>

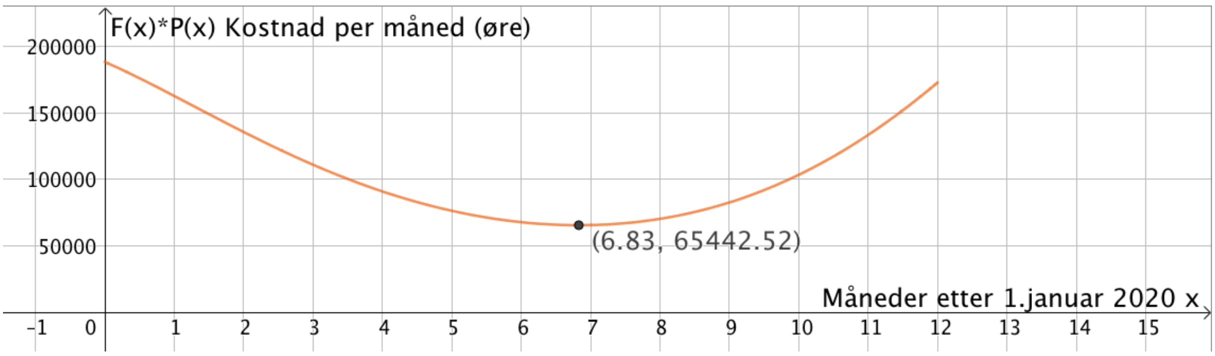
Det betyr at det månedlige elektriske energiforbruket øker med 210 kWh per måned den 1.november 2020.

d) Totalprisen for en vare er gitt ved enhetspris multiplisert med antall enheter. Dette kan illustreres greit ved å multiplisere enhetene størrelsene er oppgitt i.

$$kWh \cdot \frac{øre}{kWh} = øre\,.$$

Vi ser altså at vi vil ende opp med den totale prisen, i øre, når vi multipliserer forbruket i *kWh* med enhetsprisen som er oppgitt i *øre/kWh.*
Siden funksjonen *P* viser *gjennomsnittlig* enhetspris, vil også $F(x) \cdot P(x)$ vise *gjennomsnittlig* totalpris per måned.

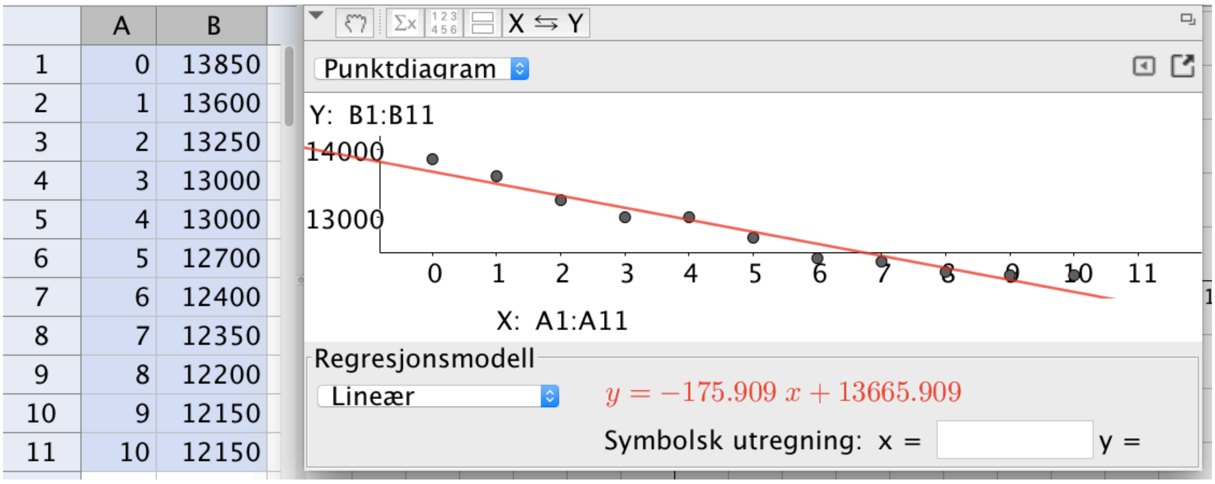
e) Skriver først inn funksjonsuttrykket til *P* i GeoGebra, før jeg skriver inn $F \cdot P$, og tegner grafen til dette produktet. (Skjuler de "individuelle" grafene til *F* og *P*).
Bestemmer så bunnpunktet på grafen ved hjelp av kommandoen
" Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)".



<u>De gjennomsnittlige energikostnadene for boligen er lavest i juli.</u>

Oppgave 5

a) Lar x være antall år etter 2008.
Leser av så nøyaktige verdier jeg klarer fra diagrammet, og fyller inn sammen med tilhørende x verdier i regnearket i GeoGebra.
Gjennomfører regresjonsanalyse og velger lineær modell.
Kaller modellen for $K(x)$.



	A	B
1	0	13850
2	1	13600
3	2	13250
4	3	13000
5	4	13000
6	5	12700
7	6	12400
8	7	12350
9	8	12200
10	9	12150
11	10	12150

$$\underline{\underline{K(x) = -176x + 13666}}$$

Stigningstallet -176 forteller at den gjennomsnittlige kjørelengden for personbiler har avtatt med 176 km per år i gjennomsnitt i perioden 2008-2018, i følge vår modell.

Konstantleddet 13666 forteller at gjennomsnittlig kjørelengde per år skulle vært 13 666 km i 2008, dersom modellen vår skulle passet med virkeligheten.

(Vi ser at den i realiteten var lavere, men vi ser også at gjennomsnittlig kjørelengde per år avtok raskere i starten enn det gjennomsnittet modellen gir over hele perioden).

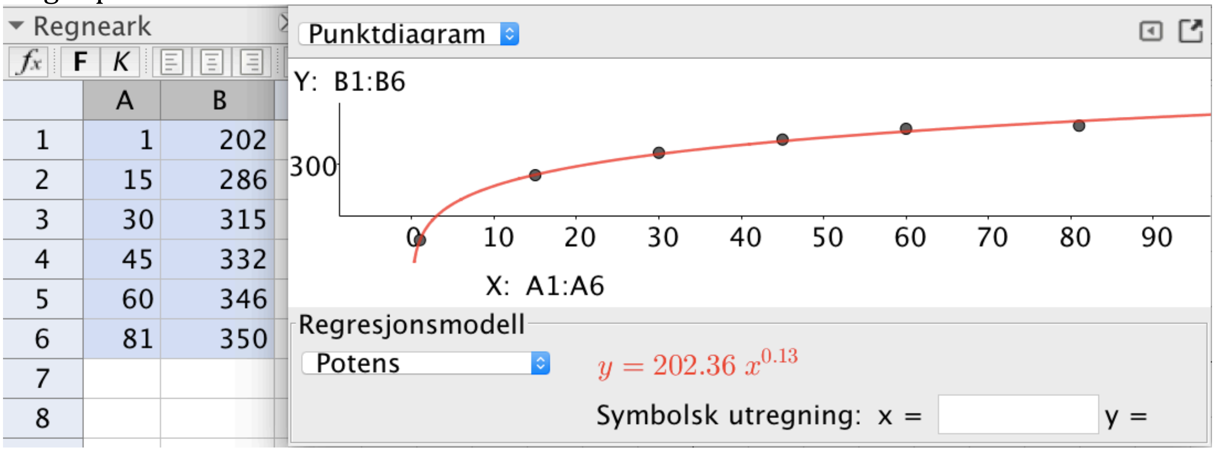
b) Når vi ser på diagrammet, ser det ut til at årlig kjørelengde "flater" ut mot slutten av perioden 2008-2018, noe som taler for at modellen ikke vil være gyldig i lang tid etter 2018.

Om vi ser på hvor lenge den vil kunne være gyldig sånn rent praktisk, vet vi at kjørelengden aldri kan bli mindre enn null.
$\frac{13666}{176} \approx 77{,}6$, så modellen vil i alle tilfeller ikke kunne være gyldig lenger enn til midten av 2085.

c) Når samlet kjørelengde for alle biler i Norge øker, samtidig som gjennomsnittlig kjørelengde per bil avtar, må det være slik at *antallet* personbiler øker.
Dersom en familie skaffer en "bil nummer to", vil den totale kjørelengden kunne øke, selv om hver av bilene brukes mindre hver for seg enn det "bil nummer 1" ble brukt før anskaffelsen av nummer to.

Oppgave 6

a) Legger dataene inn i regnearket i GeoGebra, gjennomfører regresjonsanalyse og velger potensmodell.



Ser at modellen $S(x) = 202 \cdot x^{0,13}$, der $x \geq 1$ er en god modell for antall sildemåker på øya *x* dager etter 30.april 2020.

(Grunnen til at vi har $x \geq 1$, er at registreringen startet 1.mai, som er én dag etter 30.april).

b) 5.juli er 66 dager etter 30.april, så det tilsvarer $x = 66$.

$$S(66) = 202 \cdot 66^{0,13} = 348,25 \approx 348$$

<u>I følge modellen var det 348 sildemåker på øya 5.juli 2020.</u>

c) $S(150) = 202 \cdot 150^{0,13} = \underline{\underline{387,47 \approx 387}}$

$S(150)$ gir antallet sildemåker 27.september 2020 i følge modellen.
Siden mange sildemåker flyr sørover i august, er det lite sannsynlig at antallet vil være 387 sent i september. Særlig når antallet er 350 den 20.juli, som er sent i perioden antallet ble registrert i – og man vil muligens kunne anta at de aller fleste sildemåkene som skulle komme til øya har ankommet innen denne datoen når vi vet at de første ankommer allerede mars.

Oppgave 7

a) De første 15 fibonaccitallene

	A	B
1	Nummerering	Fibonaccitallene
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	4	3
6	5	5
7	6	8
8	7	13
9	8	21
10	9	34
11	10	55
12	11	89
13	12	144
14	13	233
15	14	377
16	15	610

Formler:

	A	B
1	Nummerering	Fibonaccitallene
2	1	1
3	2	1
4	3	=B2+B3
5	4	=B3+B4
6	5	=B4+B5
7	6	=B5+B6
8	7	=B6+B7
9	8	=B7+B8
10	9	=B8+B9
11	10	=B9+B10
12	11	=B10+B11
13	12	=B11+B12
14	13	=B12+B13
15	14	=B13+B14
16	15	=B14+B15

b) Sjekker først Ane sin påstand.
NB! I kolonne *C* har vi *n* fra og med 1 til og med 15, mens i kolonne *D* har vi *n* fra og med 1 til og med 13.

	A	B	C	D
1	Nummerering	Fibonaccitallene	Sum av de n første fibonaccitallene	Differanse mellom tall n+2 og summen av de n første
2	1	1	1	1
3	2	1	2	1
4	3	2	4	1
5	4	3	7	1
6	5	5	12	1
7	6	8	20	1
8	7	13	33	1
9	8	21	54	1
10	9	34	88	1
11	10	55	143	1
12	11	89	232	1
13	12	144	376	1
14	13	233	609	1
15	14	377	986	
16	15	610	1596	
17				

Formler:

	A	B	C	D
1	Nummerering	Fibonaccitallene	Sum av de n første fibonaccitallene	Differanse mellom tall n+2 og summen av de n første
2	1	1	1	=B4-C2
3	2	1	=C2+B3	=B5-C3
4	3	=B2+B3	=C3+B4	=B6-C4
5	4	=B3+B4	=C4+B5	=B7-C5
6	5	=B4+B5	=C5+B6	=B8-C6
7	6	=B5+B6	=C6+B7	=B9-C7
8	7	=B6+B7	=C7+B8	=B10-C8
9	8	=B7+B8	=C8+B9	=B11-C9
10	9	=B8+B9	=C9+B10	=B12-C10
11	10	=B9+B10	=C10+B11	=B13-C11
12	11	=B10+B11	=C11+B12	=B14-C12
13	12	=B11+B12	=C12+B13	=B15-C13
14	13	=B12+B13	=C13+B14	=B16-C14
15	14	=B13+B14	=C14+B15	
16	15	=B14+B15	=C15+B16	
17				
18				

<u>Det kan se ut som at Ane sin påstand stemmer</u>.

Sjekker ut Trine sin påstand.

	A	B	C	D
1	Nummerering	Fibonaccitallene	Sum av annenhvert tall starter på tall 1	Sum av annenhvert tall starter på tall 2
2	1	1	1	
3	2	1		1
4	3	2	3	
5	4	3		4
6	5	5	8	
7	6	8		12
8	7	13	21	
9	8	21		33
10	9	34	55	
11	10	55		88
12	11	89	144	
13	12	144		232
14	13	233	377	
15	14	377		465
16	15	610	987	
17				

Formler:

	A	B	C	D
1	Nummerering	Fibonaccitallene	Sum av annenhvert tall starter på tall 1	Sum av annenhvert tall starter på tall 2
2	1	1	=B2	
3	2	1		=B3
4	3	=B2+B3	=C2+B4	
5	4	=B3+B4		=D3+B5
6	5	=B4+B5	=C4+B6	
7	6	=B5+B6		=D5+B7
8	7	=B6+B7	=C6+B8	
9	8	=B7+B8		=D7+B9
10	9	=B8+B9	=C8+B10	
11	10	=B9+B10		=D9+B11
12	11	=B10+B11	=C10+B12	
13	12	=B11+B12		=D11+B13
14	13	=B12+B13	=C12+B14	
15	14	=B13+B14		=D13+B14
16	15	=B14+B15	=C14+B16	
17				

Det ser ut til at Trine sin påstand også kan stemme, gitt at man starter med fibonaccitall nummer 1.

Oppgave 8

a) Lager en liste med rådataene i GeoGebra, og finner gjennomsnitt og standardavvik ved hjelp av kommandoene *" Gjennomsnitt(<Liste med rådata>)"* og *" Standardavvik(<Liste med rådata>)"*.

Liste

$L_1 = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6\}$

Tall

Gjennomsnitt = 2.1

Standardavvik = 1.5

<u>Gjennomsnittet er 2,1 søsken og standardavviket er 1,5 søsken.</u>

b) $2,1-1,5=0,6$ og $2,1+1,5=3,6$, så 22 av dataverdiene ligger mindre enn ett standardavvik fra gjennomsnittet.

$\frac{22}{30} \approx 73\%$

$2,1-2\cdot 1,5=2,1-3=-0,9$ og $2,1+2\cdot 1,5=2,1+3=5,3$, så 29 av dataverdiene ligger mindre enn to standardavvik fra gjennomsnittet

$\frac{29}{30} \approx 97\%$

$2,1+3\cdot 1,5=2,1+4,5=6,6$, så alle de 30 verdiene ligger mindre enn tre standardavvik fra gjennomsnittet.

$\frac{30}{30} = 100\%$

Mindre enn ett standardavvik fra gjennomsnittet	73 %
Mindre enn to standardavvik fra gjennomsnittet	97 %
Mindre enn tre standardavvik fra gjennomsnittet	100 %

c) Nei, dette er ikke mulig.
Dersom spredningen er stor, vil også standardavviket bli stort.
Det vil derfor alltid være en viss andel som ligger innenfor ett standardavvik fra gjennomsnittet.