2P Eksamen H2021 Løsningsforslag

Farhan Omar

December 3, 2021

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (5 poeng)

1 a)

Datamaterialet sortert i stigende rekkefølge:

$$0,\ 0,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 9$$

Dager	Frekvens	Dager*Frekvens	Kumulativ frekvens
0	2	0	2
4	3	12	$2+3=5$
5	2	10	$2+3+2=7$
7	2	14	$2+3+2+2=9$
9	1	9	$2+3+2+2+1=10$
Sum	10	45	

Fra tabellen ser vi at:

$$Median = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$Gjennomsnitt = \frac{45}{10} = 4,5$$

$$Typetall = 4$$

$$Variasjonsbredde = 9 - 0 = 9$$

1 b)

Fra tabellen ovenfor ser vi at: Kumulativ frekvens for 5=7

Oppgave 2 (5 poeng)

2 a)

Vi lager tabellen nedenfor utfra opplysningene i oppgaveteksten

Minutter x	Antall elver f	Klassemidtpunkt x_m	Kumulativ frekvens	$x_m \cdot f$	$\frac{frekvens}{klassebredede}$
$[0, 10)$	20	$\frac{0+10}{2} = \frac{10}{2} = 5$	20	$5 \cdot 20 = 100$	$\frac{20}{10} = 2$
$[10, 20)$	50	$\frac{10+20}{2} = \frac{30}{2} = 15$	20+50=70	$15 \cdot 50 = 750$	$\frac{50}{10} = 5$
$[20, 40)$	20	$\frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$	70+20=90	$30 \cdot 20 = 600$	$\frac{20}{20} = 1$
$[40, 80)$	10	$\frac{40+80}{2} = \frac{120}{2} = 60$	90+10=100	$60 \cdot 10 = 600$	$\frac{10}{40} = 0.25$
Sum	100			2050	

$$Gjennomsnitt = \frac{2050}{100} = 20,5$$

2 b)

Median nummer $= \frac{100+1}{2} = 50,5$ så median ligger i klassen $[10, 20)$ fordi denne klassen har kummulativ frekvens 70 som er den første som er større enn median nummer.

2 c)

vi lager histogram ved å bruke data fra tabellen ovenfor. Vi setter verdiene av $\frac{frekvens}{klassebredede}$ på $y - aksen$ og klassegrensene på $x - aksen$

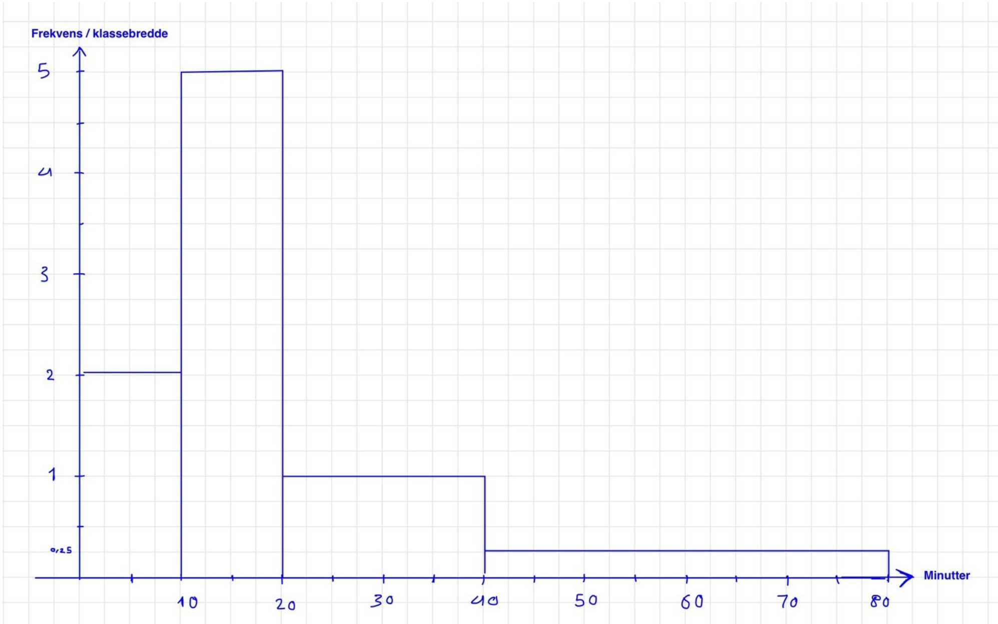

Figure 1

Oppgave 3 (3 poeng)

3 a)

Han har rett fordi

$$8^5 = (2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$$

$$\begin{aligned} 8^2 &= 8 \cdot 8 = 64 \\ 2^{15} &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2^9 = 8 \cdot 8 \cdot 2^9 = 64 \cdot 2^9 > 64 \end{aligned}$$

3 b)

$$3^{10} = 3^{2 \cdot 5} = (3^2)^5 = 9^5 > 8^5$$

$3^{10} = 9^5$ er størst siden den har størst grunntall når eksponentene er like. Man kan også regne begge to for å komme til samme konklusjon.

Oppgave 4 (2 poeng)

Vi har at Ny verdi (slutt verdi) (N)er lik gammel verdi (eller start verdi)(G) ganget vekstfaktor opphøyd i antall perioder.

$$N(n) = G \cdot V^n$$

Irene: Hvis verdien vokser med $1,5$ % per år da blir vekstfaktor i løpet av 10 år

$$(1 + \frac{1,5}{100})^{10} = 1,015^{10} \neq 1,15$$

så denne påstanden er ikke riktig.

Gro: Påstanden er riktig fordi vekstfaktor i løpet av 10 år i følge modellen er V^{10} og ifølge opplysninger dette skal være like $1 + \frac{15}{100} = 1,15$ så vi kan finne vekstfaktor per år ved å løse $V^{10} = 1,15$.

Andrea: Som argumentert tidligere trenger man ikke startverdi for finne økning i en verdi. Det er nok å ha økning i løpet av et vist antall år for å finne vekstfaktor per år.

Oppgave 5 (3 poeng)

5 a)

Vi setter 1.januar2021 som null året (t=0) så har vi:

$$f(0) = 4000$$
$$f(50) = 6000$$

Dermed har vi to punkter $(0, 4000)$, $(50, 6000)$

Ettpunktformel er gitt ved:

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6000 - 4000}{50 - 0} = \frac{2000}{50} = 40$$
$$y - 4000 = 50(x - 0) \Leftrightarrow y = 50x + 4000 \Leftrightarrow f(x) = 40x + 4000$$

5 b)

Vi må løse ligningen,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 10000 \\
40x + 4000 &= 10000 \\
40x &= 10000 - 4000 \\
40x &= 6000 \\
x &= \frac{6000}{40} = 150
\end{aligned}
$$

Oppgave 6 (5 poeng)

6 a)

Fra figurene kan vi lage nedenfor tabell:

figur no.	1	2	3	4	5	n
Kropp	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	$(n+1)^2$
Hode	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	$(n+1)^2$
Ørene	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot n$
Bein	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot n$
Hale	1	1	1	1	1	1
Framkropp	1	2	3	4	5	n
Sum	14	29	48	71	98	$2 \cdot (n+1)^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 1 + n$

Fra tabellen kan vi lage figur nummer 5

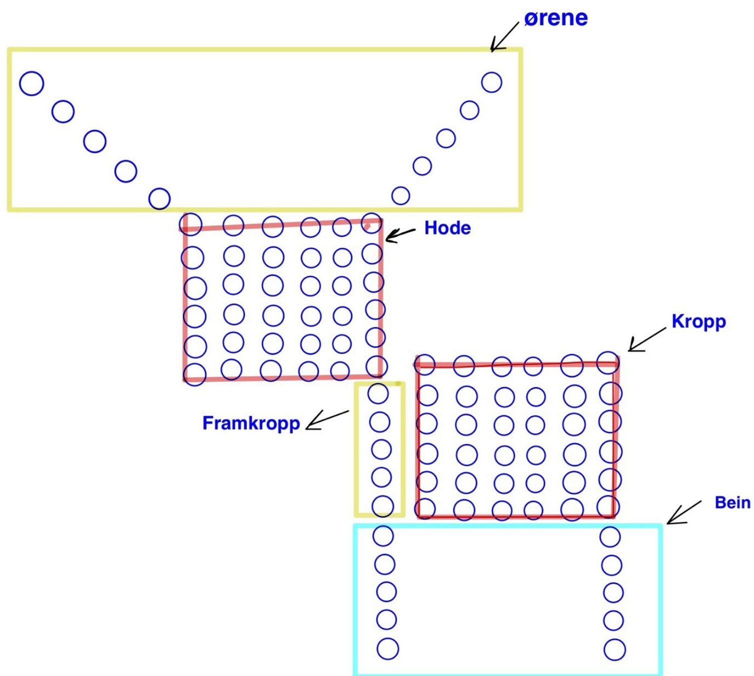

Figure 2

6 b)

Fra tabellen vi lagde i a) er antall sirkler i figur nummer n gitt ved:

$$
\begin{aligned}
f(n) &= 2 \cdot (n+1)^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 1 + n = 2(n^2 + 2n + 1) + 2n + n + 1 \\
&= 2n^2 + 4n + 2 + 2n + 2n + n + 1 = 2n^2 + 9n + 3
\end{aligned}
$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

Vi bruker Geogebra og finner ut at begge to er 15 %.

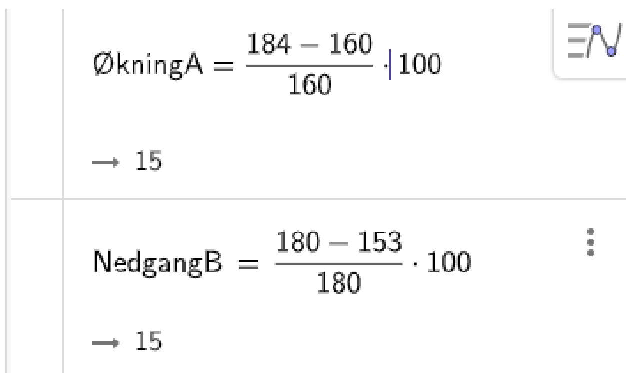

Figure 3: Oppgave 1 Del 2

$\cancel{G}$

Oppgave 2 (2 poeng)

Først finner vi vekstfaktor ved å bruke at

$$\begin{aligned} N &= G \cdot V^n \\ N = \frac{1}{2} \cdot G \quad \text{når} \quad n &= 4,47 \\ \frac{1}{2} \cdot G &= G \cdot V^n \\ \frac{1}{2} \cdot \cancel{G} &= \cancel{G} \cdot V^{4,47} \end{aligned}$$

da får vi vite at vekstfaktor er $v = 0.86$. Nå kan vi finn antall år det tar for at 100 g nedbryter til 10 g ved å løse $N(n) = 10$ med $G = 100$, $v = 0,86$ og finner $n = 15,27$ milliarder år. I standardform er vist i rad 4 i figuren nedenfor,

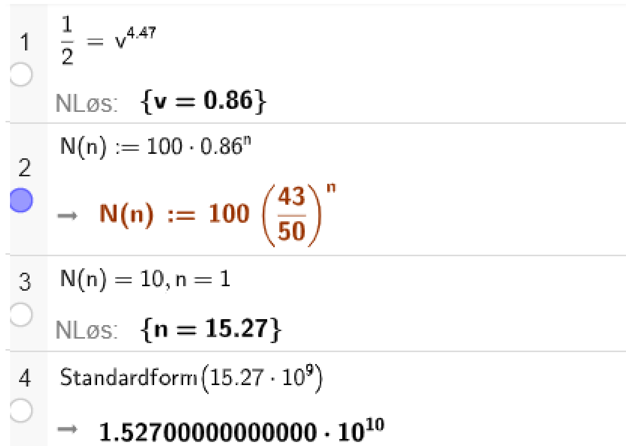

Figure 4

Oppgave 3 (4 poeng)

3 a)

La husverdien for 5 år siden være G millioner kroner så kan vi bruke Cas for ån finne den (Eksponentiell vekst over flere perioder formel)

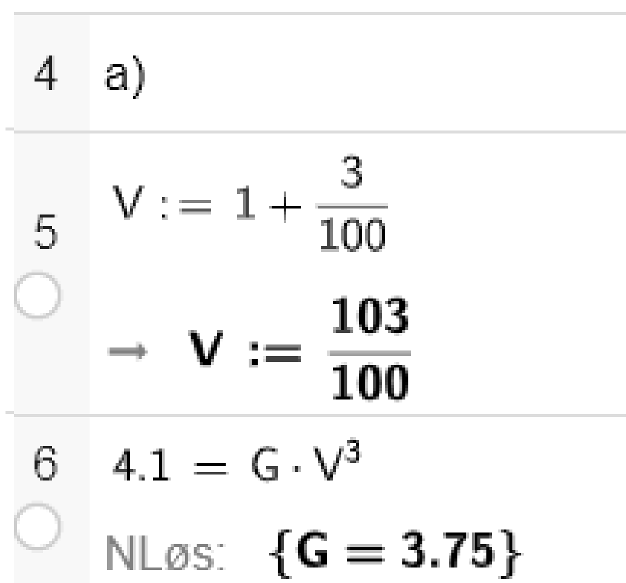

Figure 5

3 b)

Først finner vi vekstfaktor ved å bruke at $N = G \cdot V^n$ med $N = 5,1$, $G = 4,1$, $n = 5$ og så får vi at økning blir 4,5 % hvert år.

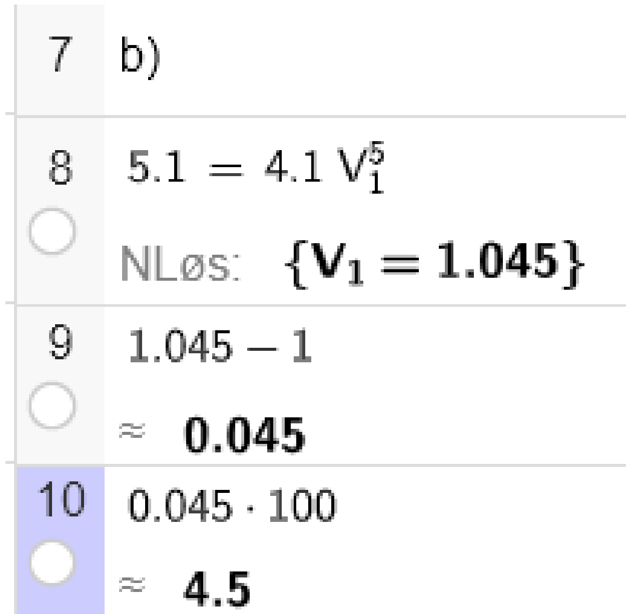

Figure 6

Oppgave 4 (8 poeng)

4 a)

vi bruker Geogebra med algebra felt og får grafen nedenfor

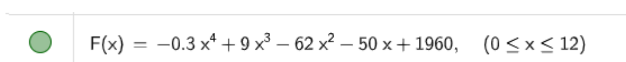

Figure 7

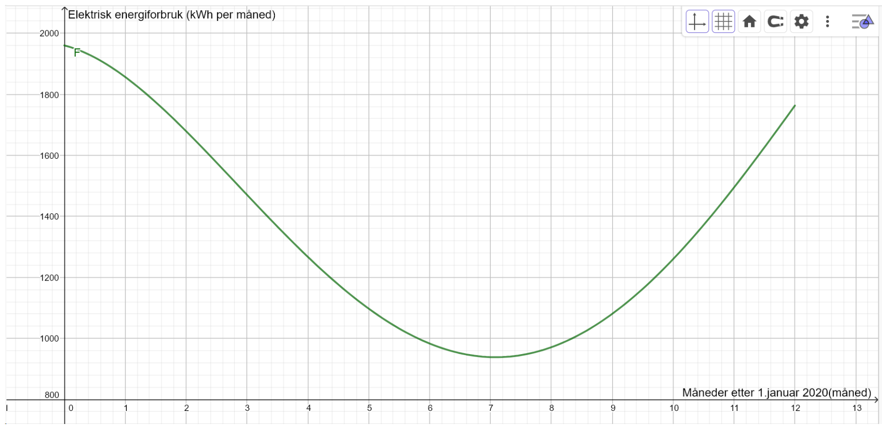

Figure 8

4 b)

Siden Geogebra klarer ikke å løse ulikheten $F(x) > 1500$ så må vi bruke grafisk løsning istedenfor. Fra Geogebra utklippene nedenforfinner vi at energiforbruket er større enn 1500 kWh mellom 0 og 2,86 måneder etter 1.januar (januar, februar, mars) og igjen fra 11 til 12 måneder etter etter 1.januar (november ,desember) .

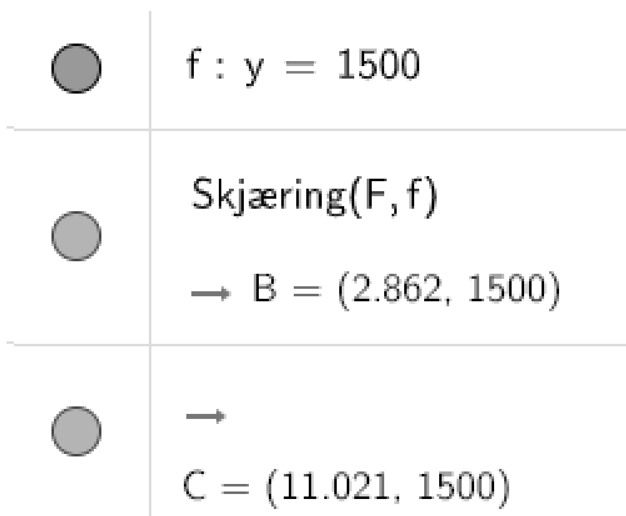

Figure 9

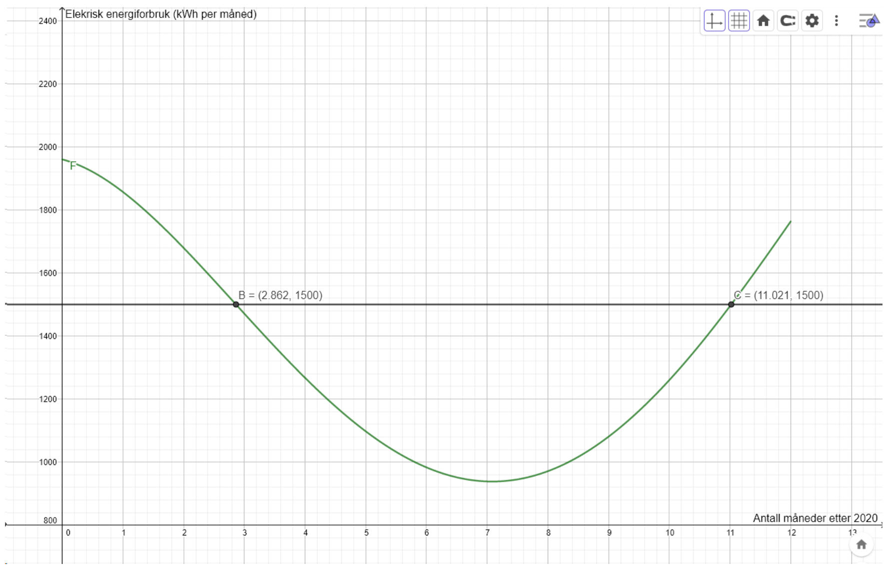

Figure 10

4 c)

Den momentane vekstfarten er stigningstallet til tangenten til grafen i punktet som er 120. Så 10 måneder etter 1.januar 2020 (1.november 2020) er energiforbruket i ferd med øke med 120 kWh per måned per måned. Vi brukte Geogebra ,

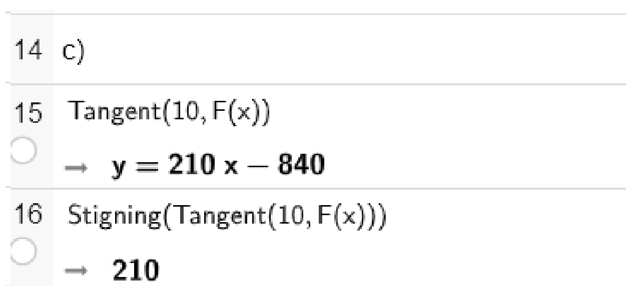

Figure 11

4 d)

Vi har at energiforbruket F(x) målt i kWh/måned og pris P(x) er målt i øre/kWh og når vi ganger dem sammen får vi kostnad.

$$F(x) \cdot P(x) = \frac{kWh}{\text{måned}} \cdot \frac{\text{øre}}{kWh} = \frac{\text{øre}}{\text{måned}}$$

4 e)

Vi definerer en ny funksjon for kostnad K(x) , så kan vi bruke kommandoen ekstremalpunkt i Cas for å finne minimumspunktet . Energikostnaden er minst omtrent $6,83 \approx 7$ måneder etter 1.januar 2020 (i juli).

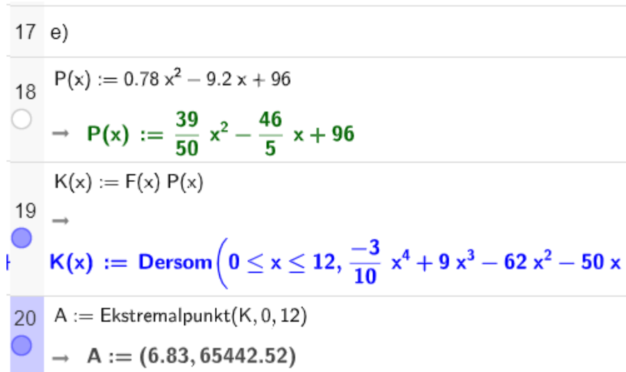

Figure 12

Eller kan vi finne det grafisk ved å bruke bokstaven A fra menyen til algebrafelt i Geogebra så markere minimumpunktet på grafen da får vi punktet B som er noenlunde mindre nøyaktig .

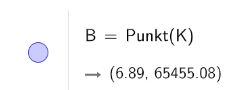

Figure 13

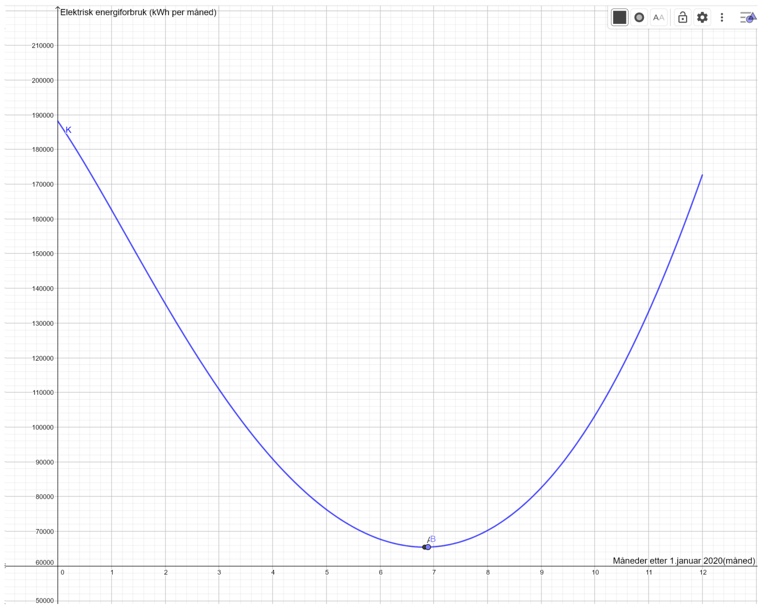

Figure 14

Oppgave 5 (5 poeng)

5 a)

Vi lar 2008 være null året så lager vi liste av punkter i regneark i Geogebra så bruker vi kommando RegLin (Liste med punkter) for å finne lineær modell.. Modellen blir

$$f(x) = -175,91x + 13665,91$$

- stigningstallet er $-175,91$: betyr at gjennomsnittlig årlig kjørelengde minker med $175,91km$ per år
- Konstantleddet er $13665,91$: betyr i 2008 som er startåret for måling var gjennomsnittlig årlig kjørelengde på $13665,91$

	A	B
1	År (x)	Kilometer
2	0	13850
3	1	13600
4	2	13250
5	3	13000
6	4	13000
7	5	12700
8	6	12400
9	7	12350
10	8	12200
11	9	12150
12	10	12150

Figure 15

l1 = {A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K}

→ {(0, 13850), (1, 13600), (2, 13250), (3, 13000), (4, 13000), (5, 12700), (6, 12400), (7, 12350), (8, 12200), (9, 12150), (10, 12150)}

f : RegLin(l1)

→ y = -175.91x + 13665.91

Figure 16

Eller man kan velge to passende punkter for å finne linjen.

1 Linje((1, 13600), (8, 12200))

$\rightarrow \quad y = -200\,x + 13800$

Figure 17

5 b)

Gyldighetsområdet er fra 2008 til 2018 der vi har data . Før 2008 og etter 2018 er det ikke sikkert at modellen kan gi riktig trend.

5 c)

Vi har denne definisjon for gjennomsnitt

$$\bar{X} = \frac{\sum_i x_i}{n} \Leftrightarrow n = \frac{\sum_i x_i}{\bar{X}}$$

Vi lager denne tabellen fra opplysninger i oppgaven

	A	B	C	D
1	År	Gjennomsnittlig årlig kjørelengde (Km)	Samlet Kjørelengde (millioner Km)	Antall biler (millioner)
2	0	13850	32700	2.361
3	1	13600	32600	2.397
4	2	13250	32800	2.433
5	3	13000	33000	2.469
6	4	13000	33900	2.505
7	5	12700	34000	2.541
8	6	12400	33900	2.577
9	7	12350	34300	2.613
10	8	12200	34900	2.649
11	9	12150	35400	2.685
12	10	12150	36000	2.721
13				

Figure 18

Fra tabellen ser vi at antall biler øker fra et år til et annet år og dette fører til at gjennomsnittlig årlig kjørelengde per personbil går ned hvert år.

Oppgave 6 (5 poeng)

6 a)

Vi lager liste med punkter i regneark i Geogebra, så bruker vi kommando RegPot(list med punkter) for å finne modellen (potens modell). Se Geogebra utklipp nedenfor,

	A	B
1	Dager etter 30-april	Antall sildemåker
2	1	202
3	15	286
4	30	315
5	45	332
6	60	346
7	81	350

Figure 19

l1 = {A, B, C, D, E, F}

→ {(1, 202), (15, 286), (30, 315), (45, 332), (60, 346), (81, 350)}

S(x) = RegPot(l1)

→ $202.36\, x^{0.13}$

Figure 20

6 b)

Mai har 31 dager mens juni har 30 dager så totall antall dager etter 30 april er $31+30+5 = 66$. Vi finner $S(66)$ via Geogebra og da antall måker blir 347

a = S(66)

→ 346.77

Figure 21

6 c)

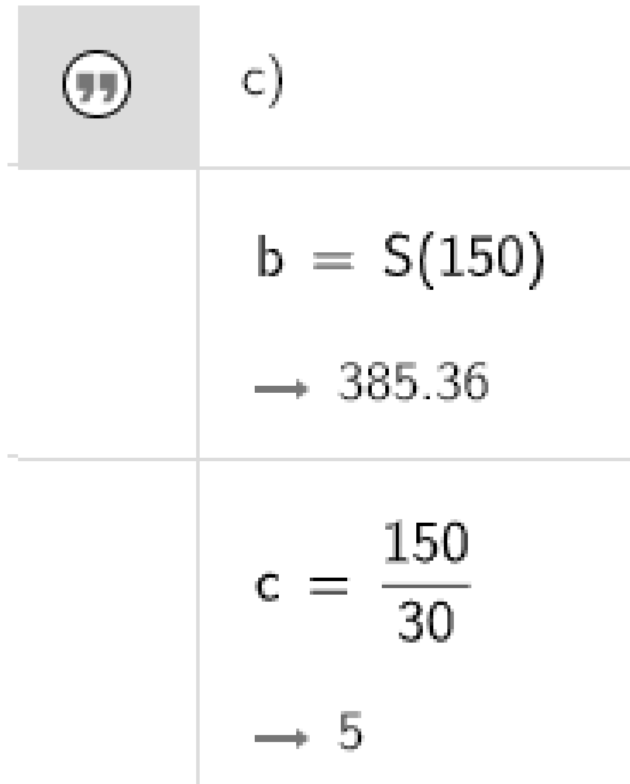

Figure 22

Fra Geogebra utklipp ser vi at 150 dager etter 30.april er 5 måneder så er vi i september og ut fra opplysningene oppgaveteksten begynner måkene å reise vekk i august men modellen viser økning i antall måker i september så modellen er ikke gyldig etter juli.

Oppgave 7 (4 poeng)

7 a)

Vi bruker Excel og får

	A
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	

(a)

	A
1	1
2	1
3	=A2+A1
4	=A3+A2
5	=A4+A3
6	=A5+A4
7	=A6+A5
8	=A7+A6
9	=A8+A7
10	=A9+A8
11	=A10+A9
12	=A11+A10
13	=A12+A11
14	=A13+A12
15	=A14+A13

(b) Med formler

7 b)

Vi bruker Excel og får

	A	B	C	D	E
1	fib-tall nummer	Fib-tall	Sum av de n-første Fib-tallene	Ane påstand	Trine påstand
2	1	1	1	1	1
3	2	1	2	2	
4	3	2	4	4	
5	4	3	7	7	3
6	5	5	12	12	
7	6	8	20	20	8
8	7	13	33	33	
9	8	21	54	54	21
10	9	34	88	88	
11	10	55	143	143	55
12	11	89	232	232	
13	12	144	376	376	144
14	13	233	609	609	
15	14	377	986		377
16	15	610	1596		
17					

Figure 24

	A	B	C	D	E
1	fib-tall nummer	Fib-tall	Sum av de n-første Fib-tallene	Ane påstand	Trine påstand
2	1	1	=SUMMER(B2)	=B4-1	=B2
3	2	1	=C2+B3	=B5-1	
4	3	=B3+B2	=C3+B4	=B6-1	
5	4	=B4+B3	=C4+B5	=B7-1	=B2+B4
6	5	=B5+B4	=C5+B6	=B8-1	
7	6	=B6+B5	=C6+B7	=B9-1	=SUMMER(B2;B4;B6)
8	7	=B7+B6	=C7+B8	=B10-1	
9	8	=B8+B7	=C8+B9	=B11-1	=E7+B8
10	9	=B9+B8	=C9+B10	=B12-1	
11	10	=B10+B9	=C10+B11	=B13-1	=E9+B10
12	11	=B11+B10	=C11+B12	=B14-1	
13	12	=B12+B11	=C12+B13	=B15-1	=E11+B12
14	13	=B13+B12	=C13+B14	=B16-1	
15	14	=B14+B13	=C14+B15		=E13+B14
16	15	=B15+B14	=C15+B16		

Figure 25

Fra tabellen ser vi at Ane påstand er riktig og Trine påstand er også riktig men da må vi starte summeringen fra første fib-tall og ikke fra hvor som helst.

Oppgave 8 (6 poeng)

8 a)

Vi lager to lister L1 med verdier og L2 med tilsvarende frekvenser så bruker vi Geogebra algebra felt og finner ut at gjennomsnitt er $2,1$ og standardavvik er $1,513$.

$L1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$L2 = \{3, 10, 7, 5, 2, 2, 1\}$

$a = \text{gsnitt}(L1, L2)$

$\rightarrow 2.1$

$c = \text{stavvp}(L1, L2)$

$\rightarrow 1.513$

Figure 26

8 b)

For at en verdi skal ligge et standardavvik fra gjennomsnitt må denne verdien tilfredsstille betingelsen

$$(gjennomsnitt - standardavvik) < Verdi < (gjennomsnitt + standardavvik)$$

Se på talllinjen som viser dette,

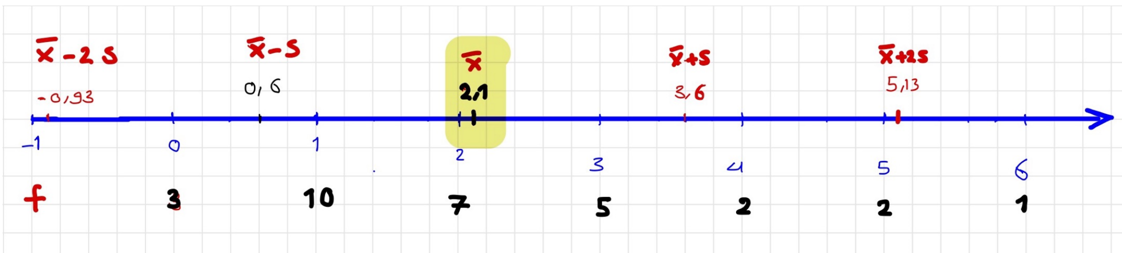

Figure 27

Vi kan gjøre dette i Geogebra ved å sjekke listen L1 mot den betingelsen og får et logisk liste med enten 0 som betyr at betingelsen er ikke tilfredsstilt eller 1 som betyr at betingelsen er tilfredsstilt. Så legger vi frekvensene til verdiene som tilfredsstiller betingelsen og deler på antall elever (30) og tilslutt gange med 100 for å få svaret i prosent . Se utklippet fra Geogebra

$b = a + c$

$\longrightarrow$ 3.613

$d = a - c$

$\longrightarrow$ 0.587

$l1 = a - c < L1 < a + c$

$\approx\{0, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$

$f = \frac{10 + 7 + 5}{30} \cdot 100$

≈ 73.333

$l2 = a - 2\,c < L1 < a + 2\,c$

$\approx\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0\}$

$e = \frac{3 + 10 + 7 + 5 + 2 + 2}{30} \cdot 100$

≈ 96.667

$l3 = a - 3\,c < L1 < a + 3\,c$

$\approx\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

$g = \frac{30}{30} \cdot 100$

$\longrightarrow$ 100

$h = a + 2\,c$

$\longrightarrow$ 5.127

$i = a - 2\,c$

$\longrightarrow$ -0.927

Figure 28

Fra Geogebra utklippet ser vi at $73,33\%$ av dataverdiene ligger et standardavvik fra gjennomsnittet, $96,67\%$ av dataverdiene ligger to standardavvik fra gjennomsnittet og 100% av dataverdiene ligger tre standardavvik fra gjennomsnittet

8 c)

Nei, det er ikke mulig . For å ha standardavvik må noen verdier ligger over eller under gjennomsnittet . I tilfellet at alle verdiene er like blir gjennomsnitt lik verdien av en av dataverdiene og standardavviket blir null så i dette tilfellet også vil dataverdiene ligge et standardavvik (0) fra gjennomsnittet. For eksempel 3 ligger på avstand null fra 3.

$$
\begin{aligned}
x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x \\
\Downarrow \\
\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{nx}{n} = x \\
S = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x}) f_i}{n-1}} = \sqrt{\frac{0}{n-1}} = 0 \\
\overline{x} - s < \overline{x} < \overline{x} + s \Rightarrow \overline{x} - 0 < \overline{x} < \overline{x} + 0 \Rightarrow \overline{x} = \overline{x} - 0 = \overline{x} + 0
\end{aligned}
$$

OBS!

Man kan også også si at det er mulig siden når alle dataverdiene er like har vi gjennomsnitt er lik dataverdien og standardavvik lik null . I dette tilfellet vill alle dataverdiene ligge et standardavvik fra gjennomsnitt men ikke mindre enn et standardavvik . For eksempel om alle dataverdiene er 3 så har vi gjennomsnitt=3 og standardavvik=0 og 3 ligger på avstand 0 fra 3 men ikke mindre enn null.