Løsningsforslag eksamen R1 vår 2021

Oppgave 1

a) $f(x) = 3x^3 - 4x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underline{\underline{9x^2 - 4 - \frac{1}{x^2}}}$$

b) $g(x) = \underbrace{3x^2}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}$

$$g'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$= 6x \cdot \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 6x \cdot \ln x + 3x$$

$$= \underline{\underline{3x(2\ln x + 1)}}$$

c) $h(x) = \sqrt{\underbrace{4x^2 - 5}_{u}}$

$$h'(x) = h'(u) \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-5}} \cdot 8x = \underline{\underline{\frac{4x}{\sqrt{4x^2-5}}}}$$

Oppgave 2

a) $\frac{3x}{x^2-x-2} - \frac{2x}{x+1} - \frac{2}{x-2}$

$$= \frac{3x}{(x+1)(x-2)} - \frac{2x \cdot (x-2)}{(x+1) \cdot (x-2)} - \frac{2 \cdot (x+1)}{(x-2) \cdot (x+1)}$$

$$= \frac{3x - 2x(x-2) - 2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3x - 2x^2 + 4x - 2x - 2}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-2x^2 + 5x - 2}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-2(x-\frac{1}{2})\cancel{(x-2)}}{(x+1)\cancel{(x-2)}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{-2x+1}{x+1}}}$$

Finner nullpunktene til $-2x^2 + 5x - 2$ for å faktorisere:

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \underline{\frac{-5 \pm 3}{-4}}$$

Gir $x_1 = \frac{-5+3}{-4} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-5-3}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$

Dermed er

$$-2x^2 + 5x - 2 = \underline{-2(x-\tfrac{1}{2})(x-2)}$$

b) $\ln(a \cdot b^2) - 8 \ln b + 2 \ln a^3 - 3 \ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$

$$= \ln a + \ln b^2 - 8 \ln b + 2 \cdot 3 \ln a - 3(\ln a^2 - \ln b^2)$$

$$= \ln a + 2 \ln b - 8 \ln b + 6 \ln a - 6 \ln a + 6 \ln b$$

$$= \underline{\underline{\ln a}}$$

Oppgave 3

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix}$

a) Hvis $\vec{a} \perp \vec{b}$, må $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Sjekker:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -4 + 3 = \underline{-1}$$

Siden $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$, er $\vec{a}$ <u>ikke</u> $\perp$ på $\vec{b}$.

b) Ønsker $\vec{c} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4r \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \\ 3s \end{bmatrix}$$

Gir likningssettet:

$$\text{I}: \ 4 = 4r - s$$
$$\text{II}: \ 14 = r + 3s$$

Ganger I med 3 og adderer:

$$\text{I}: \ 12 = 12r - 3s$$
$$\text{II}: \ 14 = r + 3s$$

$$\text{I} + \text{II}: \ 26 = 13r$$

$$\boxed{r = 2}$$

Setter $r = 2$ inn i I:

$$4 = 4r - s$$
$$4 = 4 \cdot 2 - s$$
$$4 = 8 - s \Rightarrow \boxed{s = 4}$$

Løsning: $r = 2$ og $s = 4$

Oppgave 4

A: Produserer 40% , 20% av disse er feil (F)

B: Produserer 60% , 10% av disse er feil (F)

Gir: $P(A) = 0{,}40$ $\quad P(F \mid A) = 0{,}20$

$P(B) = 0{,}60$ $\quad P(F \mid B) = 0{,}10$

a) $P(\text{"Feil på deksel"}) = P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F)$

$$= P(A) \cdot P(F \mid A) + P(B) \cdot P(F \mid A)$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}60 \cdot 0{,}10$$

$$= 0{,}08 + 0{,}06 = 0{,}14 = \underline{\underline{14\%}}$$

b) $P(\text{"produsert av A hvis feil"}) = P(A \mid F) = \dfrac{P(A) \cdot P(F \mid A)}{P(F)} = \dfrac{0{,}40 \cdot 0{,}20}{0{,}14}$

$$= \frac{0{,}08}{0{,}14} = \frac{8}{14} = \underline{\underline{\frac{4}{7}}} \quad (\approx 0{,}57 = 57\%)$$

(Oppgaven kan også løses vha. krysstabell:

	Feil	Ikke feil	Sum
A	8%	32%	40%
B	6%	54%	60%
Sum	14%	86%	100%

↑ svaret på a), og $\frac{8\%}{14\%} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$ som svaret på b)

Oppgave 5

$f(x) = x^3 - 14x + 15$

a) Finner koordinatene til topp/bunn ved å sette $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 14$$

$$3x^2 - 14 = 0 \implies 3x^2 = 14 \implies x^2 = \frac{14}{3}$$

Gir $\underline{\underline{x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}}}}$

Ser fra grafen at den negative er for toppunktet og den positive for bunnpunktet.

b) For å løse $f(x) > 0$ ønsker jeg å faktorisere $f(x)$.

Ser at $f(3) = 0$, dermed er $f(x)$ delelig med $(x-3)$.

Utfører divisjonen:

$$(x^3 - 14x + 15) : (x-3) = \underline{x^2 + 3x - 5}$$
$$\underline{-(x^3 - 3x^2)}$$
$$3x^2 - 14x + 15$$
$$\underline{-(3x^2 - 9x)}$$
$$-5x + 15$$
$$\underline{-(-5x + 15)}$$
$$0$$

Dermed er $f(x) = (x^2 + 3x - 5)(x-3)$

Finner nullpunktene til $x^2 + 3x - 5 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \underline{\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}}$$

- Da har $f(x)$ nullpunkter i

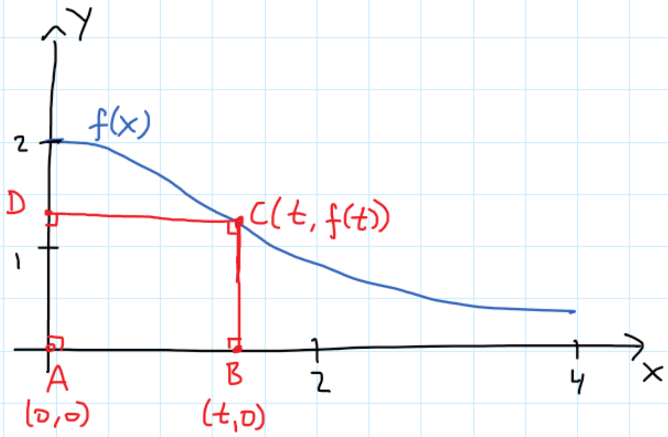
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \text{ og } x_3 = 3$$

- Fra grafen ser vi at $f(x) > 0$ mellom x_1 og x_2, og etter x_3.
- Løsningen blir dermed

$$\underline{\underline{x \in \left\langle \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \right\rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}$$

Oppgave 6

$$f(x) = \frac{8}{x^2+4} \quad , \quad x > 0$$



Arealet av rektangelet er gitt ved

$$A(t) = \underbrace{t}_{\text{lengde}} \cdot \underbrace{f(t)}_{\text{bredde}}$$

$$= t \cdot \frac{8}{t^2+4} = \frac{8t}{t^2+4}$$

- Finner det største arealet ved å finne toppunktet til $A(t)$ ved derivasjon:

$$A'(t) = \left(\frac{8t}{t^2+4}\right)'$$

Brøkregelen: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{8\cdot(t^2+4) - 8t\cdot 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{8t^2+32-16t^2}{(t^2+4)^2} = \frac{-8t^2+32}{(t^2+4)^2}$$

- Nevneren er alltid positiv, så toppunktet er der telleren er 0:

$$-8t^2+32 = 0 \Rightarrow 8t^2 = 32$$

$$t^2 = 4$$

$$t = \pm 2$$

- $t = -2$ er utenfor definisjonsområdet, så det maksimale arealet vil inntreffe når $\underline{\underline{t = 2}}$

(Kan og kontrollere at $f'(x)$ endrer fortegn her, men det er egentlig åpenbart fra figuren at dette må være et toppunkt)

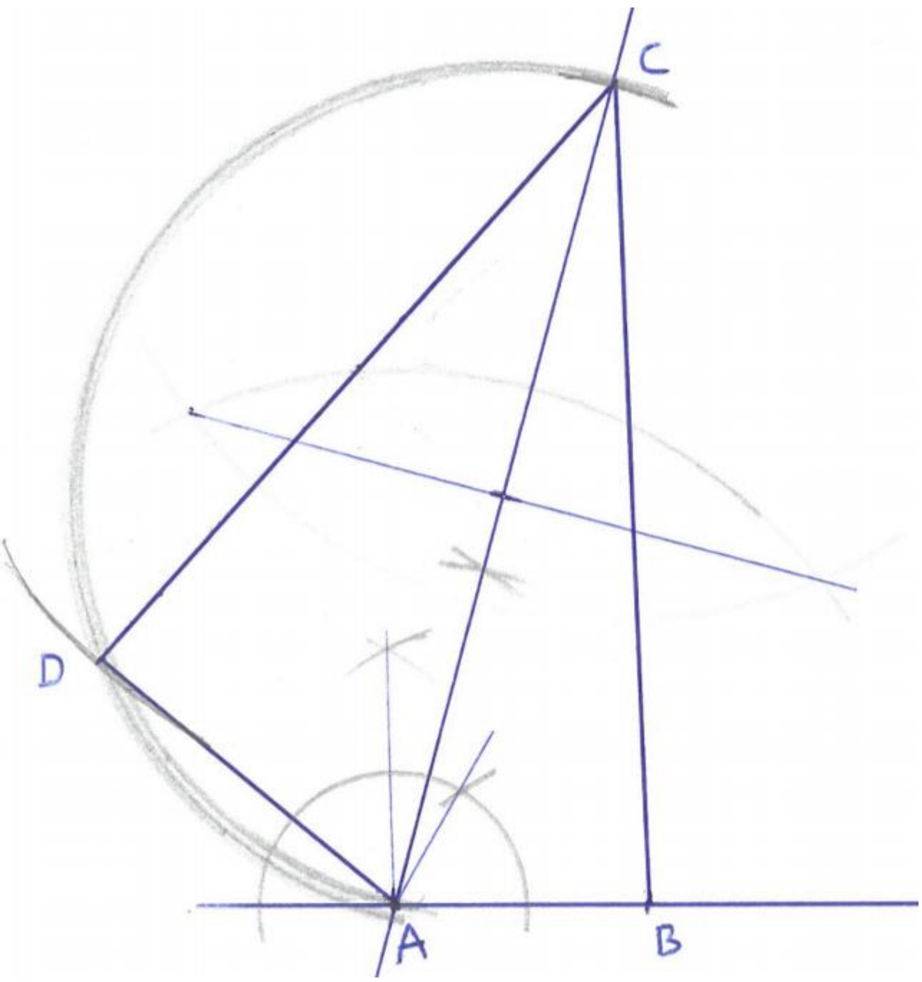
Oppgave 7

□ABCD $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 10\text{ cm}$, $CD = 9\text{ cm}$

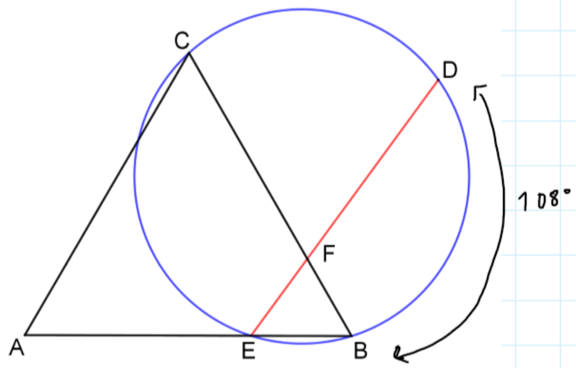
$\angle ADC = 90^\circ$ og $\angle BAC = 75^\circ$

Konstruksjon:

1. Setter av linjestykket $AB = 3\text{ cm}$
2. Konstruerer 75° i A ved å først konstruere både en 90° og en 60°, og halverer mellom disse.
3. Slår en bue om A på 10 cm, skjæringspunktet med vinkelen på 75° danner punkt C.
4. Finner midtpunktet på AC ved å danne en midtnormal. Slår en halvsirkel om AC.
5. Punkt D må ligge på halvsirkelen, siden $\angle ADC = 90^\circ$ (Tales' setning). Slår en bue om C på 9 cm for å finne D.
6. □ABCD er konstruert.



Oppgave 8



a) $\angle BED$ er en periferivinkel over buen BD. Den er dermed halvparten av buen/sentralvinkelen.

Ergo er $\underline{\underline{\angle BED = 54°}}$

b) $\angle CFD = \angle BFE$ (toppvinkler)

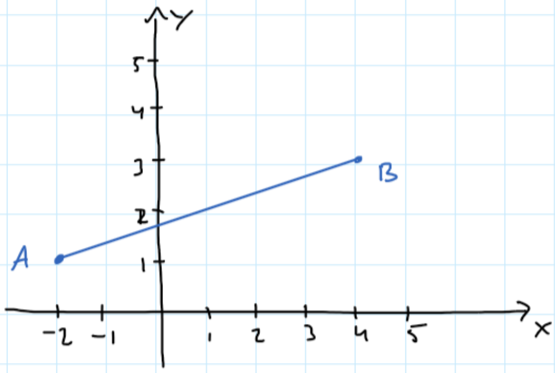
Vet at i $\triangle EBF$ er $\angle E = 54°$, og $\angle B = 60°$ (siden $\triangle ABC$ er likesidet).

Dermed er $\angle F = 180° - 60° - 54°$
$= 180° - 114° = 66°$.

Ergo er også $\underline{\underline{\angle CFD = 66°}}$

Oppgave 9

Linje ℓ gjennom $A(-2, 1)$ og $B(4, 3)$.



a) Parameterfremstilling gitt ved

$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

Bruker startpunkt A, så $(x_0, y_0) = (-2, 1)$. Ser fra figuren at retningsvektoren $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, som gir

$$\underline{\underline{\ell: \begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}}}$$

b) Skjæring med x-aksen: Der $y = 0$.

$$y = 1 + 2t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{1}{2}}$$

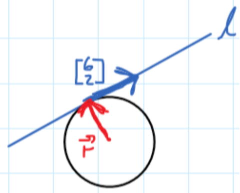
Setter inn i $x = -2 + 6t = -2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 - 3 = \underline{\underline{-5}}$

Skjæring med y-aksen: Der $x = 0$.

$$x = -2 + 6t = 0 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$$

Setter inn i $y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$

c) Sirkel, sentrum i $S(1,0)$ og tangerer ℓ.



Om sirkelen tangerer ℓ, må vektoren fra sentrum til tangeringspunktet stå vinkelrett på retningen til ℓ:

$$\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

Kaller tangeringspunktet (x, y), da er $\vec{r} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y \end{bmatrix}$

Det gir $\vec{r} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (x-1) \cdot 6 + y \cdot 2 = 0$

$$\boxed{6x - 6 + 2y = 0}$$

Punktet som oppfyller denne likningen må også ligge på ℓ, og oppfylle $\begin{cases} x = -2 + 6t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Setter inn for å finne t:

$$6 \cdot (-2 + 6t) - 6 + 2(1 + 2t) = 0$$
$$-12 + 36t - 6 + 2 + 4t = 0$$
$$40t = 16$$
$$t = \frac{16}{40} = \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5}}$$

Setter inn $t = \frac{2}{5}$ for å finne punktet:

$$x = -2 + 6t = -2 + 6 \cdot \frac{2}{5} = -2 + \frac{12}{5} = -\frac{10}{5} + \frac{12}{5} = \underline{\frac{2}{5}}$$

$$y = 1 + 2t = 1 + 2 \cdot \frac{2}{5} = 1 + \frac{4}{5} = \underline{\frac{9}{5}}$$

Tangerer altså i $\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$

Lengden av $\vec{r}$ gir radien. $\vec{r} = \begin{bmatrix} 2/5 - 1 \\ 9/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$

$$|\vec{r}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{81}{25}} = \sqrt{\frac{90}{25}} = \sqrt{\frac{18}{5}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2}{5}} = \underline{\underline{3\sqrt{\frac{2}{5}}}}$$

Løsningsforslag eksamen R1 2021 (Del 2)

Oppgave 1

20 ministre – 12 fra H, 4 fra V, 4 fra KrF. Trekkes tilfeldig 6 stykker.

Dette blir en *hypergeometrisk* situasjon, hvor vi har tre grupper og 6 stk trekkes fra hele mengden.

a) $P(\text{alle seks fra H}) = 0{,}024 = \underline{\underline{2{,}4\ \%}}$

Løsning i CAS (to alternativer):

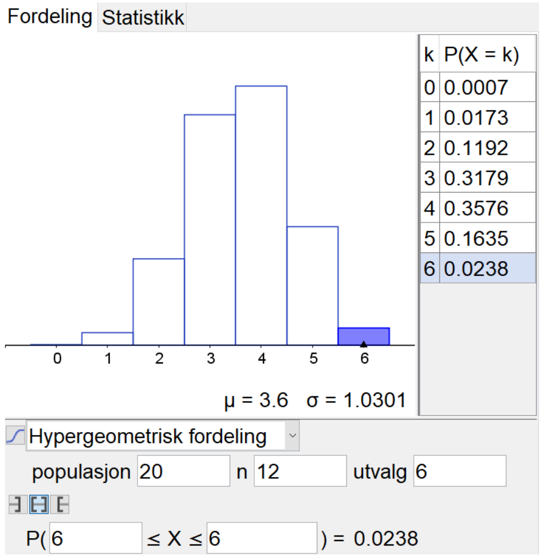
nCr(12, 6)/nCr(20, 6)

≈ **0.024**

12/20 * 11/19 * 10/18 * 9/17 * 8/16 * 7/15

≈ **0.024**

Løsning med Sannsynlighetskalkulator:



b) $P(\text{statsministeren trekkes ut}) = 0{,}3 = \underline{\underline{30\%}}$

Løsning i CAS (to alternativer):

nCr(1, 1) * nCr(19, 5) / nCr(20, 6)

≈ **0.3**

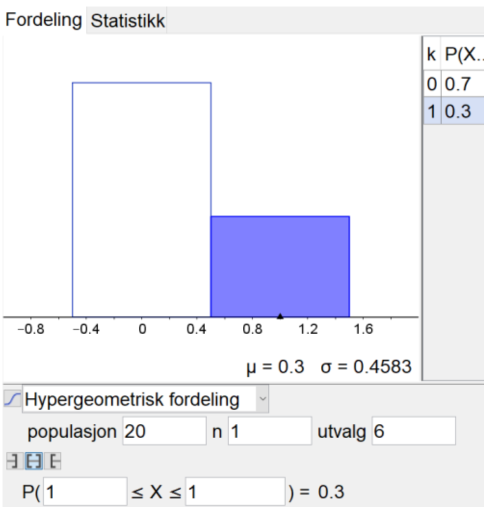
Hypergeometrisk sannsynlighet hvor de to gruppene er «statsministeren» og «resten».

1 - 19/20 * 18/19 * 17/18 * 16/17 * 15/16 * 14/15

≈ **0.3**

1 – P(statsminister trekkes *ikke* ut)

Løsning med sannsynlighetskalkulator:



c) $P(2 \text{ fra H}, 2 \text{ fra V og } 2 \text{ fra KrF}) = 0{,}061 = \underline{\underline{6{,}1\%}}$

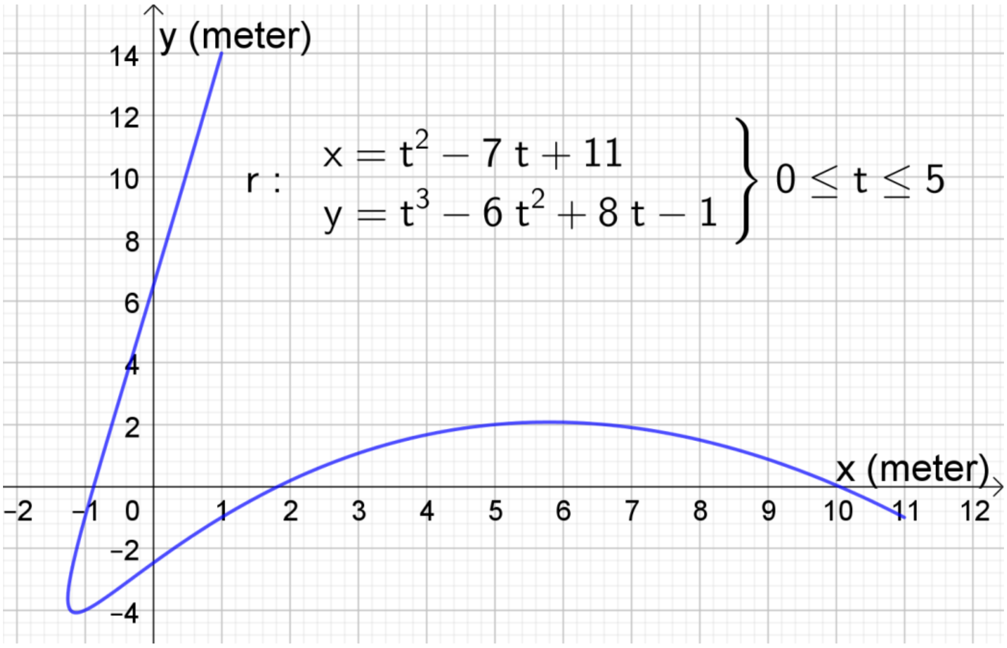
Her får vi $\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{20}{6}}$. Løser i CAS:

nCr(12, 2) * nCr(4, 2) * nCr(4, 2) / nCr(20, 6)

$\approx$ **0.061**

Oppgave 2

a) Tegner kurven i GeoGebra:



Merk: Det stod ikke i oppgaveteksten hva benevningen på x og y skulle være, kun at tiden t var i sekunder. Her har jeg kun antatt at det var meter, siden vi senere skal bestemme farten. Men mer korrekt kunne da være å kun si at benevningen er «lengde-enheter».

b) Finner banefarten etter 1 sekund i CAS:

r'(1)

$\approx$ **(−5, −1)**

abs(r'(1))

$\approx$ **5.099**

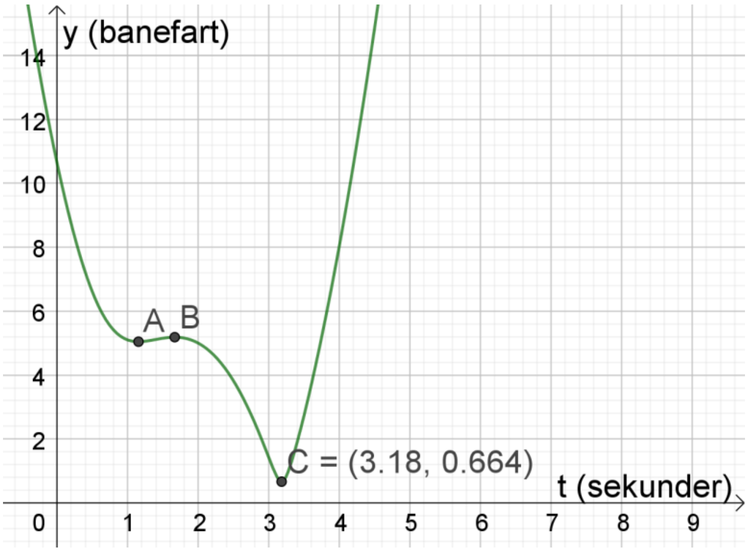
Ser at banefarten var 5,1 m/s. (eventuelt 5,1 «lengde-enheter per sekund»)

c) Finner hvor banefarten var lavest ved å bestemme bunnpunktet til *banefartfunksjonen* $|r'(t)|$:

banefart(t) := abs(r'(t))

$\approx \mathbf{banefart(t) := \sqrt{9\,t^4 - 72\,t^3 + 196\,t^2 - 220\,t + 113}}$

Tegner grafen og bruker kommandoen Ekstremalpunkt:



<u>Punkt B gir den laveste banefarten, og inntreffer etter ca. 3,18 sekunder.</u>

Oppgave 3

a) Løser i CAS:

h(a) := 16*ln(a) + 31

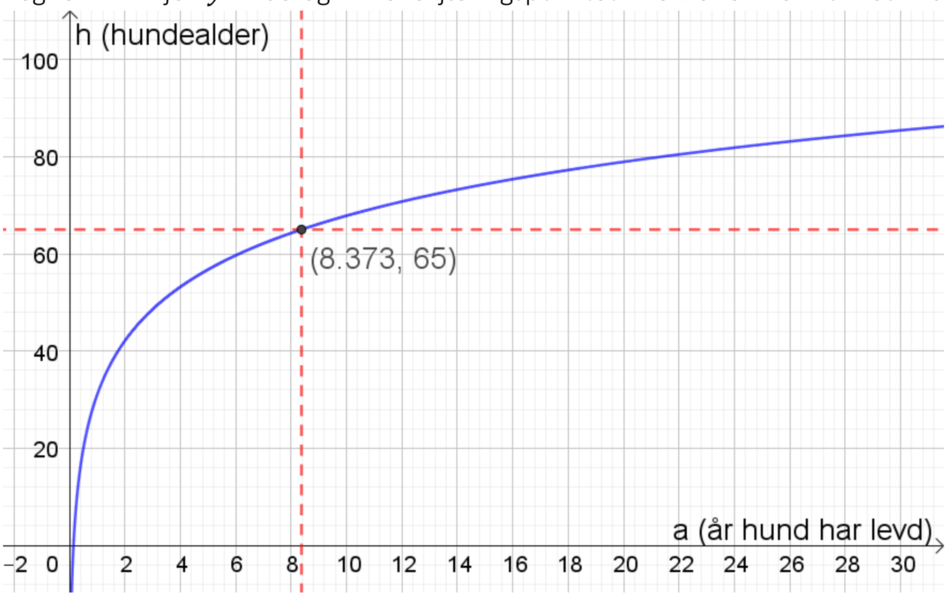
→ $h(a) := 16 \ln(a) + 31$

h(a) = 65,a=1

NLøs: $\{a = 8.373\}$

<u>Ser at hunden til Dennis har levd i litt over 8 år.</u>

b) Grafisk fremstilling – tegner grafen i GeoGebra, og legger også inn oppgave a grafisk:
Tegner inn linjen $y = 65$ og finner skjæringspunktet. Trekker en normal ned mot x-aksen.



(her kan vi se at modellen ikke gir mening for a-verdier under en viss verdi, der vi får negativ hundealder. Denne verdien er ca. $0{,}144$)

h(a) = 0

NLøs: $\{a = 0.144\}$

c) Lager et likningssett basert på informasjonen, og løser i CAS. Her er x antall år Laika har levd i dag, og y antall år Fido har levd i dag:

```
h(x-1) = h(y-1) + 20
→ 16 ln(x − 1) + 31 = 16 ln(y − 1) + 51

h(x) = h(y) + 10
→ 16 ln(x) + 31 = 16 ln(y) + 41

{$6, $7},{y=1,x=1}
NLøs: {x = 2.868, y = 1.535}
```

I dag har altså Laika levd i 2,868 år. Finner hennes hundealder i dag:

```
h(2.868)
≈ 47.858
```

Ser at hundealderen til Laika i dag er ca. 48 år.

Oppgave 4

a) Legger inn sidelengdene og bruker Herons formel i CAS for å finne arealet:

```
a := 5
→ a := 5

b := 7
→ b := 7

c := 8
→ c := 8

s := (a + b + c)/2
→ s := 10

F := sqrt(s*(s-a)*(s-b)*(s-c))
→ F := 10 √3
```

Ser at arealet av trekanten er $10\sqrt{3}$.

b) Vise at $b^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$:

1. Bruker Pytagoras' setning på trekant ADC, som gir: $b^2 = h^2 + q^2$
2. Legger inn opplysningen fra oppgaven om $q^2 = c^2 - 2cp + p^2$:
3. Det gir $b^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$
4. QED.

c) Vise at $p = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$:

5. Bruker Pytagoras' setning på trekant DBC, som gir: $a^2 = h^2 + p^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - p^2$
6. Setter dette uttrykket for h^2 inn i uttrykket fra b):
   $b^2 = a^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2$
7. Løser dette for p:
   $$2cp = a^2 + c^2 - b^2 \Rightarrow p = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$
8. QED.

d) Skriver uttrykkene inn i CAS og sjekker om de er identiske:

s := (a + b + c) / 2

$\rightarrow \ \mathbf{s := \frac{1}{2}\left(a + b + c\right)}$

HS := s*(s-a)*(s-b)*(s-c)

$\rightarrow \ \mathbf{HS := \frac{-1}{16}\, a^4 - \frac{1}{16}\, b^4 - \frac{1}{16}\, c^4 + \frac{1}{8}\, a^2\, b^2 + \frac{1}{8}\, a^2\, c^2 + \frac{1}{8}\, b^2\, c^2}$

p := (a^2 + c^2 - b^2)/(2*c)

$\rightarrow \ \mathbf{p := \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\, c}}$

VS := 1/4 c^2 * (a^2 - p^2)

$\rightarrow \ \mathbf{VS := \frac{1}{4}\, c^2 \left(a^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\, c}\right)^2\right)}$

VS == HS

$\rightarrow$ **true**

Ser at CAS forteller at de er like. Dette beviser Herons formel siden:

1. Høyre side er Herons formel kvadrert
2. Venstre side kan vi tolke som følger:
   - c er grunnlinjen i trekant ABC
   - $a^2 - p^2$ er h^2, altså høyden kvadrert
   - Det står dermed egentlig $\frac{1}{4}c^2 \cdot h^2 = \left(\frac{1}{2}c \cdot h\right)^2$
   - Dette siste ser vi at er den tradisjonelle arealformelen for en trekant, «grunnlinje * høyde / 2», men kvadrert
3. Totalt har vi nå at venstre side uttrykker arealet av trekanten, kvadrert. Det betyr at høyre side må gjøre det samme. Og siden Herons formel er kvadratroten av dette uttrykket (se punkt 1), vil det nødvendigvis gi arealet av trekanten. Herons formel er dermed bevist. QED.