Del1 uten hjelpemidler

Oppgave 1

a. Vi deriverer $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7$ og får $\underline{\underline{f'(x) = 9x^2 + 4x}}$

b. Gjennomsnittlig veksthastighet blir $\dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^0}{3} = \dfrac{3(8-1)}{3} = \underline{\underline{7}}$

c. $\dfrac{2x}{x^2 - 9} + \dfrac{3}{3x + 9} = \dfrac{2x}{(x-3)(x+3)} + \dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x + 1 \cdot (x-3)}{(x-3)(x+3)} = \underline{\underline{\dfrac{3x-3}{x^2-9}}}$

d. $\dfrac{a^{-3}(ab)^2}{ab^{-1}} = a^{-3+2-1} \cdot b^{2+1} = \underline{\underline{\dfrac{b^3}{a^2}}}$

e. Vi løser ligningssystemet ved å finne y av 2. ligning og sette inn i den 1.

$$x^2 + 6 = y + 5x \wedge y = 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 + 6 = 2x + 6 + 5x \wedge y = 2x + 6 \Leftrightarrow x(x-7) = 0 \wedge y = 2x + 6 \Leftrightarrow$$
$$\underline{\underline{(x = 0 \wedge y = 6) \vee (x = 7 \wedge y = 20)}}$$

f. Vi regner ut $\binom{8}{6} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4 \cdot 7 = \underline{\underline{28}}$

I 9. linje har vi alle binomialkoeffisientene med 8 øverst. Helt til venstre har vi den med 0 nederst og så øker verdien av nedre tall med 1 for hver gang vi går 1 mot høyre og da blir det det 7. tallet som er $\binom{8}{6}$ Vi kan skrive opp alle tallene i trekanten til og med linje 9 og markere $\binom{8}{6}$ med rød utheva skrift.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

g. Når det er 3 gutter og 5 jenter og 6 skal spille og vi skal finne sannsynligheten for at alle tre guttene får spille så blir det også 3 jenter. Dette er et hypergeometrisk forsøk og vi får:

$$\frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{8}{6}}=\frac{1\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}}{28}=\frac{10}{28}=\underline{\underline{\frac{5}{14}=0.357}}$$

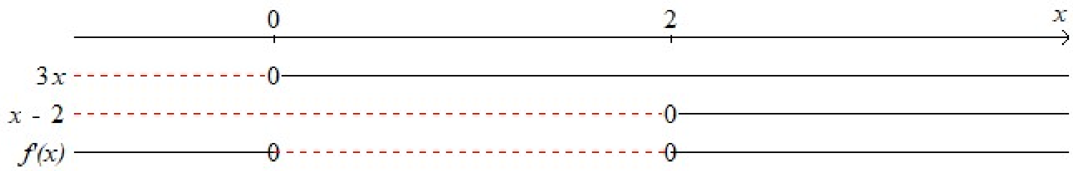
Oppgave 2

Gitt funksjonen f ved $f(x)=x^3-3x^2$

a. Skjæring med y-aksen når x = 0 som gir <u>skjæringspunktet (0, 0)</u>

Skjæring med x-aksen når f(x) = 0 som gir
$x^2(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$ $\underline{\underline{\text{Skjæringspunktene er da } (0,0) \text{ og } (3,0)}}$

b. $\underline{\underline{f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)}}$ Vi bruker nå fortegnslinje og får:



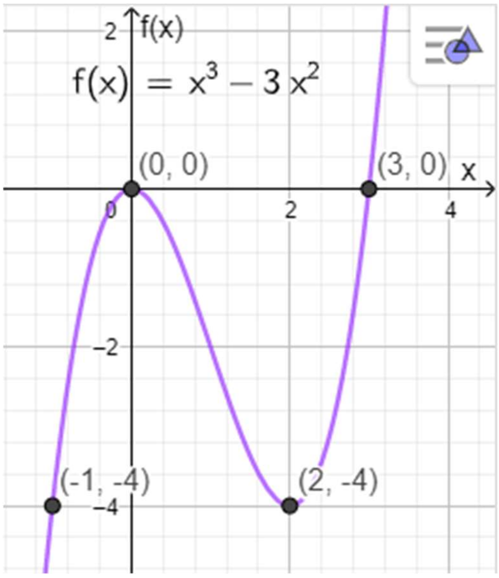
f vokser f minker f vokser

Dette viser at f har en topp når x = 0 og en bunn når x = 2.

Vi vet at når x = 0 er f(0) = 0 slik at <u>toppunktet er (0, 0)</u>

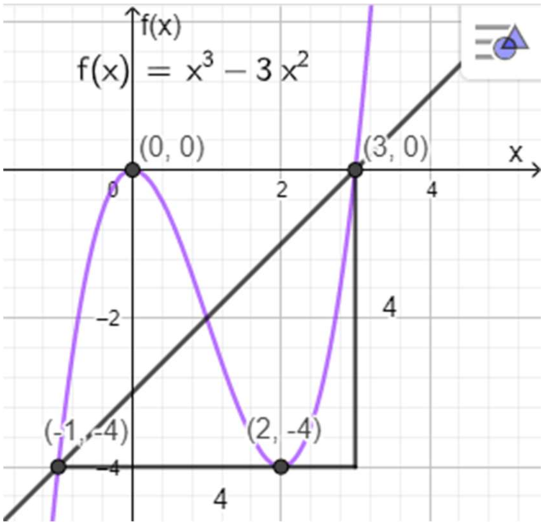
Videre er $f(2)=2^3-3\cdot2^2=8-12=-4$ som gir $\underline{\underline{\text{bunnpunktet } (2,-4)}}$

c. Vi tegner inn skjæringspunktene med aksene og ekstremalpunktene. I tillegg er f(-1) = -4



d. Den gjennomsnittlige veksthastigheten fra x = -1 til x = 3 blir $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = \frac{0-(-4)}{4} = \underline{\underline{1}}$

Vi tegner inn linja mellom de to aktuelle punktene (-1, -4) og (3, 0) og får:



Stigningstallet til den rette linja gjennom (-1, -4) og (3, 0) er $\frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$. Dette er også den gjennomsnittlige veksthastigheten mellom de to punktene. Vi ser at vi fikk samme svar med de to metodene.

Del 2 med hjelpemidler

Vi forkorter GeoGebra med GG

Oppgave 3

Når vi tipper en enkeltrekke i fotballtipping, skal vi tippe resultatet i 12 fotballkamper. Utfallet av en kamp er enten hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

a. Resultatet i en kamp er enten riktig med sannsynlighet $\frac{1}{3}$ eller feil med sannsynlighet $\frac{2}{3}$.

Resultatet i en kamp er ikke avhengig av resultatet i noen annen kamp, og med bare 12 kamper blir tipping av en enkeltrekke et binomisk forsøk.

b. Sannsynligheten for gevinst er riktig på 10 eller flere kamper. Denne sannsynligheten blir

$\sum_{k=10}^{k=12} \binom{12}{k} (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{12-k} = \underline{\underline{0.00054}}$ Vi regnet dette i GG

1 $\sum_{k=10}^{12} \mathrm{nCr}(12, k) \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{12-k}$

≈ **0.00054**

c. Sannsynligheten for ikke riktig er $\frac{2}{3}$. Sannsynligheten for 0 riktige på 12 kamper er da

$(\frac{2}{3})^{12} = \underline{\underline{0.00771}}$, mens sannsynligheten for 12 riktige på 12 kamper er $(\frac{1}{3})^{12} = \underline{\underline{0.00000188}}$. GG ga

2 $\left(\frac{2}{3}\right)^{12}$

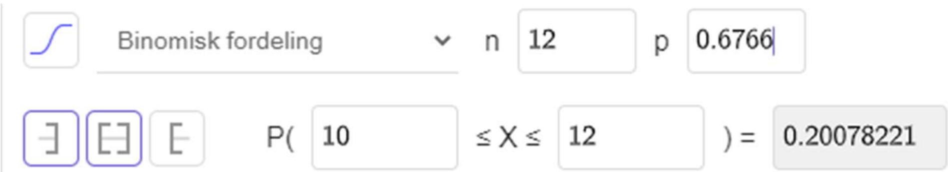
$\approx$ **0.0077073466**

3 $\left(\frac{1}{3}\right)^{12}$

$\approx$ **0.0000018817**

Vi ser at grunnen til at de to sannsynlighetene ikke blir like store er at det er dobbelt så sannsynlig å tippe feil som å tippe riktig på en kamp.

d. Når sannsynligheten for å få gevinst er 1 på 5 er sannsynligheten $\frac{1}{5} = 0.2$ Vi bruker sannsynlighetskalkulatoren i GG og får:



Dette viser at eksperten i gjennomsnitt må ha en sannsynlighet på 0.6766 på hver kamp for å få en vinnersannsynlighet på 0.2, altså premie på hver 5. rekke.

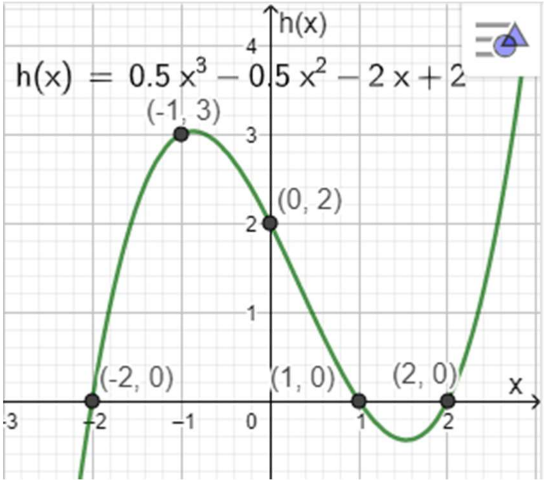
Oppgave 4 Alternativ 1

Gitt funksjonen g ved $g(x) = 2x^3 - 12x^2 - 5x + 8$

a. Vi deriverer $\underline{\underline{g'(x) = 6x^2 - 24x - 5}}$ Da blir $g'(4) = 6 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 - 5 = 6 \cdot 16 - 96 - 5 = \underline{\underline{-5}}$

b. Vi har lest av en del punkter på grafen til h og ført dem i tabellen under i GG og brukt tabellen til en 3.-grads regresjon og funnet regneforskriften til funksjonen h, som vist under. Den blir $h(x) = 0.5x^3 - 0.5x^2 - 2x + 2$

x	h(x)
-2	0
-1	3
0	2
1	0
2	0



b1.

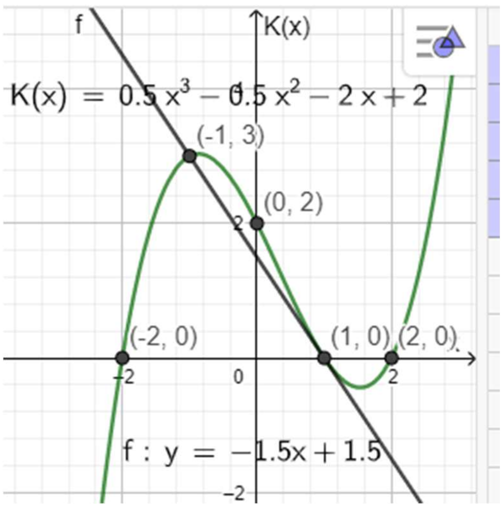
Vi løser h’(x) = 0 i GG og får

$h'(x) = 0$

NLøs: $\{x = -0.87, x = 1.54\}$

Nå ser vi at h vokser når x ≤ - 0.87 og når x ≥ 1.54. Imellom disse to x-verdiene minker h. Nedenunder har vi tegnet fortegnsskjemaet til h’(x)

b2. Ovenfor har vi tegnet grafen til h, og i GG kan vi finne verdien på h’(1) ganske lett: Nedenfor har vi tegnet inn tangenten til h i punktet på grafen der x = 1 og ser at tangenten er y = -1.5x + 1.5. Da er <u>h’ (1) = -1.5</u>

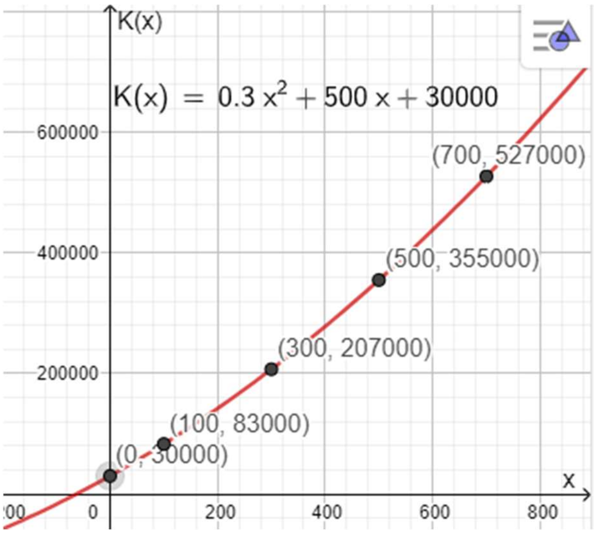


Sammenhengen mellom kostnaden $K(x)$ i kroner ved produksjon av en vare og antall produserte enheter x er gitt i tabellen nedenfor.

x	0	100	300	500	700
$K(x)$	30 000	83 000	207 000	355 000	527 000

c. Vi lager tabell i regnearket i GG og bruker den til en 2-grads regresjon

	A	B
1	x	K(x)
2	0	30000
3	100	83000
4	300	207000
5	500	355000
6	700	527000



Her ser vi at kostnadsfunksjonen K er gitt ved $\underline{\underline{K(x) = 0.3x^2 + 500x + 30000}}$

d. Vi regner K'(300) i GG og får:

1	K'(300)
	≈ **680**

Her ser vi at <u>K'(300) = 680</u>

<u>Dette viser at grensekostnaden er kr 680 som betyr at hvis bedriften øker produksjonen fra 300 til 301 enheter så vil kostnadene øke med kr 680</u>

e. Når salgsprisen er kr 710 per enhet blir overskuddet O(x) = I(x) – K(x) der I(x) = 710 x.

$$O(x) = 710x - (0.3x^2 + 500x + 30000) = \underline{\underline{-0.3x^2 + 210x - 30000}} \text{ qed.}$$

f. Vi har en 2-grads funksjon med negativ koeffisient framfor x^2, og da vet vi at funksjonen har en største verdi:

2 $O(x) := -0.3\,x^2 + 210\,x - 30000$

≈ $O(x) := -0.3\,x^2 + 210\,x - 30000$

3 $O'(x) = 0$

NLøs: $\{x = 350\}$

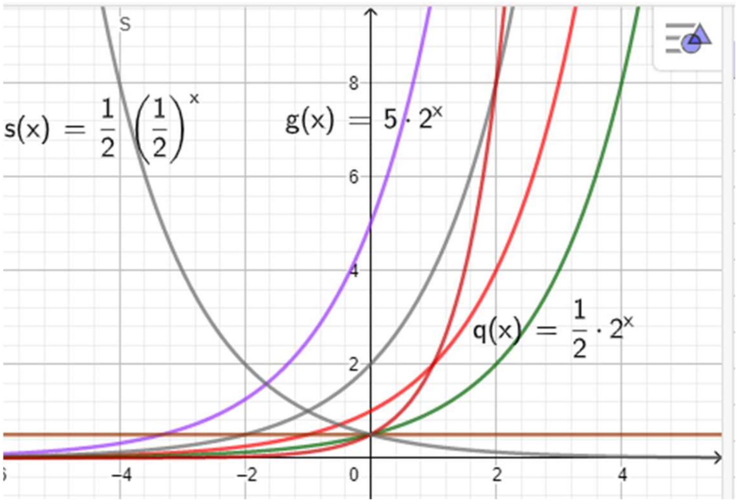
Størst overskudd har bedriften når de produserer 350 enheter

Oppgave 4 Alternativ II

a. I grafene under har vi illustrert funksjonen f gitt ved $f(x) = a \cdot b^x$ for forskjellige verdier av a og b. Det er brukt fargekode, så det burde være greit å kjenne igjen de forskjellige grafene.

Vi ser at a viser hvor på y-aksen grafen skjærer aksen. Hvis a er negativ vil skjæringen bli på den negative siden av y-aksen. F.eks. vil $y = (-2) \cdot 2^x$ være den symmetriske funksjonen til h speilet om x-aksen.

Bokstaven b, viser hvor bratt grafen er. Grafene til funksjonene p, q og r illustrerer dette, men hvis b blir mindre enn 1, som s(x) så blir funksjonen synkende.



$f(x) = 1 \cdot 2^x$

$g(x) = 5 \cdot 2^x$

$h(x) = 2 \cdot 2^x$

$p(x) = \frac{1}{2} \cdot 1^x$

$q(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

$r(x) = \frac{1}{2} \cdot 4^x$

$s(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^x$

b. Vi starter i et punkt på grafen med 1.koordinat x og øker denne verdien med Δx og vil finne hvor stor Δx må være for at funksjonsverdien skal bli dobbelt så stor som den var når x-verdien var x.

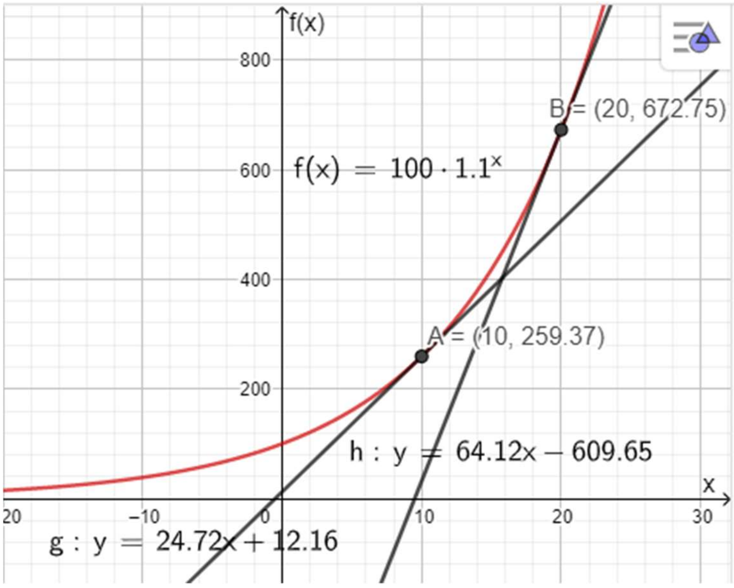
$$2 \cdot a \cdot b^x = a \cdot b^{x+\Delta x} \Leftrightarrow \lg(2 \cdot b^x) = \lg(b^{x+\Delta x}) \Leftrightarrow \lg 2 + x \lg b = x \lg b + \Delta x \cdot \lg b \Leftrightarrow \underline{\underline{\Delta x = \frac{\lg 2}{\lg b}}}$$

Siden startverdien på x ikke inngår i svaret er svaret uavhengig av hvor på grafen vi starter, som skulle vises.

c. Å derivere eksponentialfunksjonen generelt er ikke pensum i S1. Jeg synes det er merkelig at ikke oppgaven sier at vi velger bestemte verdier på a og b. Jeg ser ikke hvordan det er / skal være mulig å løse oppgaven uten å bruke bestemte verdier for a og b og så løse problemet grafisk.

Hvis en lar GG deriver f(x) når x = 10 får en svaret med ln(b) som heller ikke er pensum i S1.

Vi velger, som eksemplet i oppgaven, a = 100 og b = 1.1. Vi tegner nå grafene i GG , tegner tangentene i de to punktene og leser av stigningstallene til tangentene. Disse stignings tallene er da verdien av den deriverte i punktene:



Her ser vi at $\underline{\underline{f'(10) = 24,7 \text{ og } f'(20) = 64.1}}$

Vi vet at den momentane veksten i et punkt på grafen er verdien av den deriverte i punktet. GG gir oss da direkte

1	$f'(10)$
	≈ **24.72**
2	$f'(20)$
	≈ **64.12**

Dette er nøyaktig de samme svarene

Vi definerer den relative veksten i et punkt $(x_0, f(x_0))$ som

$$\frac{\text{den momentane veksten i punktet}}{\text{funksjonsverdien i punktet}} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

d. Vi regner ut den relative veksten når x = 10 og når x = 20 i GG:

3 $\frac{f'(10)}{f(10)}$

$\approx$ **0.0953**

4 $\frac{f'(20)}{f(20)}$

$\approx$ **0.0953**

Vi ser at den relative veksten er den samme for disse to verdiene.

e. Vi kan velge verdiene x = 1, x = 15 og x = 50 og får:

5 $\frac{f'(1)}{f(1)}$

$\approx$ **0.0953**

6 $\frac{f'(15)}{f(15)}$

$\approx$ **0.0953**

7 $\frac{f'(50)}{f(50)}$

$\approx$ **0.0953**

<u>Vi ser at den relative veksten er konstant for alle de verdiene vi har satte inn</u>. Når vi har lært å derivere eksponentialfunksjonen er det ikke vanskelig å vise dette generelt.

Oppgave 5.

Aina, Britt og Kim dekorerer T-skjorter og topper. De har spesialisert seg på hver sin del av dekoren.

- Aina bruker 6 minutter på sin del av dekoren på en skjorte, og 30 minutter på sin del av dekoren på en topp.
- Britt bruker 20 minutter på sin del av dekoren på en skjorte og 20 minutter på sin del av dekoren på en topp.
- Kim bruker 30 minutter på sin del av dekoren på en skjorte og 12 minutter på sin del av dekoren på en topp.

Aina kan arbeide inntil 5 timer per dag. Britt kan arbeide maksimalt 6 timer og Kim 8 timer hver dag.

De dekorerer i alt x skjorter og y topper hver dag.

a. De dekorerer ikke et negativt antall, hverken t-skjorter eller topper. Altså x ≥ 0 ∧ y ≥ 0

Begrensning i tid for Aina: $6x+30y \le 5\cdot 60$ gir ved div. med 30. $y \le -\frac{1}{5}x+10$

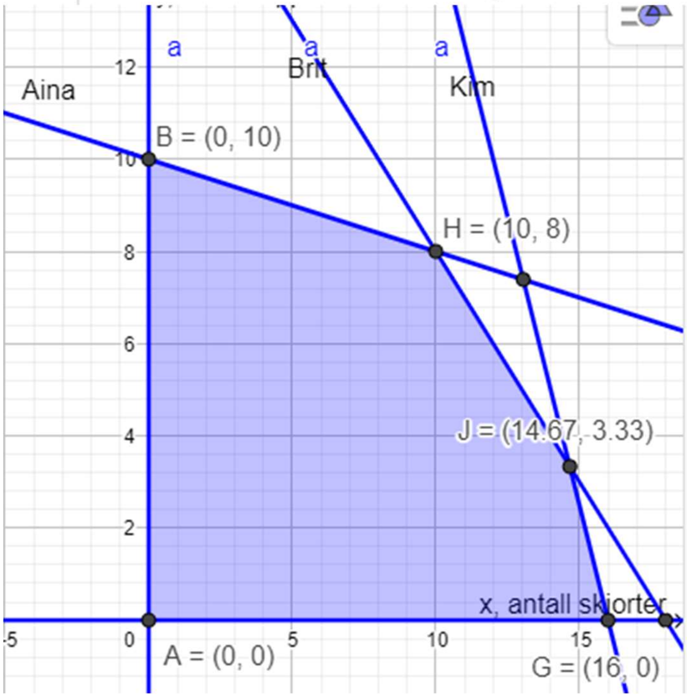
Begrensning i tid for Brit: $20x+20y \le 6\cdot 60$ gir ved div. med 20. $y \le -x+18$

Begrensning i tid for Kim: $30x+12y \le 8\cdot 60$ gir ved div med 12. $y \le -\frac{5}{2}x+40$ som skulle vises

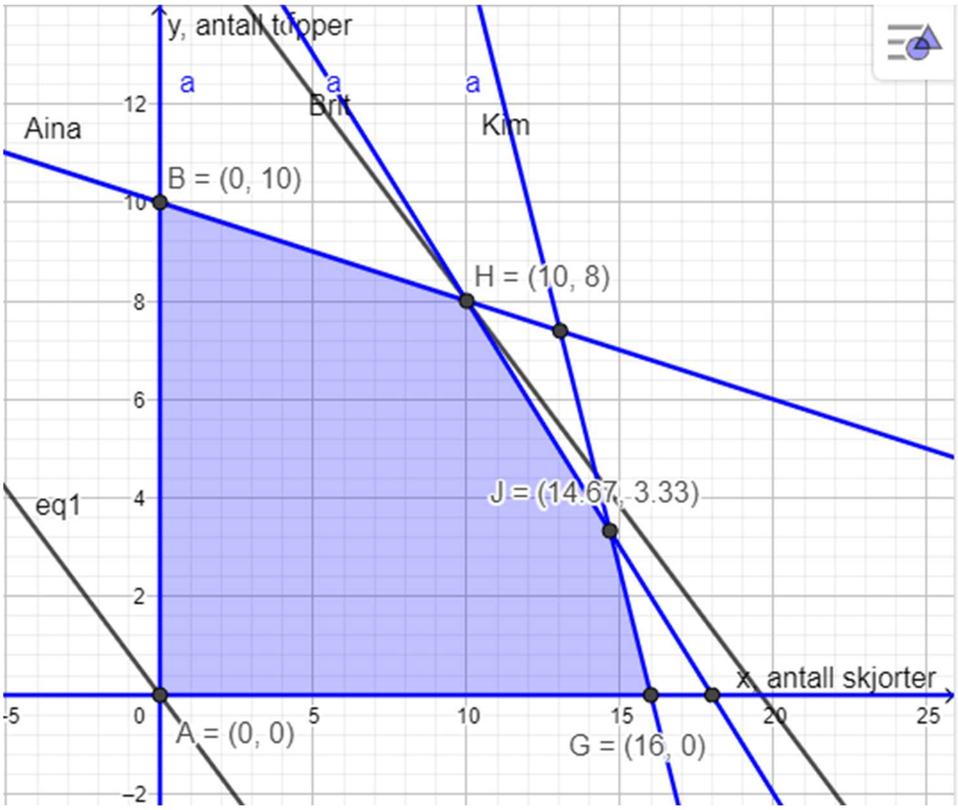
b. Vi skriver nå inn alle ulikhetene med konjunksjon mellom dem. Vi finner alle skjæringspunktene ved å bruke kommandoen «Toppunkt, Mangekant» og setter navn og koordinater på de aktuelle hjørnene:

Konjunksjonen som brukes er

$$a : x \geq 0 \land y \geq 0 \land y \leq -\frac{1}{5}x + 10 \land y \leq -x + 18 \land y \leq -\frac{5}{2}x + 40$$



c. Vi tegner nå inn inntektsfunksjonen I(x,y) = 250 x +300 y med 0 som inntekt. Dette blir ei linje eq1 gjennom origo som vi parallellforskyver så høyt vi kan innenfor det blå arealet, eller på grensen.



Vi ser at den linja som er parallellforskjøvet går gjennom H (10, 8). Dette betyr at de får størst inntekt når de dekorerer 10 skjorter og 8 topper. Den største inntekten blir

$I(10,8) = 250 \cdot 10 + 300 \cdot 8 = \underline{\underline{4900}}$

d. Vi ser at H ligger på linjene for begrensning for Aina og Brit. De to utnytter derfor sin kapasitet og da er det Kim som må rydde.

Kim har 480 min til rådighet og bruker $30 \cdot 10 + 12 \cdot 8 = 396$ minutter på å dekorere. Da har han igjen $\underline{\underline{480 - 396 = 84}}$ minutter til å rydde, altså 1h 24 min