

Løsningsforslag ordinær eksamen Vår 2020.

Oppgave 1

a) Først skriver vi alle røtter om til potenser og løser opp parentesene

$$\frac{\sqrt{5}(\sqrt[5]{a^2})^2 a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}(\sqrt{5}a^{\frac{1}{3}})^3} = \frac{5^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{2}{5}})^2 a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}(5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}})^3}$$
$$= \frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{5} \cdot 2} a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}5^{\frac{1}{2} \cdot 3} a^{\frac{1}{3} \cdot 3}},$$

deretter bruker vi regnereglene for å gange sammen

$$\frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{2}{5} \cdot 2} a^{\frac{1}{5}}}{a^{-1}5^{\frac{1}{2} \cdot 3} a^{\frac{1}{3} \cdot 3}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}}}{5^{\frac{3}{2}}a^{-1+1}}$$
$$= 5^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} a^{\frac{4}{5} + \frac{1}{5} - 0}$$
$$= \frac{a}{5}.$$

b) Husk at $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Dermed

$$\frac{5t^2 - 45}{t - 3} : \frac{t + 2}{3t^2 + 6t} = \frac{5t^2 - 45}{t - 3} \cdot \frac{3t^2 + 6t}{t + 2}.$$

Vi faktorerer ved å ta felles faktorer ut, og bruke konjugatsetninga

$$\frac{5t^2 - 45}{t - 3} \cdot \frac{3t^2 + 6t}{t + 2} = \frac{5(t^2 - 9)}{t - 3} \cdot \frac{3t(t + 2)}{t + 2}$$
$$= \frac{5(t - 3)(t + 3)}{t - 3} \cdot \frac{3t(t + 2)}{t + 2},$$

og forkorter

$$\frac{5(t - 3)(t + 3)}{t - 3} \cdot \frac{3t(t + 2)}{t + 2} = 5(t + 3)3t$$
$$= 15t(t + 3)$$
$$= 15t^2 + 45t.$$

c)

$$\ln x - \ln(x^2 - x) = 1 \quad x \in \langle 1, \rightarrow \rangle$$

$$\ln \frac{x}{x^2 - x} = 1$$

$$\frac{x}{x^2 - x} = e$$

$$x = e(x^2 - x)$$

$$ex^2 - ex - x = 0$$

$$x(ex - e - 1) = 0$$

$$ex - e - 1 = 0 \quad x = 0$$

$$ex = e + 1 \quad \emptyset$$

$$x = \frac{e + 1}{e}$$

$$\underline{\underline{L = \frac{e + 1}{e}}}$$

Oppgave 2

a) $(3x^3 - 4x^2 - 14x + 11) : (x^2 - 3x + 2) = 3x + 5 + \frac{-5x+1}{x^2-3x+2}$

b) Vi bruker setninga som sier at resten ved $P(x) : (x - x_0)$ kan regnes direkte som $r = P(x_0)$. Her er $x_0 = -3$, og dermed

$$r = (-3)^3 - 13(-3) - 12 = -27 + 39 - 12 = 0.$$

Siden resten ved polynomdivisjonen er 0 er $x + 3$ en faktor i polynomet.

c) Først trekker vi fra 12 på hver side og får $x^3 - 13x - 12 > 0$. Vi må faktorisere tredjegradsuttrykket, og bruker fra b) at $x + 3$ er en faktor. Polynomdivisjon gir

$$(x^3 - 13x - 12) : (x + 3) = x^2 - 3x - 4.$$

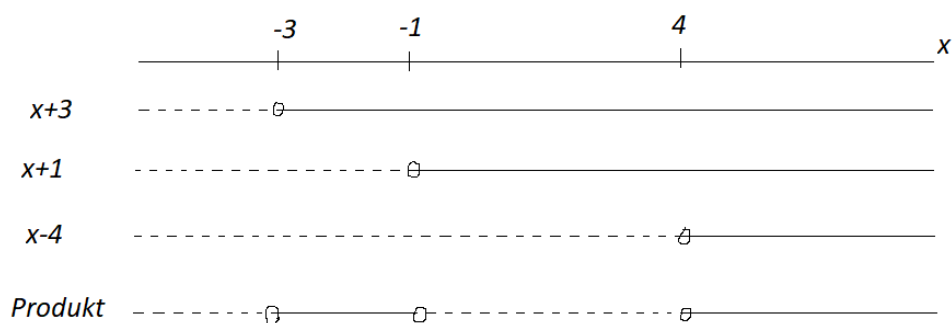
Vi bruker andregadsformelen til å finne nullpunkt til $x^2 - 3x - 4$,

$$x_{\pm} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} \right\},$$

og vi får $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$. Dermed

$$x^3 - 13x - 12 = (x + 3)(x + 1)(x - 4),$$

med fortegnslinje



Vi leser av fortegnslinja $-3 < x < -1$ eller $4 < x$.

Oppgave 3

a)

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$g'(x) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

b)

$$f(x) = x(x+3)^3$$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = (x+3)^3 \quad v' = 3(x+3)^2$$

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot (x+3)^3 + x \cdot 3(x+3)^2 = (x+3)^2(x+3+3x) =$$

$$\underline{\underline{= (x+3)^2(4x+3)}}$$

c)

$$\frac{1}{2x}y' = e^{-y}$$

$$\frac{1}{2x} \frac{dy}{dx} = e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = 2x dx$$

$$e^y \cdot dy = 2x \cdot dx$$

$$\int e^y \cdot dy = \int 2x \cdot dx$$

$$e^y = x^2 + C$$

$$\ln e^y = \ln(x^2 + C)$$

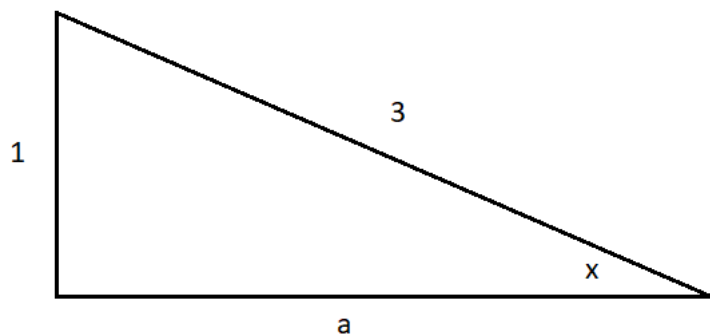
$$y = \ln(x^2 + C)$$

$$y = 1 \quad \text{når} \quad x = 0$$

$$1 = \ln(0 + C) \rightarrow \ln C = 1 \rightarrow C = e$$

$$\underline{\underline{y = \ln(x^2 + e)}}$$

Oppgave 4



$$1^2 + a^2 = 3^2$$

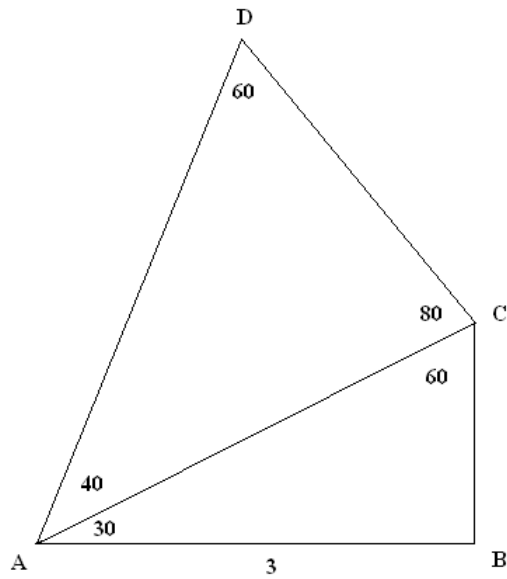
$$a = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot -\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\tan x = -\frac{2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

Oppgave 5



$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$AC = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\cos 30^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{2\sqrt{3}}}$$

b)

$$\angle D = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin 80^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$$

$$AD = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} = \underline{\underline{3.94}}$$

c)

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3.94 \cdot \sin 40^\circ = \underline{\underline{6.98}}$$

Oppgave 6

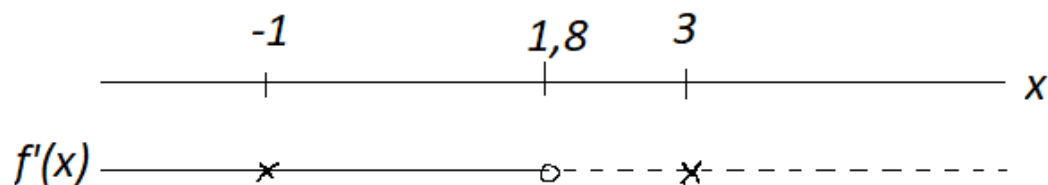
- a) Vi ser av de vertikale hjelpelinjene at funksjonen har vertikale asymptoter $x = -1$ og $x = 3$. Den skrå hjelpelinjen angir en skrå asymptote. Vi ser at linja går gjennom blant annet punktene $(0,3)$ og $(4,5)$. Det gir stigningstall $a = \frac{5-3}{4-0} = \frac{1}{2}$, og fra ettpunktsformelen får vi

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0),$$

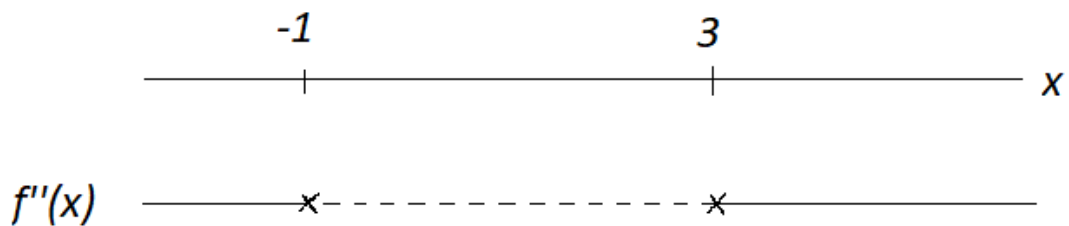
som kan skrives

$$y = \frac{1}{2}x + 3.$$

- b) Fortegnslinja til den deriverte er



Grafen stiger fram til $x \approx 1,8$, og synker deretter. Legg merke til at de deriverte ikke er definert for $x = -1$ eller $x = 3$. Den andrederiverte har fortegnslinje



Vi ser at grafen krummer oppover (er konveks) for $x < -1$ og $x > 3$, og nedover (er konkav) for $-1 < x < 3$.

- c) Vi ser at det er ett toppunkt i cirka $(1,8, 2,9)$ og ett bunnpunkt i cirka $(4,3, 5,8)$. Det er ingen vendepunkt.

Oppgave 7

$$a) \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = [4, 1, -1] + [(-2) - 2, 2 - 3, 1 - 0] = [4 + (-4), 1 + (-1), (-1) + 1] = [0, 0, 0] = \vec{0}$$

$\Rightarrow D(0,0,0)$. D ligger i origo.

$$b) \quad A_p = |\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}|$$

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} = [4, 1, -1]$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} = [-2, 2, 1]$$

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC} = [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2, (-1) \cdot (-2) - 4 \cdot 1, 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-2)] = [3, -2, 10]$$

$$A_p = |[3, -2, 10]| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 10^2} = \sqrt{113} \approx 10,63$$

$$c) \quad V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{3 \cdot V_{Pyramide}}{G}$$

$$G = A_p = \sqrt{113}$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}) \cdot \overrightarrow{DT} = \frac{1}{3} \cdot [3, -2, 10] \cdot [1, 1, 4] \\ = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 10 \cdot 4) = \frac{41}{3}$$

$$\Rightarrow h = \frac{3 \cdot \frac{41}{3}}{\sqrt{113}} = \frac{41}{\sqrt{113}} \approx 3,86$$

- d) Vi trenger et punkt, P_0 , i og en normalvektor, \vec{n} , til planet. Siden $ABCD$ er et parallelogram må også D ligge i planet. Da er det lettest å velge D , som er origo, som P_0 . Kryssproduktet, $\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}$, er et naturlig valg for normalvektoren.

\Rightarrow Planet gjennom A, B og C kan uttrykkes

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$3(x - 0) + (-2)(y - 0) + 10(z - 0) = 0$$

$$3x - 2y + 10z = 0$$

$$e) \quad \angle BDT = \cos^{-1} \left(\frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DT}}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{DT}|} \right)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OB} = [2, 3, 0]$$

$$\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{OT} = [1, 1, 4]$$

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DT} = [2, 3, 0] \cdot [1, 1, 4] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 5$$

$$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{DT}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow \angle BDT = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{18}}\right) \approx 70,92^\circ$$

Oppgave 8

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \\ 2 \sin^2 x &= 1 - \cos 2x \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

q.e.d.

b) Benytt formelen i a) til å bestemme Amplituden, likevektslinjen og perioden til

$$f(x) = \sin^2 x.$$

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

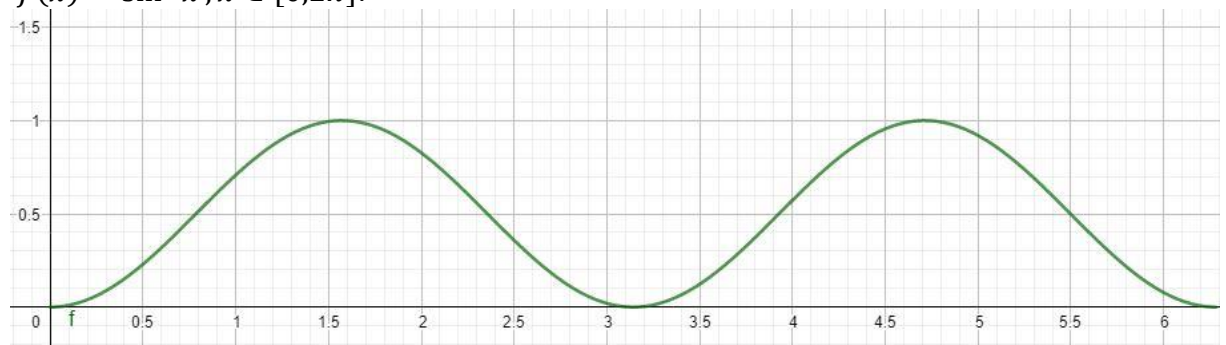
Gir

$$\text{Amplitude, } A = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\text{Likevektslinje, } d = \frac{1}{2}$$

$$\text{Svingetall, } k = 2 \Rightarrow \text{Perioden } p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

c) $f(x) = \sin^2 x, x \in [0, 2\pi]$:



d) Avlest fra grafen til $f(x) = \sin^2 x$: $V_f = [0, 1]$

$$\text{e) } \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \sin^2 x \, dx &= \sin x \cdot (-\cos x) - \int \cos x \cdot (-\cos x) dx = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \\ &\Rightarrow \\ 2 \int \sin^2 x \, dx &= x - \sin x \cos x + C' \\ \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C \end{aligned}$$

e) og f) blir det samme da $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$