Løsningsforslag eksamen S2 260521

1a) $f(x) = x^4 - 4\ln x$

$$f'(x) = \underline{4x^3 - \frac{4}{x}}$$

1b) $g(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+1}$

Brøkregel:
$u = e^{2x}$, $u' = 2e^{2x}$
$v = x+1$, $v' = 1$

$$g'(x) = \frac{2e^{2x}\cdot(x+1) - e^{2x}\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^{2x}(2(x+1)-1)}{(x+1)^2} = \underline{\frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}}$$

2a) $-6 - 1 + 4 + 9 + 14 + \ldots + 189$

Aritmetisk rekke, $d = 5$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = -6 + (n-1)\cdot 5$, $a_n = -6 + 5n - 5$

$$a_n = \underline{5n - 11}$$

Regner ledd hvor $a_n = 189$:

$$5n - 11 = 189$$
$$5n = 200$$
$$n = 40$$

forts

2a) Sum av aritmetisk rekke gis som

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$$

$$S_{40} = \frac{(-6 + 189)}{2} \cdot 40$$

$$S_{40} = \frac{183}{2} \cdot 40 = 183 \cdot 20 = \underline{3660}$$

Summen av rekken blir 3660

2b) $72 - 36 + 18 - 9 + \ldots$

Geometrisk rekke som e konvergent fordi $k \in \langle -1, 1 \rangle$

$$S = \frac{a_1}{1-k}$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

$$S = \frac{72}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{72}{\frac{3}{2}}$$

$$S = \underline{48}$$

3a) $P(x) = x^3 - 19x + 30$

$P(x) : (x-2)$ gir $(x^3 - 19x + 30) : (x-2) = \underline{x^2 + 2x - 15}$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - 2x^2) \\ \hline \quad 2x^2 - 19x \\ \quad -(2x^2 - 4x) \\ \hline \qquad -15x + 30 \\ \qquad -(-15x + 30) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

fra opg a).

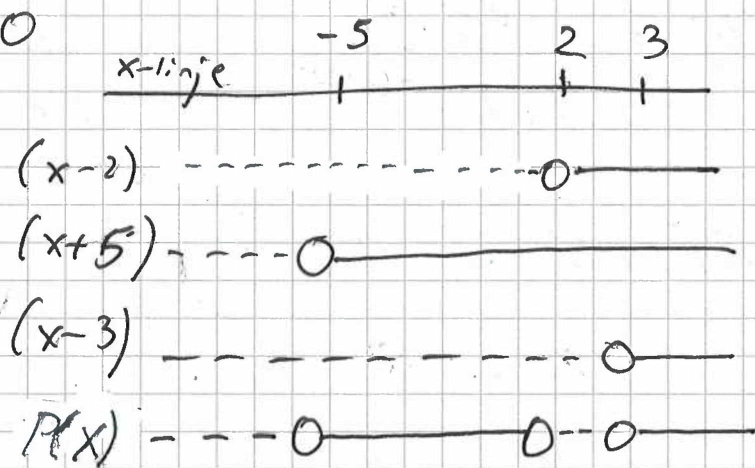
2b) $P(x) = (x-2)\cdot(x^2+2x-15)$

Bruker ABC på $(x^2+2x-15)$

$x = -5$, $x = 3$

Gir $P(x) = (x-2)(x+5)(x-3)$

$P(x) \geq 0$



$\underline{P(x) \geq 0 \text{ for } x \in [-5, 2] \vee [3, \rightarrow\rangle}$

2c) $$\underbrace{\frac{x^3-19x+30}{x^3-2x^2-9x+18}}_{} = \frac{(\cancel{x-2})(x+5)(\cancel{x-3})}{(x+3)(\cancel{x-3})(\cancel{x-2})}$$

Bruker polynomdiv. på denne, faktoriserer

Brøken blir $\underline{\dfrac{x+5}{x+3}}$

4a) $f(x) = \dfrac{A}{1+Be^{-kx}}$, $k > 0$

Logistisk funksjon. A er "taket" i funksjonen

$A = 10.$

Regner nå ut B:

$$f(0) = \frac{10}{1+Be^{-k\cdot 0}} = \frac{10}{1+B} = 2$$

$$2(1+B) = 10$$

$$2B = 8$$

$$\underline{B = 4}$$

Svar: $\underline{A = 10 \,,\; B = 4}$

4b) Deriverer først $f(x)$.

$u = 10 \,,\; u' = 0$

$v = 1+4e^{-kx} \,,\; v' = -4ke^{-kx}$

$$f'(x) = \frac{0\cdot(1+4e^{-kx}) - 10\cdot(-4ke^{-kx})}{(1+4e^{-kx})^2}$$

$$f'(x) = \frac{40ke^{-kx}}{(1+4e^{-kx})^2}$$

Ser at den røde linjen har stigningstall (a) $= \frac{4}{5}$

Gir

$$f'(0) = \frac{40ke^0}{(1+4e^0)^2} = \frac{4}{5}$$

Løser mhp k.

$$\frac{40k}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\underline{k = \frac{1}{2}}$$

5a) og b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

(1) $f(1) = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) = 6$

(2) $f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) = 2$

(3) $f'(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) + c = 0$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ \text{gir}\quad a + b + c = 6 \\ &(2)\ \text{gir}\quad -a + b - c = 2 \\ &(3)\ \text{gir}\quad 27a + 6b + c = 0 \end{aligned}\right\}$$ Løser med innsettingsmetoden

$\underline{a = -1,\ b = 4,\ c = 3}$

6a) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$ $\quad D_f = \langle 0, \rightarrow \rangle$

nullpunkter

Substitusjon $\ln x = u$

$$\underbrace{u^2 - 2u - 3 = 0}_{\text{ABC gir}\ u_1 = -1\quad u_2 = 3}$$

$\ln x = -1$, $\ln x = 3$

$x = e^{-1}$ $\quad x = \underline{e^3}$

$x = \underline{\dfrac{1}{e}}$

6b) $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 3$

på første ledd kjernederivasjon

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot 2u - 2 \cdot \frac{1}{x}$$

Indre f. $\rightarrow \ln x = u$, $u' = \frac{1}{x}$

Ytre f. $\rightarrow u^2$, ytre' $= 2u$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \ln x}{x} - \frac{2}{x}$$

$$\underline{f'(x) \quad \frac{2\ln x - 2}{x}}$$

ekstremalpunkter:

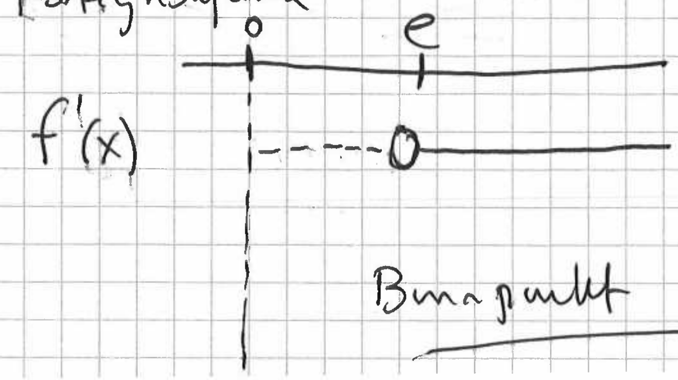
$$f'(x) = 0 \quad \text{gir} \quad \frac{2\ln x - 2}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\ln x - 2 = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

Fortegnskjema



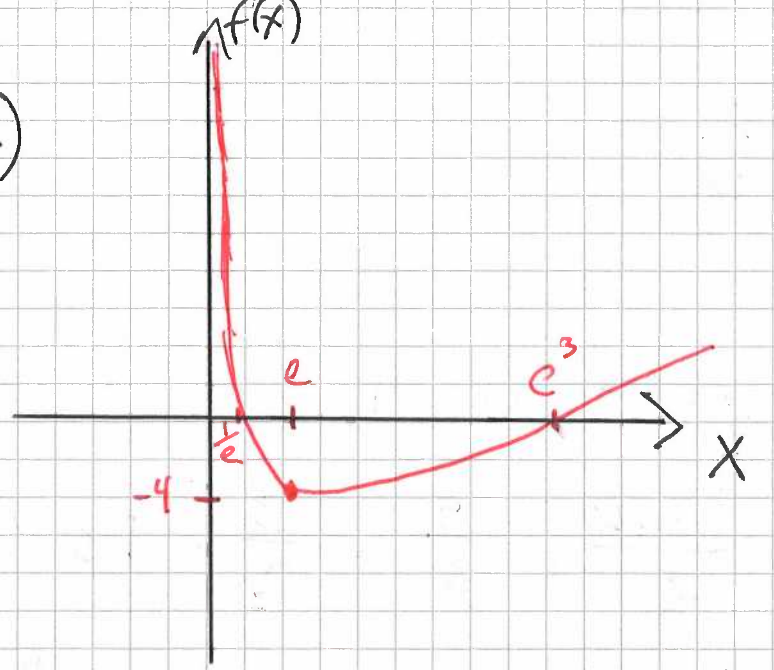
Bunnpunkt for $x = e$

$f(e) = (\ln e)^2 - 2\ln e - 3$

$f(e) = -4$

<u>Bunnpunkt for $(e, -4)$</u>

6d)



7a)

$\mu = 60kg$ $\sigma = 6kg$ Vet at $\frac{x-\mu}{\sigma} = Z$

$P(57 \leq X \leq 63)$

regner først om til standardnormalf.

$Z_{57} = \frac{57-60}{6} = \frac{-1}{2}$ $Z_{63} = \frac{63-60}{6} = \frac{1}{2}$

$P(57 \leq X \leq 63) = P(Z_{63} \leq \frac{1}{2}) - P(Z_{57} \leq -\frac{1}{2})$

Slår opp i tabellen:

$0,6915 - 0,3085 = \underline{0,383}$

7b) $\displaystyle\int_{69}^{\infty} f(x)\,dx$

Regner først z-verdien av 69.

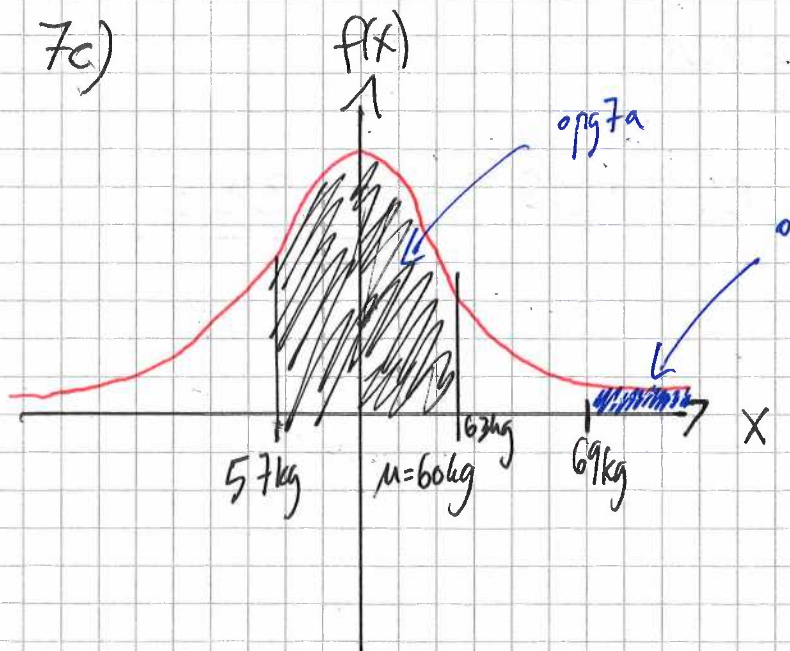
- Z_{69} gir $\dfrac{69-60}{6} = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

$1 - P(z \le 1{,}5) = 1 - 0{,}9332$ ← fra tabellen

$\displaystyle\int_{69}^{\infty} f(x)\,dx$ gir $\approx \underline{0{,}668}$

Betyr at ca 6.9 % av sauene har vekt på 69 kg eller mer.

7c)



7d)

Tilnærming til normalfordelingen
Sentralgrensesetningen gir

$\mu_{X_\Sigma} = n \cdot \mu$

$\mu_{X_\Sigma} = 25 \cdot 60 = 1500\,kg$

$\sigma_{X_\Sigma} = \sqrt{n} \cdot \sigma$

$\sigma_{X_\Sigma} = \sqrt{25} \cdot 6 = 30\,kg$

$z_{1550} = \frac{1550 - 1500}{30} = \frac{5}{3}$

$P(X \leq 1550) = P(Z \leq \frac{5}{3}) = \underline{0,9525}$

Det er ca 0,9525 sjanse for at alle sauene kommer med på slaktebilen