Løsningsforslag eksamen 1T (LK06) – Høst 2021

Del 1

Oppgave 1

$$\frac{6{,}2\cdot 10^7+2{,}5\cdot 10^8}{0{,}000002}=\frac{6{,}2\cdot 10^7+25\cdot 10^7}{2\cdot 10^{-6}}=\frac{31{,}2\cdot 10^7}{2\cdot 10^{-6}}=15{,}6\cdot 10^{7-(-6)}=15{,}6\cdot 10^{13}=\underline{\underline{1{,}56\cdot 10^{14}}}$$

Oppgave 2

$$x^2+2x-8<0$$
$$(x+4)(x-2)<0$$

Grafen til x^2+2x-8 er en parabel som vender den hule siden opp ("smilemunn"). Da ligger grafen under x-aksen mellom nullpunktene.

$$\underline{\underline{x^2+2x-8<0 \text{ når } -4<x<2}}$$

Oppgave 3

Ser at vi kan faktorisere både teller og nevner ved hjelp av kvadratsetningene.

$$\frac{2x^2-2}{x^2-2x+1}=\frac{2(x^2-1)}{(x-1)^2}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2(x+1)}{x-1}=\underline{\underline{\frac{2x+2}{x-1}}}$$

Oppgave 4

Vi har fått to nullpunkter, så kan si at

$$f(x)=a(x+3)(x-2)=a(x^2-2x+3x-6)=a(x^2+x-6)=ax^2+ax-6a$$

Når grafen går gjennom punktet (0,12), vet vi at $f(0)=12$.

Dette gir:

$$-6a=12$$
$$a=-2$$

Da har vi $\underline{\underline{f(x)=-2x^2-2x+12}}$

Oppgave 5

a) "Rydder" begge likningene, slik at y blir stående alene på venstre side.

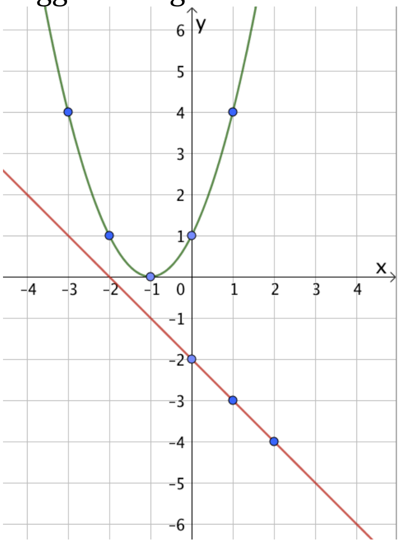
$$I.\quad y=x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$II.\quad y=-x-2$$

Ser at høyresiden i likning I er et fullstendig kvadrat, så grafen er en parabel med ett nullpunkt $x=-1$ og er symmetrisk om linja $x=-1$.

Likning *II* er likningen til ei rett linje med stigningstall -1 og som krysser *y*-aksen i (0,-2).

Markerer noen punkter i koordinatsystemet og tegner grafene til høyresidene i begge likningene:



Grafene skjærer hverandre ikke, så likningssystemet har ingen løsning.
Som skulle vises.

b)

$$\begin{aligned} I. \quad & x^2+2x-y=-1 \\ II. \quad & x+y=-2 \end{aligned}$$

Legger likning *II* til likning *I* og får:

$$x^2+3x=-3$$

Dette gir videre:

$$x^2+3x+3=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-3}}{2}$$

Vi ser at vi får negativt tall under rottegnet, så likningen har ingen løsning.
Da har heller ikke likningssystemet noen løsning.
Som skulle vises.

Oppgave 6

$$\frac{9^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{-1}+9^0}{8^{\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt{9}\cdot\frac{1}{3}+1}{\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^4}=\frac{3\cdot\frac{1}{3}+1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^4}=\frac{1+1}{2^4}=\frac{2}{2^4}=\frac{1}{2^3}=\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Oppgave 7

a)

$$\lg(2x-6)=2$$
$$10^{\lg(2x-6)}=10^2$$
$$2x-6=100$$
$$2x=100+6$$
$$x=\frac{106}{2}$$
$$\underline{\underline{x=53}}$$

b)

$$\frac{3^{2x}+3^{2x}+4}{2}=29$$
$$\frac{2\cdot 3^{2x}+4}{2}=29$$
$$3^{2x}+2=29$$
$$3^{2x}=29-2$$
$$3^{2x}=27$$
$$3^{2x}=3^3$$
$$2x=3$$
$$\underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}$$

Oppgave 8

Bruker cosinussetningen.

$$BC=\sqrt{2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120^\circ}=\sqrt{4+16-16\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{20+8}=\sqrt{28}=\sqrt{4\cdot 7}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{7}=\underline{\underline{2\sqrt{7}}}$$

Oppgave 9

Når omkretsen er 12, kan ikke den lengste siden ha lengde 2, så vi vet at det er en av katetene som har denne lengden. Det betyr at summen av lengden av den andre kateten og lengden av hypotenusen må være 10.
Sier at kateten med ukjent lengde har lengde x og at hypotenusen da har lengde $10-x$.

Bestemmer de ukjente lengdene ved hjelp av Pythagoras' setning:

$$2^2 + x^2 = (10 - x)^2$$
$$4 + x^2 = 100 - 20x + x^2$$
$$4 = 100 - 20x$$
$$20x = 100 - 4$$
$$x = \frac{96}{20}$$
$$x = 4{,}8$$

Da vet vi at de to katetene i den rettvinklede trekanten har lengder 2 og 4,8, og vi har nok informasjon til å regne ut arealet av trekanten.

$$A = \frac{2 \cdot 4{,}8}{2} = \underline{\underline{4{,}8}}$$

Oppgave 10

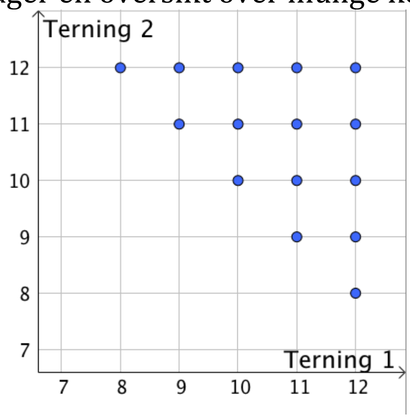
a) $P(\text{Tallet 10 i begge kastene}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{144}}}$

b) Hendelsen "tallene 10 og 12 på to kast" kan skje på to måter. Enten først 10 så 12, eller omvendt.

$$P(\text{Tallene 10 og 12 på to kast}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{144} + \frac{1}{144} = \frac{2}{144} = \frac{1}{72}$$

Mari sin påstand er riktig.

c) Siden terningen har 12 sider, kan ingen av terningene vise lavere tall enn 8 for at summen skal bli 20.
Lager en oversikt over mulige kombinasjoner:



Det er altså 15 kombinasjoner som gir sum 20 eller mer.
15 gunstige av 144 mulige kombinasjoner, er en større andel enn 15 av 150, altså er sannsynligheten større enn 10 % for å få sum 20 eller mer ved to kast.

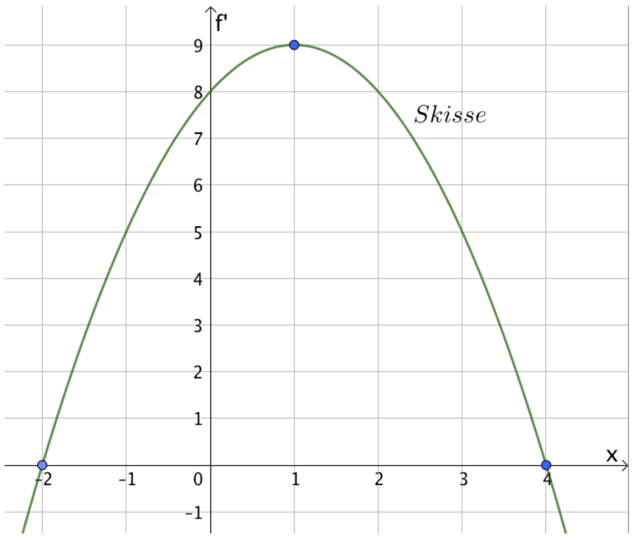
Mari sin påstand er riktig.

Oppgave 11

Grafen til den deriverte av en tredjegradsfunksjon, er en parabel.
I dette tilfelle har den deriverte to nullpunkter, $x = -2$ og $x = 5$.
Midt mellom disse nullpunktene må parabelen ha et toppunkt eller et bunnpunkt.
Siden stigningstallet til tangenten i punktet $(1,7)$ er 9, vet vi at grafen til den deriverte går gjennom punktet $(1,9)$, som ligger midt mellom nullpunktene (i *x*-retning).

Da vet vi at $(1,9)$ er toppunktet på grafen til den deriverte.

Markerer nullpunktene og toppunktet i et koordinatsystem, og tegner en jevn kurve gjennom dem for å skissere grafen til $f\,'$.



Oppgave 12

a)

$$f(x) = ax + b = \frac{-1-3}{2-0}x + 3 = \frac{-4}{2}x + 3 = -2x + 3$$

$$g(x) = cx + d = \frac{-1-(-2)}{2-0}x - 2 = \frac{1}{2}x - 2$$

$$\underline{\underline{f(x) = -2x + 3 \;\text{ og }\; g(x) = \frac{1}{2}x - 2}}$$

b) Grunnlinja i trekanten er gitt ved avstanden mellom nullpunktene til funksjonene, mens høyden i trekanten er gitt ved *y*-koordinaten til skjæringspunktet mellom grafene.
(Men med positiv verdi, siden det er snakk om *avstanden* i rett linje fra *x*-aksen til punktet).
Høyden i trekanten er altså 1.

Bestemmer nullpunktene til funksjonene:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x+3 &= 0 \\ 2x &= 3 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(x) &= 0 \\ \frac{1}{2}x-2 &= 0 \\ \frac{1}{2}x &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Avstanden mellom nullpunktene er da $4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

Vi kan da beregne arealet:

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

c) Bestemmer avstanden fra nullpunktet til *f* til skjæringspunktene mellom grafene (lengden av den ene kateten i den grønne trekanten).

Dette tilsvarer hypotenusen i en trekant med kateter med lengde 1 og $2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Kaller denne lengden for *p*.

$$p=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Bestemmer avstanden fra skjæringspunktene mellom grafene til nullpunktet til *g*. (lengden av den andre kateten i den grønne trekanten).
Dette tilsvarer hypotenusen i en trekant med kateter med lengde 1 og $4-2=2$.

Kaller denne lengden for *q*.

$$q=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

Dersom *p*, *q* og lengden til grunnlinja i den grønne trekanten oppfyller Pythagoras' setning, vet vi at den grønne trekanten er rettvinklet.

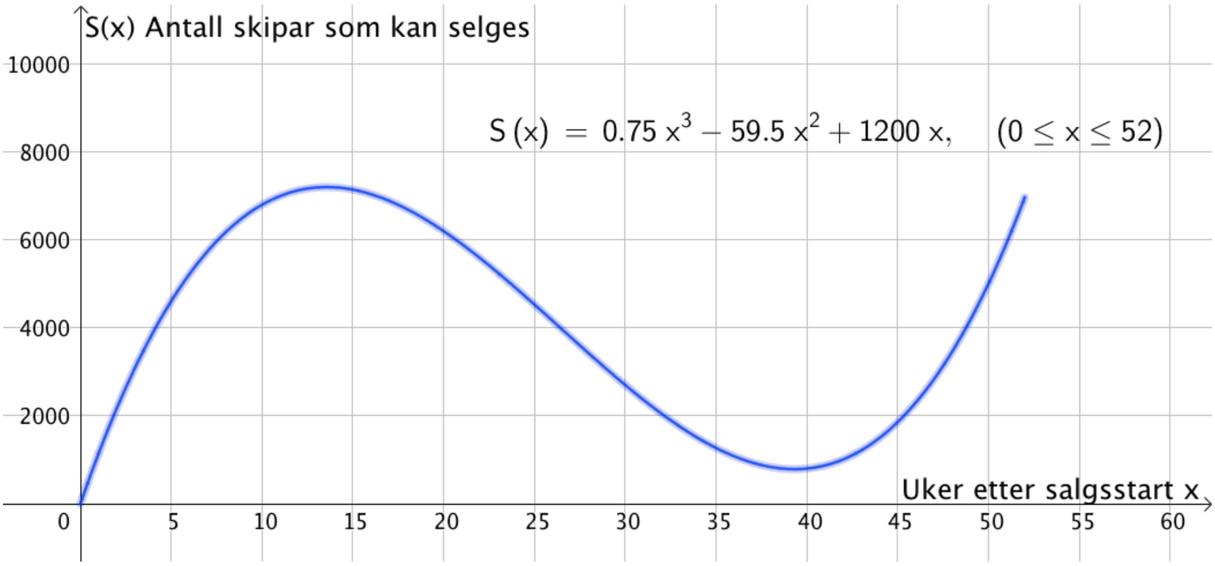
$$\sqrt{p^2+q^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}+5}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}}=\frac{5}{2}$$

Vi ser at *p*, *q* og lengden til grunnlinja i den grønne trekanten oppfyller Pythagoras' setning.

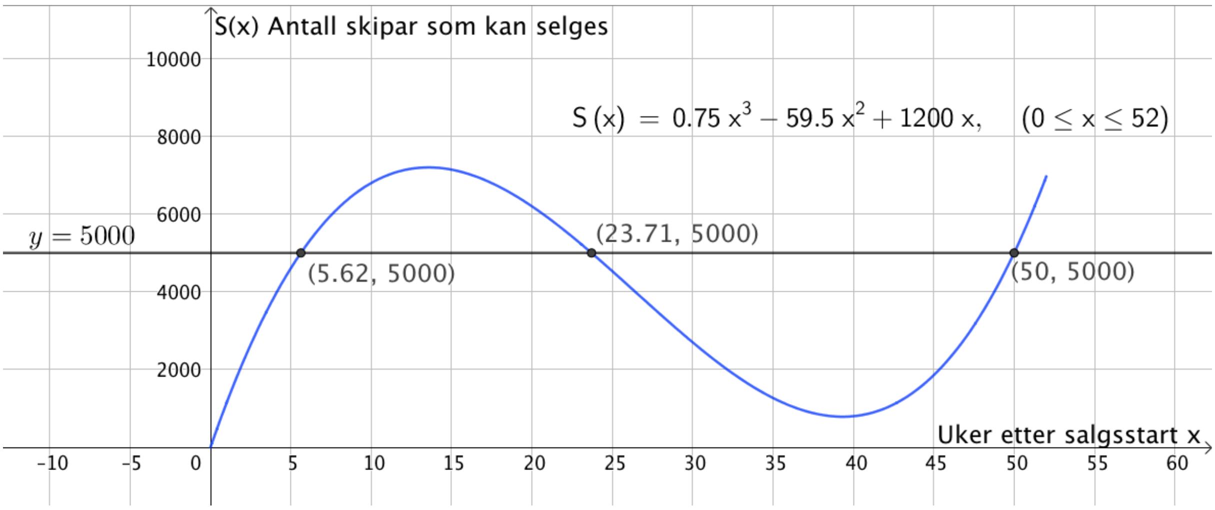
Den grønne trekanten er rettvinklet.
<u>Som skulle vises</u>.

Del 2

a)



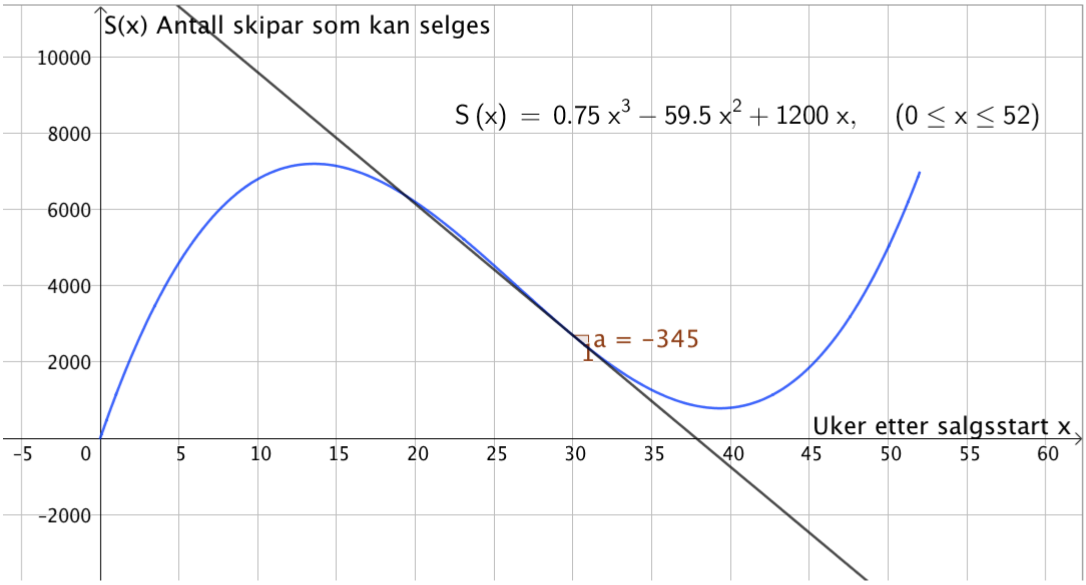
b) Tegner linja $y = 5000$ og finner skjæringspunktene mellom denne og grafen til *f* ved hjelp av *skjæring mellom to objekt*.



Vi ser at butikken kan selge mer enn 5000 par ski per uke i en 18-ukers fra starten av desember 2022, samt de to siste ukene av oktober året etter. (Salgsstart er 1.november 2022)

<u>I følge modellen vil butikken kunne selge mer enn 5000 skipar per uke i 20 uker</u>.

c) Bruker kommandoen *Tangent(<x-verdi>, <Funksjon>)* og tegner tangenten i punktet $\left(30, S(30)\right)$. Bestemmer stigningstallet ved hjelp av *stigning*.

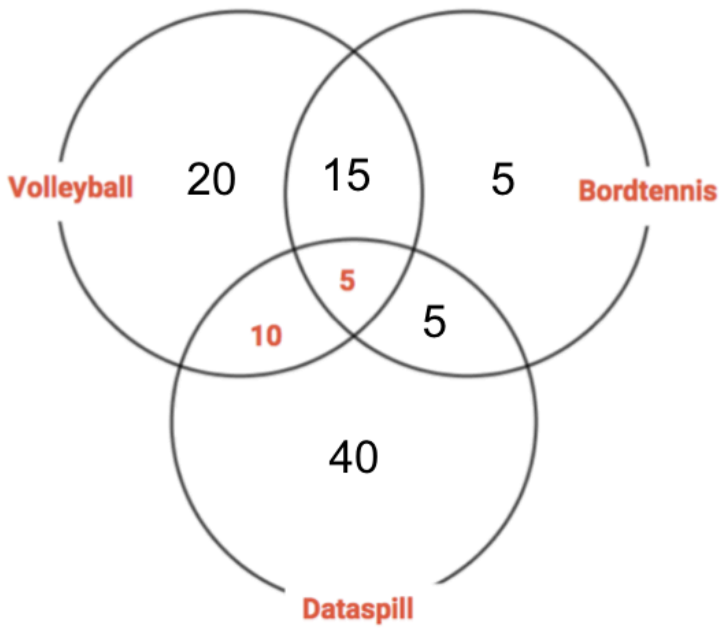


Den momentane vekstfarten til S når $x = 30$ er -345 skipar per uke

Det betyr at antall skipar som selges per uke, vil avta med 345 per uke 30 uker etter salgsstart, altså rundt mai/juni 2023.

Oppgave 2

a)



b) Når Venn-diagrammet er fylt ut, er 100 medlemmer plassert utover én eller flere av de nevnte aktivitetene. Det betyr at det er 20 medlemmer som ikke driver med noen av de tre aktivitetene.

$$P\left(\text{Et tilfeldig valgt medlem deltar ikke på noen av de tre aktivitetene}\right) = \frac{20}{120} = \underline{\underline{\frac{1}{6} \approx 16{,}7\%}}$$

Oppgave 3

a) Bruker sinussetningen og løser oppgaven i CAS.

CAS

1	BD/sin(120°)=a/sin(30°)
	Løs: $\left\{BD = \sqrt{3}\,a\right\}$

Som skulle vises.

b) $\angle ABD = 180° - 120° - 30° = 30°$, så ΔABD er likebeint.
Da har vi $AD = AB = a$.
Bestemmer lengden av *CD* ved hjelp av cosinussetningen:

CAS

1	(CD)²=(sqrt(2)*a)²+(sqrt(3)*a)²-2*sqrt(2)*a*sqrt(3)*a*cos(75°)
	✓ $CD^2 = \left(\sqrt{2}\,a\right)^2 + \left(\sqrt{3}\,a\right)^2 - 2\sqrt{2}\,a\sqrt{3}\,a\cos(75°)$
2	$CD^2 = (\text{sqrt}(2)\ a)^2 + (\text{sqrt}(3)\ a)^2 - 2\text{sqrt}(2)\ a\ \text{sqrt}(3)\ a\cos(75°)$
	Løs: $\left\{CD = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\,a, CD = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\,a\right\}$

Siden *CD* er en sidelengde og *a* er lengden til en side, velger jeg den positive løsningen.

$$CD = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}a$$

Eksakt uttrykk for omkretsen av firkanten står i linje 3 i bildet under:

2	$CD^2 = (\text{sqrt}(2)\ a)^2 + (\text{sqrt}(3)\ a)^2 - 2\text{sqrt}(2)\ a\ \text{sqrt}(3)\ a\cos(75°)$
	Løs: $\left\{CD = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\,a, CD = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\,a\right\}$
3	a + a + sqrt(2) a + HøyreSide($2,2)
	$\rightarrow \frac{1}{2}\,a\left(\sqrt{2}\cdot 3 + \sqrt{6} + 4\right)$

c) Bruker arealsetningen på trekant *ABD* og trekant *BCD*.
Summen skal være $\sqrt{3}$.

	▸ CAS
1	(a*a*sin(120°))/2+(sqrt(3)*a*sqrt(2)*a*sin(75°))/2=sqrt(3) ✓ $\frac{a\ a\ \sin(120°)}{2}+\frac{\sqrt{3}\ a\ \sqrt{2}\ a\ \sin(75°)}{2}=\sqrt{3}$
2	(a a sin(120°)) / 2 + (sqrt(3) a sqrt(2) a sin(75°)) / 2 = sqrt(3) Løs: $\{a=\sqrt{2}-\sqrt{6}, a=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\}$

Må ha $a>0$.

$$\underline{\underline{\text{Arealet av firkanten blir } \sqrt{3} \text{ når } a=\sqrt{6}-\sqrt{2}}}$$

Oppgave 4

a) $\left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, <u>som skulle vises</u>.

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x(x+0)}=-\frac{1}{x^2}$$

Definisjonen av den deriverte gir altså at den deriverte av $\frac{1}{x}$ er $-\frac{1}{x^2}$.

<u>Som skulle vises</u>

Oppgave 5

a)

	▸ CAS
1	f(x):=1/x → $f(x) := \frac{1}{x}$
2	Tangent(s, f) → $y=\frac{2\ s-x}{s^2}$

$$\frac{2s-x}{s^2}=\frac{-x+2s}{s^2}=-\frac{x}{s^2}+\frac{2s}{s^2}=-\frac{1}{s^2}\cdot x+\frac{2}{s}$$

Likningen til tangenten i punktet $(s, f(s))$ er $y=-\frac{1}{s^2}\cdot x+\frac{2}{s}$, <u>som skulle vises</u>.

(Kunne eventuelt sjekket at uttrykket i linje 2 i CAS er det samme som uttrykket i oppgaveteksten ved å bruke "spørrende likhet" i CAS):

3	(2s – x) / s²==-(1/s²)*x+2/s → true

b) Lar tangenten være grafen til en funksjon *g*.

CAS

1	g(x):=-(1/s²)*x+(2/s) $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := \frac{2}{s} - \frac{x}{s^2}}$
2	g=0 Løs: $\{x = 2\,s\}$
3	A:=(2s,g(2s)) $\rightarrow$ $\mathbf{A := (2\,s, 0)}$
4	B:=(0,g(0)) $\rightarrow$ $\mathbf{B := \left(0, \frac{2}{s}\right)}$

$$\underline{\underline{A = (2s, 0) \ \text{ og } \ B = \left(0, \frac{2}{s}\right)}}$$

c)

ΔOAB har grunnlinje $2s$ og høyde $\dfrac{2}{s}$.

$$A_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2s \cdot \frac{2}{s} = \underline{\underline{2}}$$