Utdannings-
direktoratet

Eksamen

10.11.2021

REA3022 Matematikk R1

Se eksamenstips på baksiden!

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar
Hjelpemiddel	Del 1: Skrivesaker, passar, linjal og vinkelmålar (På del 1 er det ikkje tillate å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timar er alle hjelpemiddel tillatne, bortsett frå opent Internett og andre verktøy som kan brukast til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemiddel under eksamen, har du ikkje lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måtar å utveksle informasjon med andre på er ikkje tillatne.
Informasjon om oppgåva	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Poeng i del 1 og del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast.
Kjelder	Rulett: Ralf Roletschek. Lisens: CC BY-SA 3.0 Alle andre grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderinga	Sjå eksamensrettleiinga med kjenneteikn på måloppnåing til sentralt gitt skriftleg eksamen. Eksamensrettleiinga finn du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = \ln x + x^2 + 2$

b) $g(x) = (x^2 + 2)^7$

c) $h(x) = 3x \cdot e^{2x}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a) $\dfrac{2x+2}{x^2 - x} - \dfrac{2x+2}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+1}{x^2 + x}$

b) $\ln(4x) + 3\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \ln(2x^2)$

Oppgåve 3 (6 poeng)

Punkta $A(2,2)$, $B(6,1)$, $C(6,5)$ og $D(2,6)$ er gitt.
Linja ℓ går gjennom A og C, og linja m går gjennom B og D.

a) Bestem ei parameterframstilling for ℓ og ei parameterframstilling for m.

b) Bestem ved rekning skjeringspunktet mellom ℓ og m.

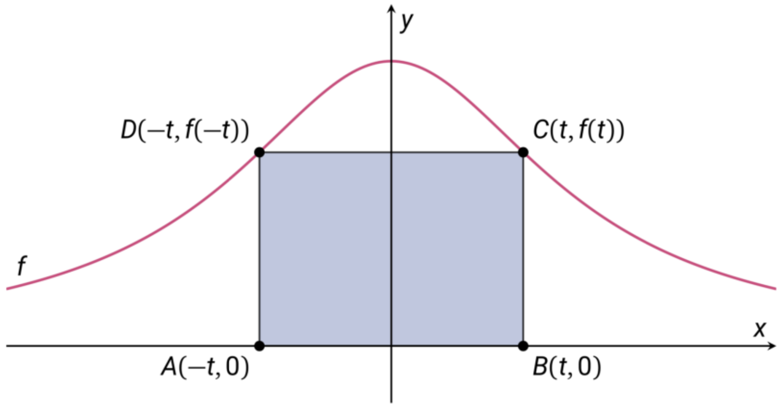
c) Avgjer om ℓ og m står normalt på kvarandre.

Oppgåve 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 4}$$

Eit rektangel $ABCD$ er gitt ved $A(-t,0)$, $B(t,0)$ og at punkta C og D ligg på grafen til f, slik figuren under viser. Her er $t > 0$.



Kva er det største arealet rektangelet kan ha?

Oppgåve 5 (3 poeng)

Under er det gitt nokre utsegner. Avgjer kva for eit av symbola $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$ som skal stå i kvar av dei to rutene. Hugs å grunngi svara.

a) $\lg x^2 = 2 \quad \boxed{} \quad x = 10$

b) $x^2 - 2x < 0 \quad \boxed{} \quad x \in \langle 0, 1 \rangle$

Oppgåve 6 (6 poeng)

Siv, Audun og fire venner skal gå hand i hand i ring rundt juletreet.

a) Grunngi at det er 120 ulike måtar dei seks kan plassere seg på i ringen.

Siv er hemmeleg forelska i Audun.

b) Bestem sannsynet for at ho får halde Audun i handa dersom plasseringane i ringen er tilfeldige.

Etter at dei har gått rundt juletreet, skal dei ta eit bilete. Dei skal stille seg ved sida av kvarandre på ei linje.

c) Bestem sannsynet for at Audun og Siv får stå ved sida av kvarandre på biletet dersom dei blir plasserte tilfeldig.

Oppgåve 7 (8 poeng)

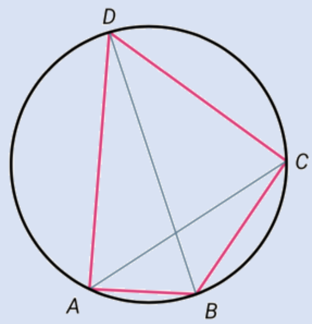
Ein firkant som kan innskrivast i ein sirkel, kallar vi ein *syklisk firkant*.

Læresetninga til Ptolemaios

I ein syklisk firkant er produktet av lengdene til dei to diagonalane lik summen av produkta av lengdene til dei motståande sidene.

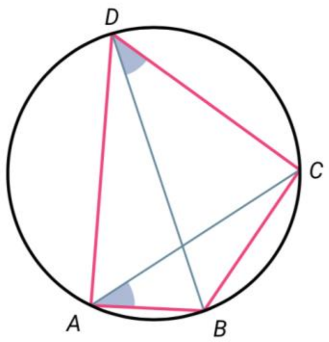
I firkanten $ABCD$ på figuren er

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

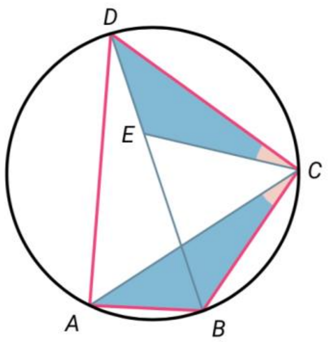


I denne oppgåva skal vi bevise læresetninga til Ptolemaios.

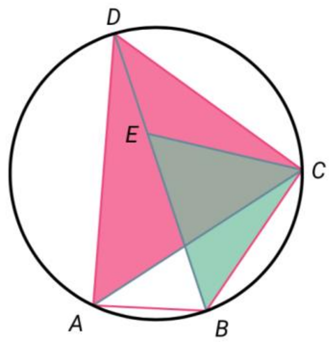
La $ABCD$ vere ein syklisk firkant, som vist på figur 1 under.



Figur 1



Figur 2



Figur 3

a) Forklar at $\angle BAC = \angle BDC$.

Plasser punktet E på BD slik at $\angle DCE = \angle ACB$. Sjå figur 2.

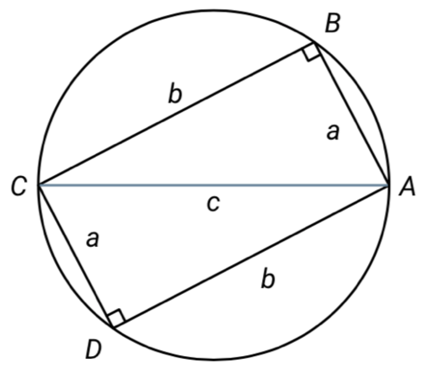
b) Forklar at $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Bruk dette til å vise at $ED \cdot AC = AB \cdot DC$

c) Forklar at $\triangle ACD \sim \triangle BCE$. Bruk dette til å vise at $BE \cdot AC = BC \cdot AD$

d) Bruk resultata frå oppgåve b og c til å vise at

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

e) Bruk læresetninga til Ptolemaios og figuren til høgre til å bevise læresetninga til Pytagoras.



Del 2

Oppgåve 1 (6 poeng)

Posisjonsvektoren $\vec{r}$ til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t)=\left[\frac{1-t^2}{t^2+1}\ ,\ \frac{t^2+2t}{t^2+1}\right],\qquad -10\leq t\leq 10$$

Her er eininga langs aksane meter, og t er målt i sekund.

a) Teikn grafen til $\vec{r}$.

b) Ved kva tidspunkt var farten til partikkelen størst?

c) Ved kva tidspunkt bevega partikkelen seg parallelt med x-aksen?

Oppgåve 2 (7 poeng)

Når vi speler med eit ruletthjul, hamnar ei kule på eit av 37 tall. Av desse tala er 18 raude, 18 svarte og eitt grønt. Sannsynet er det same for at kula hamnar på kvart av dei 37 tala.

a) Bestem sannsynet for at kula hamnar på det grøne talet i minst 1 av 10 speleomgangar.

b) Kor mange gonger må vi minst spele med ruletthjulet dersom sannsynet for at kula skal hamne på det grøne talet minst 1 gong, skal vere meir enn 50 prosent?

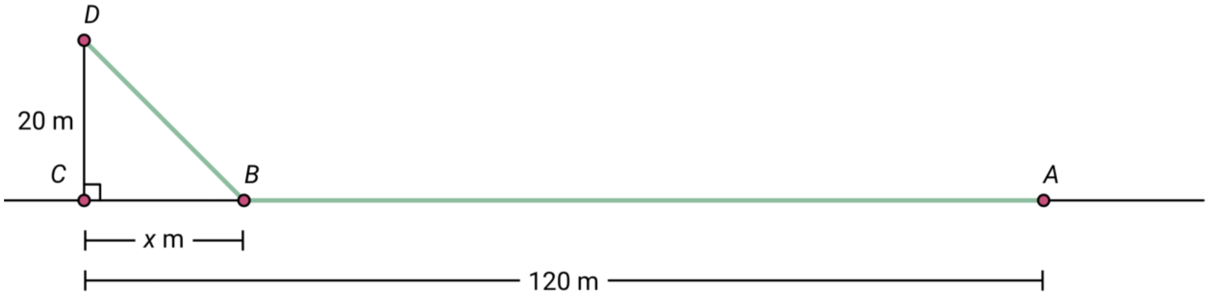
c) Forklar korleis du kan komme fram til at sannsynet er $p\approx 0{,}151$ for at kula hamnar på eit raudt tal i minst 7 av 10 speleomgangar.

Åtte venner skal spele med ruletthjulet. Alle speler 10 gonger kvar.

d) Bestem sannsynet for at nøyaktig 3 av dei får raudt tal i minst 7 av dei 10 speleomgangane.

Oppgåve 3 (6 poeng)

Terje skal lage ei grøft som han skal leggje ei røyr i. Grøfta skal byrje i punktet A ved ein rettlinja veg og ende ved ei hytte i punktet D, slik figuren under viser. Avstanden frå D til punktet C på vegen er 20 meter. Punktet C er 120 meter frå A.



Eit firma tar 800 kroner per meter for å lage grøft langs vegen og 1500 kroner per meter for å lage grøft i terrenget. Dei grev grøfta frå A til eit punkt B langs vegen. Så går dei rett mot hytta frå B til D.

Set $BC = x$ m.

a) Vis at prisen P som Terje må betale for grøfta, er gitt ved

$$P(x) = 96000 - 800x + 1500\sqrt{x^2 + 400}$$

b) Kvar må Terje setje punktet B for at prisen for grøfta skal bli lågast råd?
Kva er den lågaste prisen?

Eit anna firma gir opp andre prisar for å lage grøfta. Dei tar 1000 kroner per meter for å lage grøft langs vegen. I eit tilbod seier dei at den billigaste løysinga er å setje B 10 meter frå C.

c) Kor mykje tar dette firmaet per meter for å lage grøft i terrenget?

Oppgåve 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x \ , \quad b \in \mathbb{R}$$

a) Forklar at f berre har eitt nullpunkt, same kva verdi b har.

b) For kva verdiar av b har grafen til f både toppunkt og botnpunkt?

c) Vis at grafen til f tangerer linja $y = 3x$ uavhengig av kva verdi b har.
Bestem koordinatane til tangeringspunktet.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler	Del 1: Skrivesaker, passer, linjal og vinkelmåler. (På del 1 er det ikke tillatt å bruke datamaskin.) Del 2: Etter tre timer er alle hjelpemidler tillatt, bortsett fra åpent Internett og andre verktøy som kan brukes til kommunikasjon. Når du bruker nettbaserte hjelpemidler under eksamen, har du ikke lov til å kommunisere med andre. Samskriving, chat og andre måter å utveksle informasjon med andre på er ikke tillatt.
Informasjon om oppgaven	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Poeng i del 1 og del 2 er bare veiledende i vurderingen. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres.
Kilder	Rulett: Ralf Roletschek. Lisens: CC BY-SA 3.0 Alle andre grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet
Informasjon om vurderingen	Se eksamensveiledningen med kjennetegn på måloppnåelse til sentralt gitt skriftlig eksamen. Eksamensveiledningen finner du på Utdanningsdirektoratets nettsider.
Vedlegg	Vedlegg 1: Binomisk og hypergeometrisk fordeling

Del 1

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = \ln x + x^2 + 2$

b) $g(x) = (x^2 + 2)^7$

c) $h(x) = 3x \cdot e^{2x}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\dfrac{2x+2}{x^2 - x} - \dfrac{2x+2}{x^2 - 1} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+1}{x^2 + x}$

b) $\ln(4x) + 3\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + \ln(2x^2)$

Oppgave 3 (6 poeng)

Punktene $A(2,2)$, $B(6,1)$, $C(6,5)$ og $D(2,6)$ er gitt.
Linjen ℓ går gjennom A og C, og linjen m går gjennom B og D.

a) Bestem en parameterframstilling for ℓ og en parameterframstilling for m.

b) Bestem ved regning skjæringspunktet mellom ℓ og m.

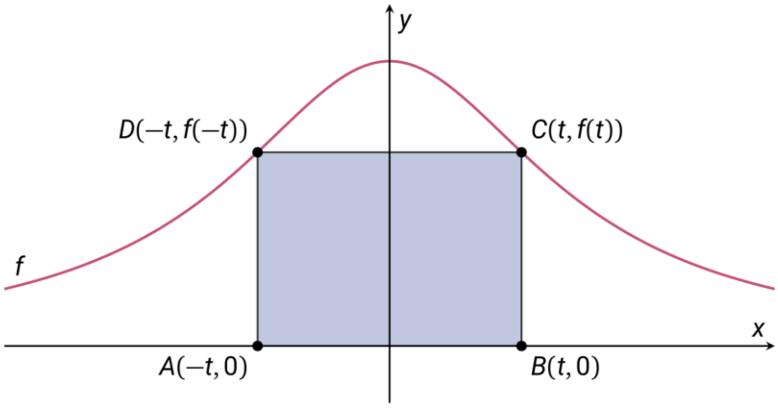
c) Avgjør om ℓ og m står normalt på hverandre.

Oppgave 4 (4 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=\frac{5}{x^2+4}$$

Et rektangel $ABCD$ er gitt ved $A(-t,0)$, $B(t,0)$ og at punktene C og D ligger på grafen til f, slik figuren nedenfor viser. Her er $t>0$.



Hva er det største arealet rektangelet kan ha?

Oppgave 5 (3 poeng)

Nedenfor er det gitt noen utsagn. Avgjør hvilket av symbolene $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ eller $\Leftrightarrow$ som skal stå i hver av de to rutene. Husk å begrunne svarene.

a) $\lg x^2=2 \quad \boxed{} \quad x=10$

b) $x^2-2x<0 \quad \boxed{} \quad x\in\langle 0,1\rangle$

Oppgave 6 (6 poeng)

Siv, Audun og fire venner skal gå hånd i hånd i ring rundt juletreet.

a) Begrunn at det er 120 ulike måter de seks kan plassere seg på i ringen.

Siv er hemmelig forelsket i Audun.

b) Bestem sannsynligheten for at hun får holde Audun i hånden dersom plasseringene i ringen er tilfeldige.

Etter at de har gått rundt juletreet, skal de ta et bilde. De skal stille seg ved siden av hverandre på en linje.

c) Bestem sannsynligheten for at Audun og Siv får stå ved siden av hverandre på bildet dersom de blir plassert tilfeldig.

Oppgave 7 (8 poeng)

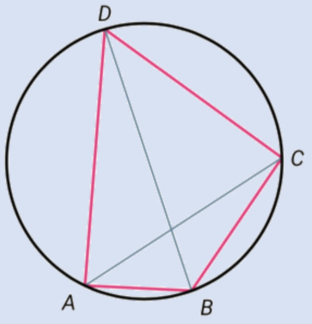
En firkant som kan innskrives i en sirkel, kaller vi en *syklisk firkant*.

Ptolemaios' setning

I en syklisk firkant er produktet av lengdene til de to diagonalene lik summen av produktene av lengdene til de motstående sidene.

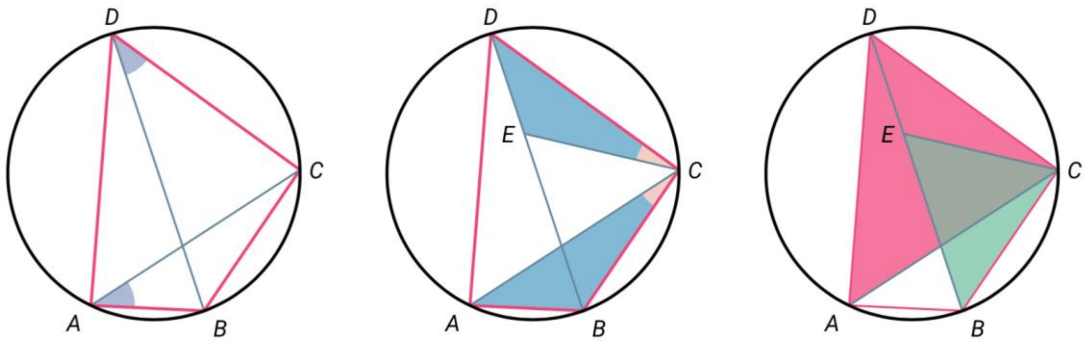
I firkanten $ABCD$ på figuren er

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$



Vi skal i denne oppgaven bevise Ptolemaios' setning.

La $ABCD$ være en syklisk firkant, som vist på figur 1 nedenfor.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

a) Forklar at $\angle BAC = \angle BDC$.

Plasser punktet E på BD slik at $\angle DCE = \angle ACB$. Se figur 2.

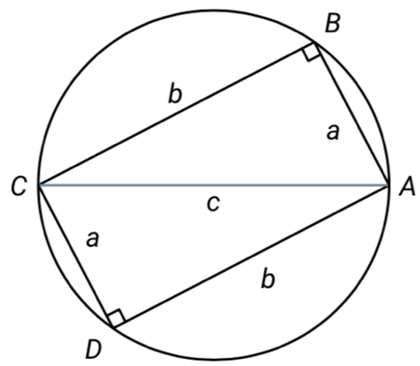
b) Forklar at $\triangle DEC \sim \triangle ABC$. Bruk dette til å vise at $ED \cdot AC = AB \cdot DC$

c) Forklar at $\triangle ACD \sim \triangle BCE$. Bruk dette til å vise at $BE \cdot AC = BC \cdot AD$

d) Bruk resultatene fra oppgave b og c til å vise at

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$$

e) Bruk Ptolemaios' setning og figuren til høyre til å bevise Pytagoras' setning.



Del 2

Oppgave 1 (6 poeng)

Posisjonsvektoren $\vec{r}$ til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[\frac{1-t^2}{t^2+1}, \frac{t^2+2t}{t^2+1}\right], \quad -10 \le t \le 10$$

Her er enheten langs aksene meter, og t er målt i sekunder.

a) Tegn grafen til $\vec{r}$.

b) Ved hvilket tidspunkt var farten til partikkelen størst?

c) Ved hvilke tidspunkt beveget partikkelen seg parallelt med x-aksen?

Oppgave 2 (7 poeng)

Når vi spiller med et ruletthjul, havner en kule på et av 37 tall. Av disse tallene er 18 røde, 18 svarte og ett grønt. Sannsynligheten er den samme for at kulen havner på hvert av de 37 tallene.

a) Bestem sannsynligheten for at kulen havner på det grønne tallet i minst 1 av 10 spilleomganger.

b) Hvor mange ganger må vi minst spille med ruletthjulet dersom sannsynligheten for at kulen skal havne på det grønne tallet minst 1 gang, skal være mer enn 50 prosent?

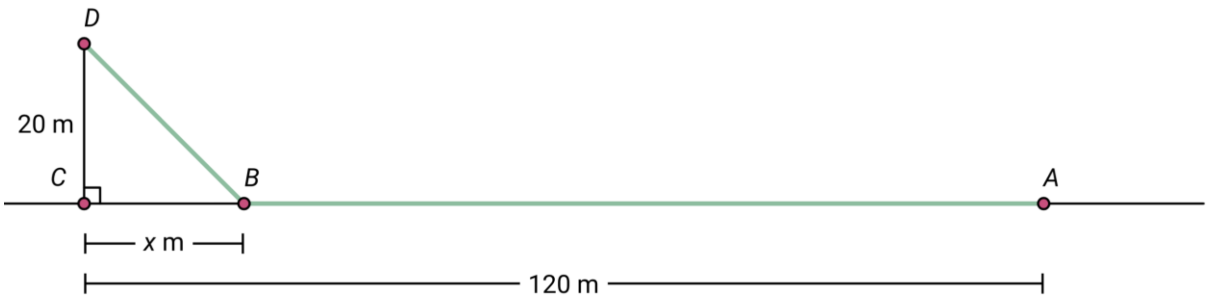
c) Forklar hvordan du kan komme fram til at sannsynligheten er $p \approx 0{,}151$ for at kulen havner på et rødt tall i minst 7 av 10 spilleomganger.

Åtte venner skal spille med ruletthjulet. Alle spiller 10 ganger hver.

d) Bestem sannsynligheten for at nøyaktig 3 av dem får rødt tall i minst 7 av de 10 spilleomgangene.

Oppgave 3 (6 poeng)

Terje skal lage en grøft som han skal legge et rør i. Grøften skal starte i punktet A ved en rettlinjet vei og ende ved en hytte i punktet D, slik figuren nedenfor viser. Avstanden fra D til punktet C på veien er 20 meter. Punktet C er 120 meter fra A.



Et firma tar 800 kroner per meter for å lage grøft langs veien og 1500 kroner per meter for å lage grøft i terrenget. De graver grøften fra A til et punkt B langs veien. Så går de rett mot hytten fra B til D.

Sett $BC = x$ m.

a) Vis at prisen P som Terje må betale for grøften, er gitt ved

$$P(x) = 96000 - 800x + 1500\sqrt{x^2 + 400}$$

b) Hvor må Terje sette punktet B for at prisen for grøften skal bli lavest mulig? Hva er den laveste prisen?

Et annet firma oppgir andre priser for å lage grøften. De tar 1000 kroner per meter for å lage grøft langs veien. I et tilbud oppgir de at den billigste løsningen er å plassere B 10 meter fra C.

c) Hvor mye tar dette firmaet per meter for å lage grøft i terrenget?

Oppgave 4 (5 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 2b \cdot x^2 + (b^2 + 3) \cdot x \ , \quad b \in \mathbb{R}$$

a) Forklar at f kun har ett nullpunkt, uavhengig av verdien av b.

b) For hvilke verdier av b har grafen til f både toppunkt og bunnpunkt?

c) Vis at grafen til f tangerer linjen $y = 3x$ uavhengig av hvilken verdi b har. Bestem koordinatene til tangeringspunktet.

Vedlegg 1

Binomisk fordeling:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

Hypergeometrisk fordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Blank side

Blank side

Blank side

Utdannings-
direktoratet

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGÅVA:

- Start med å lese oppgåveinstruksen godt.
- Hugs å føre opp kjeldene i svaret ditt dersom du bruker kjelder.
- Les gjennom det du har skrive, før du leverer.
- Bruk tida. Det er lurt å drikke og ete undervegs.

Lykke til!

TIPS TIL DEG SOM AKKURAT HAR FÅTT EKSAMENSOPPGAVEN:

- Start med å lese oppgaveinstruksen godt.
- Husk å føre opp kildene i svaret ditt hvis du bruker kilder.
- Les gjennom det du har skrevet, før du leverer.
- Bruk tiden. Det er lurt å drikke og spise underveis.

Lykke til!