Løsningsforslag eksamen S1 våren 2021

Del 1

Oppgave 1

a) Venstresiden er et fullstendig kvadrat og kan derfor faktoriseres ved hjelp av andre kvadratsetning.

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x-2)^2 = 0$$
$$\underline{\underline{x = 2}}$$

b)

$$x(x-3)(x+2) = 0$$
$$gir$$
$$x = 0 \vee (x-3) = 0 \vee (x+2) = 0$$
$$så$$
$$\underline{\underline{x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2}}$$

c) *NB!* Her ser vi at vi må ha $x < 3$

$$\lg(3-x) = 2$$
$$10^{\lg(3-x)} = 10^2$$
$$3 - x = 100$$
$$x = 3 - 100$$
$$\underline{\underline{x = -97}}$$

Konstaterer at løsningen er gyldig, da $-97 < 3$.

Oppgave 2

a)

$$\frac{(2a)^2 \cdot (ab^3)^{-1}}{4ab^2 \cdot (a^0 b^{-1})^5} = \frac{2^2 \cdot a^2 \cdot a^{-1} \cdot b^{-3}}{4ab^2 \cdot 1 \cdot b^{-5}} = \frac{4 \cdot a^{2-1} \cdot b^{-3}}{4 \cdot a \cdot b^{2-5}} = \frac{a \cdot b^{-3}}{a \cdot b^{-3}} = \underline{\underline{1}}$$

b)

$$\lg(16a)-\lg\left(\frac{a}{2}\right)+\lg\left(\frac{1}{32}\right)=\lg 16+\lg a-(\lg a-\lg 2)+\lg 1-\lg 32$$
$$=\lg 16+2\lg a+\lg 2+0-\lg 32$$
$$=2\lg a+\lg 16+\lg 2-\lg 32$$
$$=2\lg a+\lg(16\cdot 2)-\lg 32$$
$$=\lg a+\lg 32-\lg 32$$
$$=\underline{\underline{\lg a}}$$

Oppgave 3

Lar x være prisen for voksne og y være prisen for barn, og setter opp to likninger av to ukjente ut fra informasjonen i oppgaveteksten.

$I.\quad 2x+3y=860$

$II.\quad 3x+2y=940$

Legger likningene sammen og får:

$$5x+5y=1800 \quad |\cdot\frac{1}{5}$$
$$x+y=360$$

<u>Lisa må betale til sammen 360 kroner for billetter til én voksen og ett barn.</u>

Oppgave 4

$I.\quad 4x+2y=4 \Leftrightarrow y=2-2x$

$II.\quad x^2-y=-2$

Setter I inn i II:

$$x^2-(2-2x)=-2$$
$$x^2+2x-2=-2$$
$$x^2+2x=-2+2$$
$$x^2+2x=0$$
$$x(x+2)=0$$
$$gir$$
$$x=0\vee x=-2$$

$x=0$ gir $y=2-2\cdot 0=2$ og $x=-2$ gir $y=2-2(-2)=2+4=6$

$$\underline{\underline{x=-2\wedge y=6 \quad\vee\quad x=0\wedge y=2}}$$

Oppgave 5

a)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 0 \\
&\quad gir \\
x^4 - 2x^2 &= 0 \\
x^2\left(x^2-2\right) &= 0 \\
x^2\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{\text{Nullpunktene er } x = -\sqrt{2} \vee x = 0 \vee x = \sqrt{2}}}$$

b)

$$g'(x) = 4x^3 - 4x$$

$så$

$$g'(-2) = 4(-2)^3 - 4(-2) = 4(-8) + 8 = -32 + 8 = -24$$

$$\underline{\underline{\text{Den momentane vekstfarten til } g \text{ er } -24 \text{ når } x = -2}}$$

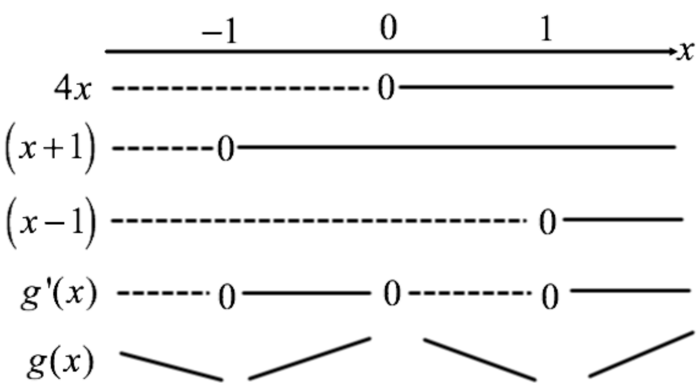
c)

$$g'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2-1\right) = 4x\left(x+1\right)\left(x-1\right)$$

d)

Nullpunktene til den deriverte er da $x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1$.

Tegner fortegnslinjer:



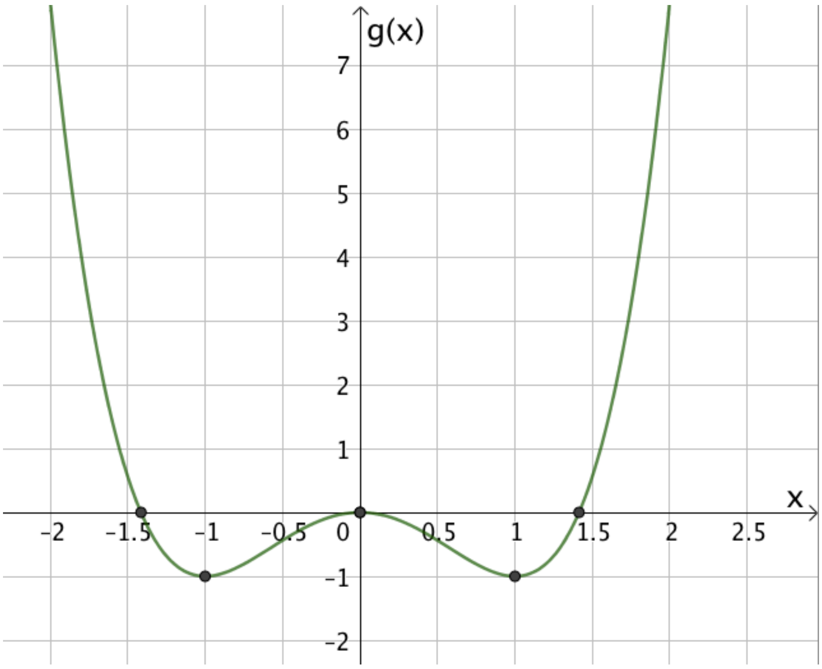
$$g(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 = 1 - 2 = -1$$

$$g(0) = 0$$

$$g(1) = 1^4 - 2\cdot 1^2 = 1 - 2 = -1$$

<u>Grafen til *g* har bunnpunkter i (-1, -1) og (1,-1) og toppunkt i (0,0).</u>

e) Markerer nullpunktene, bunnpunktene og toppunktet i et koordinatsystem og tegner en jevn kurve gjennom disse.



$\sqrt{2} \approx 1{,}4$, men det er vanskelig å treffe nøyaktig på $\sqrt{2}$, så her må man bare gjøre så godt man kan. (Det er jo tross alt en skisse).

Oppgave 6

Her ser vi på uordnede utvalg uten tilbakelegging. Sannsynligheten for å trekke et defekt batteri, er i hvert trekk avhengig av utfallet i trekket/trekkene som allerede er gjort.
Vi har en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell, så ***<u>det er alternativ 1 som er riktig</u>***.

Altså $p = \dfrac{\binom{24}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{5}}$.

Dersom alternativ 2 skulle vært riktig, altså at vi hadde en binomisk sannsynlighetsmodell, måtte Maria lagt tilbake batteriene igjen etter hvert trekk, slik at sannsynligheten for å trekke et defekt batteri var lik i hvert trekk.

Da ville $p = \binom{5}{2} \cdot \left(\dfrac{8}{32}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{24}{32}\right)^3$ være sannsynligheten for at hun har trukket 2 defekte og 3 ikke-defekte batterier ved å trekke ett og ett batteri 5 ganger, og legge tilbake batteriet igjen etter hvert trekk.

Oppgave 7

a)

$$\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=0,622$$

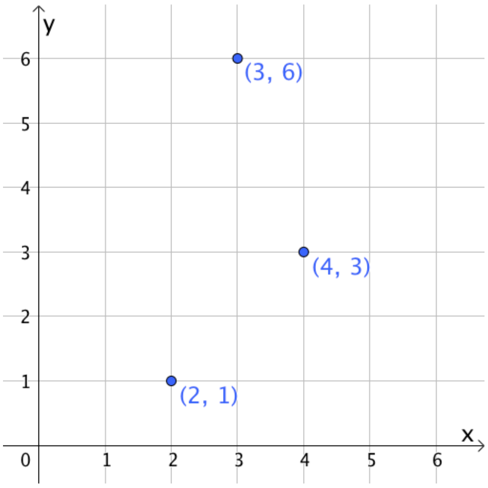
Sannsynligheten for at Lise ikke vinner på to lodd er 62,2 %.

b)

$$P(\text{Vinne minst én})=1-P(\text{Ingen gevinst})=1-\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=1-\frac{1}{3}=\underline{\underline{\frac{2}{3}\approx0,667=66,7\%}}$$

Oppgave 8

a)



Ei linje gjennom punktene (2,1) og (3,6) har stigningstall 5. Vi kan da regne oss tilbake fra punktet (2,1) og se at den vil krysse y-aksen i (0,-9).
Likningen for den rette linja gjennom (2,1) og (3,6) er $y=5x-9$

Ei linje gjennom punktene (2,1) og (4,3) har stigningstall 1. Vi kan da regne oss tilbake fra punktet (2,1) og se at den vil krysse y-aksen i (0,-1).
Likningen for den rette linja gjennom (2,1) og (4,3) er $y=x-1$

Ei linje gjennom punktene (3,6) og (4,3) har stigningstall -3. Vi kan da regne oss tilbake fra punktet (3,6) og se at den vil krysse y-aksen i (0,15).
Likningen for den rette linja gjennom (3,6) og (4,3) er $y=-3x+15$

Ulikhetene som avgrenser området T er da:

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix} y-5x\leq9 \\ y-x\geq-1 \\ y+3x\leq15 \end{bmatrix}}}$$

Her har jeg valgt å samle x og y på venstre side, men det er fullt mulig å bare erstatte likhetstegnet fra likningene med riktig ulikhetstegn.

b) Regner ut verdien av *S* i de tre hjørnene:

$$S(x,y) = -2x + 3y$$

gir

$$S(3,6) = -2\cdot 3 + 3\cdot 6 = -6 + 18 = 12$$
$$S(2,1) = -2\cdot 2 + 3\cdot 1 = -4 + 3 = -1$$
$$S(4,3) = -2\cdot 4 + 3\cdot 3 = -8 + 9 = 1$$

<u>Den største verdien *S* kan ha, dersom (*x,y*) skal ligge i området *T*, er 12</u>

c) $D(x,y) = -a\cdot x + 3y$

gir

$D(2,1) = -2a + 3$, $D(3,6) = -3a + 18$ og $D(4,3) = -4a + 9$

Da må vi ha

$$-2a + 3 < -3a + 18$$
$$-2a + 3a < 18 - 3$$
$$a < 15$$

samtidig som

$$-2a + 3 < -4a + 9$$
$$-2a + 4a < 9 - 3$$
$$2a < 6$$
$$a < 3$$

<u>*D* har sin minste verdi i punktet (2,1) når *a*<3, dersom (*x,y*) skal ligge i området *T*.</u>

Oppgave 9

Når *x* blir veldig stor, kan vi si $\frac{x+a}{bx+c} \approx \frac{x}{bx} = \frac{1}{b} = -1$, så $b = -1$.

Vi ser at $x = 1$ skal gi null i nevner (vannrett asymptote).

Dette gir:

$$-1\cdot 1 + c = 0$$
$$c = 1$$

Til slutt bruker jeg at $f(2) = 0$, slik at $2 + a = 0$, som betyr at $a = -2$.

Fortsetter på neste side

Vi har altså $f(x)=\frac{x-2}{1-x}$.

$$f(x)=2$$
$$\frac{x-2}{1-x}=2$$
$$x-2=2(1-x)$$
$$x-2=2-2x$$
$$x+2x=2+2$$
$$3x=4$$
$$\underline{\underline{x=\frac{4}{3}}}$$

Del 2

Oppgave 1

a)

$$\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{16}\cdot\frac{7}{15}=\frac{665280}{27907200}=\frac{77}{3230}\approx 0{,}024$$

<u>Sannsynligheten for at alle 6 er fra Høyre er omtrent 2,4 %</u>

b) Man kan trekke ut de andre 5 av 19 på $\binom{19}{5}=11628$ måter.

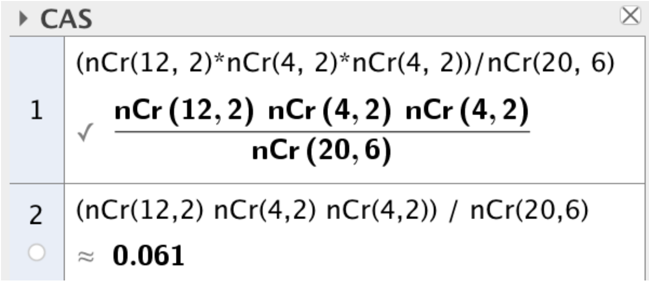
Det betyr at det finnes 11628 ulike sammensetninger der statsministeren kan inngå, av totalt $\binom{20}{6}=38760$ sammensetninger.

$$\frac{11628}{38750}\approx 0{,}300$$

<u>Sannsynligheten for at statsministeren er blant dem som trekkes ut er 30 %</u>

c) Vi har i hele denne oppgaven hatt en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell, med ulike delmengder, men først nå velger jeg å bruke den ”kjente formelen”.

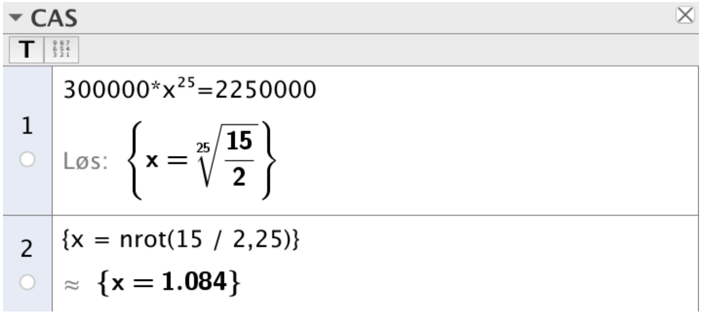
Bruker CAS til å regne ut $\dfrac{\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{20}{6}}$.



<u>Sannsynligheten for å trekke to ministere fra hvert av de tre partiene er 6,1 %</u>

Oppgave 2

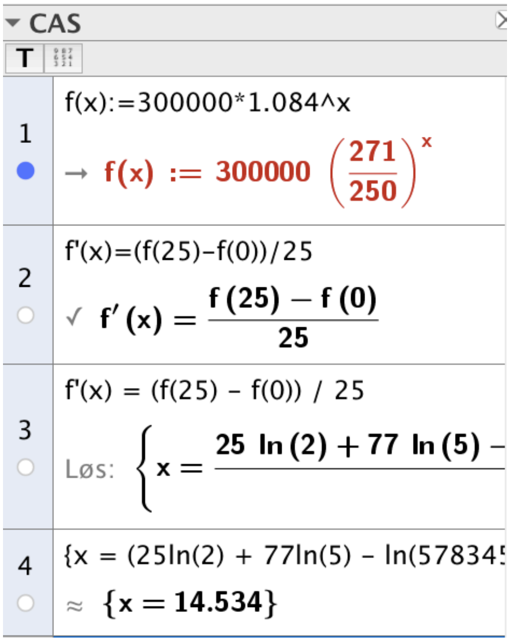
a)



<u>Verdien av leiligheten har i gjennomsnitt steget med 8,4 % per år i perioden.</u>

b) $\underline{\underline{f(x) = 300000 \cdot 1{,}084^x}}$

c)



Løsningen (som står i rad 4 i bildet over) forteller at omtrent halvveis inn i 2007 var den momentane vekstfarten til verdien av leiligheten lik den gjennomsnittlige vekstfarten i perioden fra starten av 1993 til starten av 2018.

d)

1	2250000*1.07^x=3000000 Løs: $\left\{x = \frac{-\ln(3) + \ln(4)}{\ln(107) - \ln(25) - \ln(4)}\right\}$
2	{x = (-ln(3) + ln(4)) / (ln(107) - ln(25) - ln(4))} $\approx$ $\{x = 4.252\}$

<u>Mariam kan regne med å få 3 000 000 kroner for leiligheten i 2022.</u>

Oppgave 3

a) Det gir ikke mening å produsere et negativt antall sko, så må ha $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
Informasjonen om tilskjæring gir:

$$0,5x + 0,35y \leq 2700 \quad |\cdot 2$$

$$x + 0,7y \leq 5400$$

Informasjonen om sammensetning gir:

$$0,4x + 0,5y \leq 2800 \quad |\cdot 2$$

$$0,8x + y \leq 5600$$

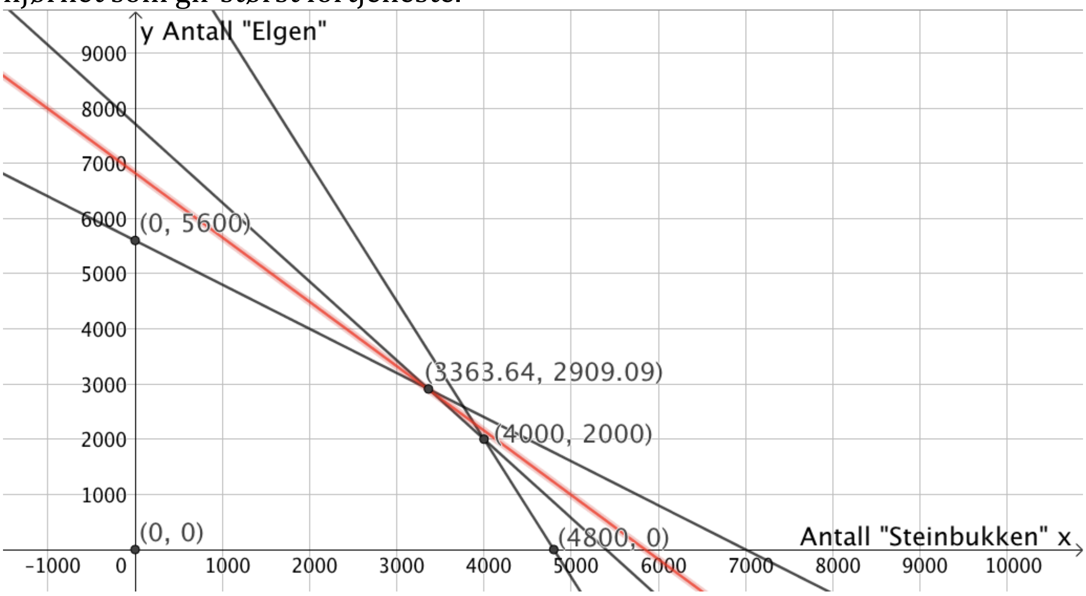
Informasjonen om ferdiggjøring gir:

$$0,25x + 0,1y \leq 1200 \quad |\cdot 4$$

$$x + 0,4y \leq 4800$$

Vi ser at *x* og *y* må tilfredsstille ulikhetene i oppgaveteksten. <u>Som skulle forklares</u>.

b) Tegner linjene som avgrenser området (x, y) må ligge i når ulikhetene er oppfylt og bestemmer skjæringspunktene som utgjør hjørnene i området ved hjelp av *"skjæring mellom to objekt"*.
Tegner så nivålinja $350x + 300y = 0$, som jeg parallellforskyver til jeg finner det hjørnet som gir størst fortjeneste.



<u>Vi ser at det ideelle er å produsere 3363 par av Steinbukken og 2909 par av Elgen</u>

c) Den største mulige fortjenesten bedriften kan ha før de justerer kapasitetene i avdelingene er $350kr \cdot 3363 + 300kr \cdot 2909 = 2049750kr$

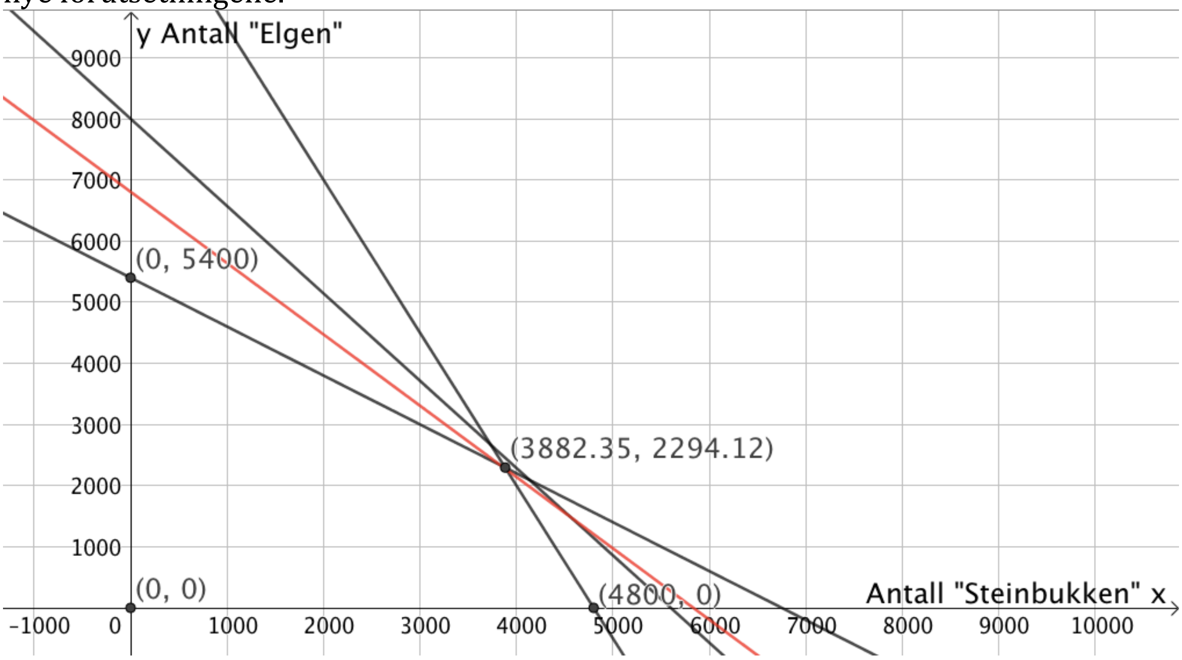
Ulikheten som beskriver begrensningene i tilskjæringsavdelingen endres fra
$x + 0,7y \leq 5400$
til

$$0,5x + 0,35y \leq 2800 \quad |\cdot 2$$
$$x + 0,7y \leq 5600$$

Ulikheten som beskriver begrensningene i sammensettingsavdelingen endes fra
$0,8x + y \leq 5600$
til

$$0,4x + 0,5y \leq 2700 \quad |\cdot 2$$
$$0,8x + y \leq 5400$$

Bytter ut linjene som avgrenser med tanke på kapasiteten til tilskjæringsavdelingen og sammensettingsavdelingen, slik at de passer med de nye forutsetningene.



Med den nye organiseringen, vil det ideelle være å produsere 3882 par av Steinbukken og 2294 par av Elgen.

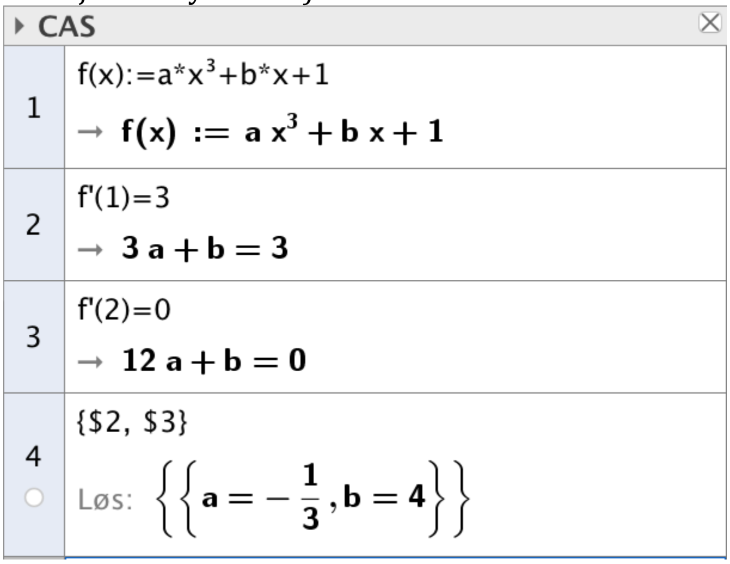
Da blir fortjenesten $350kr \cdot 3882 + 300kr \cdot 2294 = 2046900kr$

<u>Vi ser at beslutningen *ikke* er lønnsom</u>

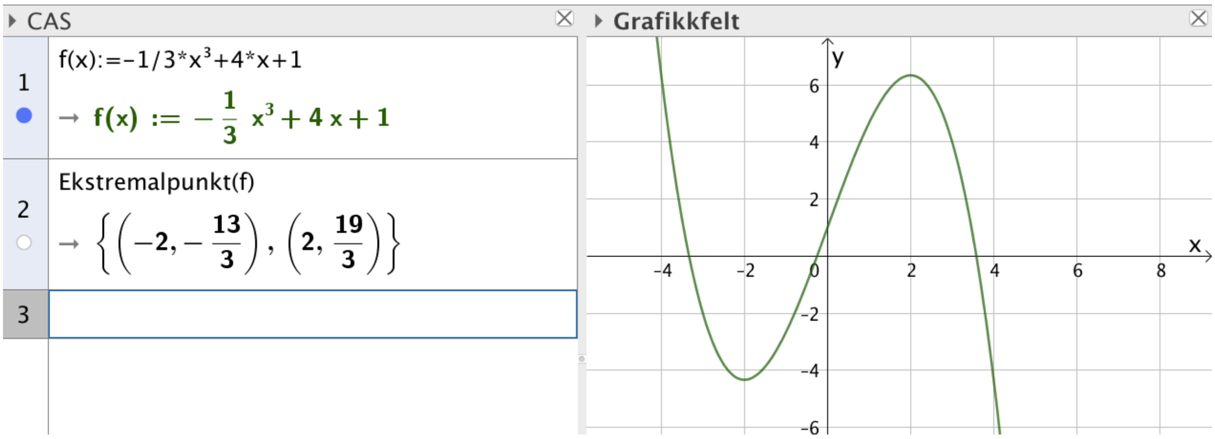
Vi kan faktisk se i bildet at den ene linja ligger helt utenfor området, noe som tyder på at man her vil ha ledig kapasitet man ikke får utnyttet grunnet begrensningene i de andre avdelingene.

Oppgave 4

Bruker CAS til å sette opp, og løse, et likningssett av to ukjente, slik at jeg kan bestemme funksjonsuttrykket til *f*.



Vi har altså $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.



$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har bunnpunkt i } \left(-2, -\frac{13}{3}\right) \text{ og toppunkt i } \left(2, \frac{19}{3}\right)}}$$