Løsningsforslag eksamen R1 våren 2021

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x)=3x^3-4x+\frac{1}{x}=3x^3-4x+x^{-1}\Rightarrow f'(x)=9x^2-4-x^{-2}=\underline{\underline{9x^2-4-\frac{1}{x^2}}}$$

b)

$$g(x)=3x^2\cdot\ln x$$

$$g'(x)=6x\cdot\ln x+3x^2\cdot\frac{1}{x}=6x\cdot\ln x+3x=\underline{\underline{3x\left(2\ln x+1\right)}}$$

c)

$$h(x)=\sqrt{4x^2-5}\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{4x^2-5}}\cdot 8x=\underline{\underline{\frac{4x}{\sqrt{4x^2-5}}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\frac{3x}{x^2-x-2}-\frac{2x}{x+1}-\frac{2}{x-2}&=\frac{3x}{(x+1)(x-2)}-\frac{2x(x-2)}{(x+1)(x-2)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(x-2)}\\&=\frac{3x-2x^2+4x-2x-2}{(x+1)(x-2)}\\&=\frac{-2x^2+5x-2}{(x+1)(x-2)}\\&=\frac{-2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)}{(x+1)(x-2)}\\&=\frac{-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)}{(x+1)(x-2)}\\&=\frac{-2x+1}{x+1}\\&=\underline{\underline{\frac{1-2x}{x+1}}}\end{aligned}$$

b)

$$\ln\left(a\cdot b^2\right)-8\ln b+2\ln a^3-3\ln\left(\frac{a^2}{b^2}\right)=\ln a+\ln b^2-8\ln b+2\cdot 3\ln a-3\left(\ln a^2-\ln b^2\right)$$
$$=\ln a+2\ln b-8\ln b+6\ln a-3\cdot 2\ln a+3\cdot 2\ln b$$
$$=\ln a-6\ln b+6\ln a-6\ln a+6\ln b$$
$$=\underline{\underline{\ln a}}$$

Oppgave 3

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=[4,1]\cdot[-1,3]=4(-1)+1\cdot 3=-4+3=-1\neq 0$, så
<u>vektorene er *ikke* ortogonale</u>

b)

$$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\vec{c}$$
$$r\cdot[4,1]+s\cdot[-1,3]=[4,14]$$
$$[4r,r]+[-s,3s]=[4,14]$$
$$gir$$
$$I.\ \ 4r-s=4$$
$$II.\ \ r+3s=14$$

Legger likning *I* til likning *II* tre ganger og får

$$13r=26$$
$$r=2$$

Setter dette inn i *I:*

$$4\cdot 2-s=4$$
$$s=8-4$$
$$s=4$$

$$\underline{\underline{\vec{c}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}\ \text{ for }\ r=2\wedge s=4}}$$

Oppgave 4

a) Total sannsynlighet gir

$$P\left(\text{Feil på dekselet}\right)=0,4\cdot 0,2+0,6\cdot 0,1=0,08+0,06=\underline{\underline{0,14=14\%}}$$

b) Bayes' setning gir

$$P\left(\text{Produsert av maskin A}\mid\text{Feil på dekselet}\right)=\frac{0,08}{0,14}=\frac{8}{14}=\frac{4}{\underline{\underline{7}}}$$

Oppgave 5

a)

$$f'(x) = 3x^2 - 14$$

$$så$$

$$f'(x) = 0$$

$$gir$$

$$3x^2 = 14$$

$$x^2 = \frac{14}{3}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{14}{3}} = \pm\frac{\sqrt{42}}{3}$$

$$\underline{\underline{\text{Grafen til } f \text{ har toppunkt for } x = -\frac{\sqrt{42}}{3} \text{ og bunnpunkt for } x = \frac{\sqrt{42}}{3}}}$$

b) Ser av grafen (og ved innsetting) at $f(3) = 0$, så da er $(x-3)$ faktor i $f(x)$.

$$\left(x^3 + 0 \cdot x^2 - 14x + 15\right) : \left(x - 3\right) = x^2 + 3x - 5$$

$$\underline{x^3 - 3x^2}$$

$$3x^2 - 14x + 15$$

$$\underline{3x^2 - 9x}$$

$$-5x + 15$$

$$\underline{-5x + 15}$$

$$0$$

$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$gir$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Bruker nullpunktene jeg har funnet, og grafen, til å løse ulikheten.

$$\underline{\underline{f(x) > 0 \text{ når } x \in \left\langle \frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2} \right\rangle \cup \left\langle 3, \rightarrow \right\rangle}}$$

Oppgave 6

Rektangelet *ABCD* har grunnlinje *t* og høyde $f(t)$, så arealet, som jeg kaller *F*, er gitt ved

$$F(t) = t \cdot f(t) = t \cdot \frac{8}{t^2+4} = \frac{8t}{t^2+4}$$

Bruker derivasjon til å bestemme den største verdien *F* kan ha.

$$F'(t) = \frac{8\left(t^2+4\right) - 8t \cdot 2t}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{8t^2+32-16t^2}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{-8t^2+32}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{-8\left(t^2-4\right)}{\left(t^2+4\right)^2}$$

$F'(t) = 0$ når $t^2 - 4$, altså når $t = \pm 2$.

Siden vi har $t > 0$, kan vi kun bruke den positive løsningen.

Nevneren i uttrykket til den deriverte er positiv for alle *t*.

Telleren er positiv når $-2 < t < 2$ og negativ når $t > 2$, så den deriverte skrifter fortegn fra positiv til negativ i nullpunktet $t = 2$.

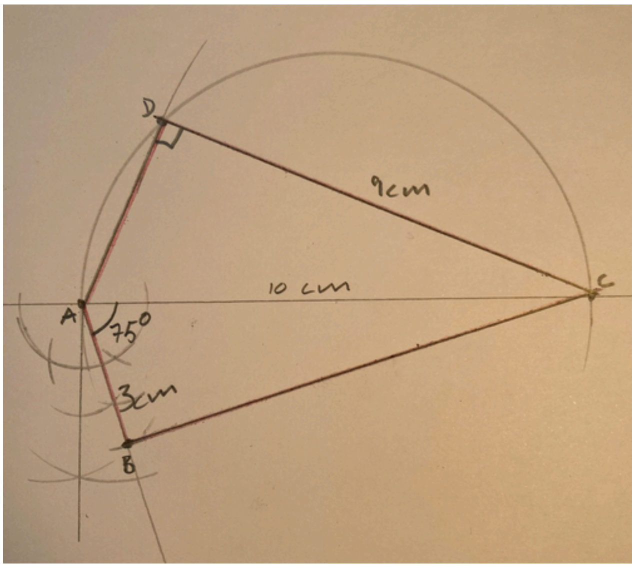
Det betyr at $\left(2, F(2)\right)$ er et *toppunkt* på grafen til *F*.

$$\underline{\underline{\text{Arealet av rektangelet } ABCD \text{ er blir størst når } t = 2}}$$

Oppgave 7

Konstruksjonsforklaring:

- Avsetter et vilkårlig linjestykke og slår en halvsirkel med radius 5 om dette linjestykket. Skjæringspunktene mellom linjestykket og halvsirkelen er punktene *A* og *C*.
- Setter passerspissen i *C* og slår en bue som skjærer halvsirkelen 9 cm fra *C*. Skjæringspunktet mellom buen og halvsirkelen, er punktet *D*.
- Jeg har nå konstruert en rettvinklet trekant *ACD*.
- Konstruerer en vinkel på $75°$ i *A* ved først å konstruere en vinkel på $60°$ grader, så enda en vinkel på $60°$. Så halverer jeg den siste $60°$-vinkelen to ganger. Da har jeg en vinkel på $60° + 15° = 75°$.
- Trekker en stråle fra *A*, som da danner $75°$ med *AC*.
- Setter passerspissen i *A* og slår en bue med radius 3cm, som skjærer stålen fra *A*. Dette skjæringspunktet er punktet *B*.
- Trekker til slutt linjestykket *BC*.
- Jeg har nå konstruert firkanten *ABCD*.



Oppgave 8

a) $\angle BED$ er en periferivinkel som spenner over en bue på $108°$, så

$$\angle BED = \frac{108°}{2} = \underline{\underline{54°}}$$

b) ΔABC er likesidet, så $\angle EBF = 60°$.
Da har vi at $\angle EFB = 180° - 60° - 54° = 66°$
$\angle EFB$ og $\angle CFD$ er toppvinkler, og dermed like store.
$\angle CFD = \underline{\underline{66°}}$

Oppgave 9

a) $\overrightarrow{AB} = [4-(-2), 3-1] = [6,2] = 2\cdot[3,1]$, så $\vec{r} = [3,1]$ er en retningsvektor for ℓ.
Bruker punktet *A* som fast punkt og setter opp en parameterfremstilling for ℓ.

$$\underline{\underline{\ell : \begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = t + 1 \end{cases}}}$$

b) Skjæring med *x*-aksen når $y = 0$.
$t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1$, som gir $x = 3(-1) - 2 = -5$.

Skjæring med *y*-aksen når $x = 0$.

$3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$, som gir $y = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$.

$\underline{\underline{\text{Linja } \ell \text{ skjærer } x\text{-aksen i } (-5,0) \text{ og } y\text{-aksen i } \left(0, \frac{5}{3}\right)}}$

c) Kaller tangeringspunktet mellom sirkelen og linja ℓ for *P*.
Radius i sirkelen tilsvarer lengden av $\overrightarrow{SP}$.
$\overrightarrow{SP} = \left[(3t-2)-1, (t+1)-0\right] = \left[3t-3, t+1\right]$

så

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{\left(3t-3\right)^2 + \left(t+1\right)^2} = \sqrt{9t^2 - 18t + 9 + t^2 + 2t + 1} = \sqrt{10t^2 - 16t + 10}$$

Siden sirkelen tangerer linja i *P*, må vi også ha $\overrightarrow{SP} \perp \vec{r} \Leftrightarrow \overrightarrow{SP} \cdot \vec{r} = 0$.

$$\left[3t-3, t+1\right]\cdot\left[3,1\right] = 0$$
$$9t - 9 + t + 1 = 0$$
$$10t - 8 = 0$$
$$t = \frac{8}{10}$$

Setter dette inn i uttrykket for lengden av radius i sirkelen.

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{10\left(\frac{8}{10}\right)^2 - 16\cdot\frac{8}{10} + 10} = \sqrt{\frac{640}{100} - \frac{128}{10} + 10} = \sqrt{\frac{64}{10} - \frac{128}{10} + \frac{100}{10}} = \sqrt{\frac{36}{10}} = \sqrt{\frac{18}{5}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

Sirkelens radius er $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

Del 2

a)

$$\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{9}{17}\cdot\frac{8}{16}\cdot\frac{7}{15} = \frac{665280}{27907200} = \frac{77}{3230} \approx 0{,}024$$

Sannsynligheten for at alle 6 er fra Høyre er omtrent 2,4 %

b) Man kan trekke ut de andre 5 av 19 på $\binom{19}{5} = 11628$ måter.

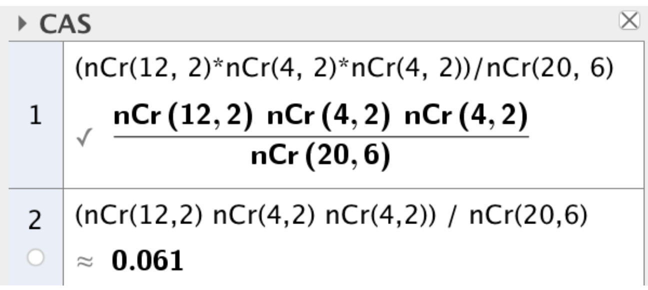
Det betyr at det finnes 11628 ulike sammensetninger der statsministeren kan inngå, av totalt $\binom{20}{6} = 38760$ sammensetninger.

$$\frac{11628}{38750} \approx 0{,}300$$

Sannsynligheten for at statsministeren er blant dem som trekkes ut er 30 %

c) Vi har i hele denne oppgaven hatt en hypergeometrisk sannsynlighetsmodell, med ulike delmengder, men først nå velger jeg å bruke den "kjente formelen".

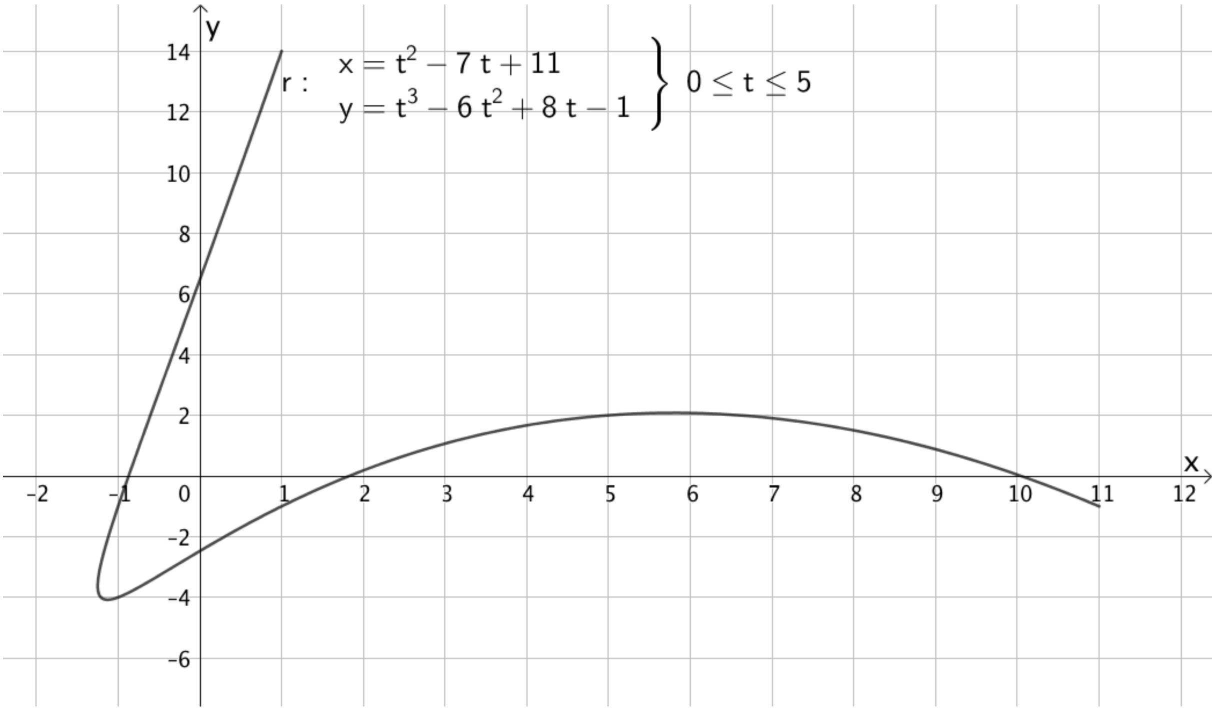
Bruker CAS til å regne ut $\dfrac{\binom{12}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{20}{6}}$.



Sannsynligheten for å trekke to ministere fra hvert av de tre partiene er 6,1 %

Oppgave 2

a) Bruker kommandoen
" Kurve(<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>)"
og tegner grafen i GeoGebra.



b) Løser i CAS.

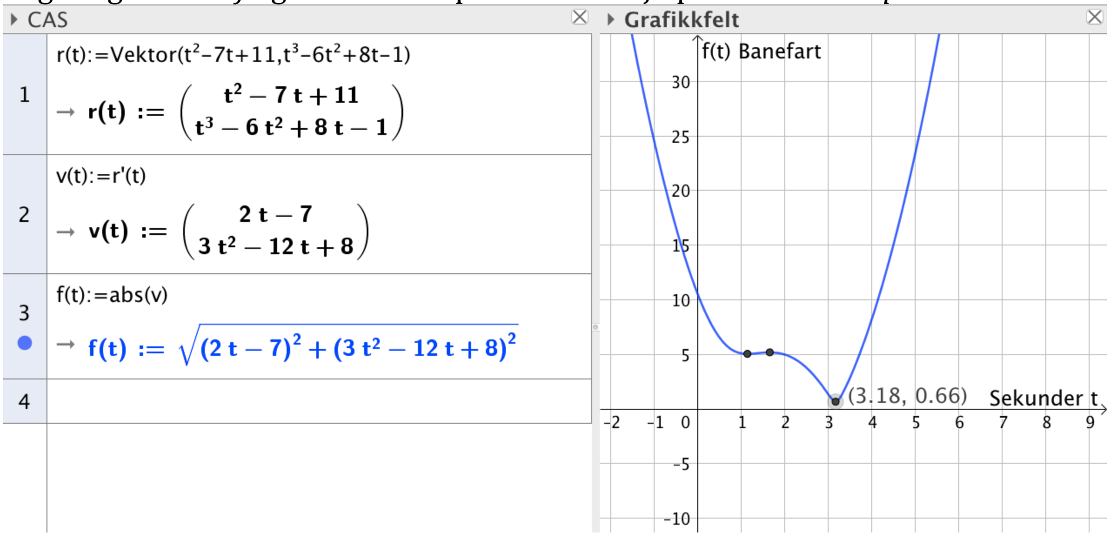
CAS

1	r(t):=Vektor(t²−7t+11,t³−6t²+8t−1) $\rightarrow \mathbf{r(t)} := \begin{pmatrix} t^2 - 7t + 11 \\ t^3 - 6t^2 + 8t - 1 \end{pmatrix}$
2	v(t):=r'(t) $\rightarrow \mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} 2t - 7 \\ 3t^2 - 12t + 8 \end{pmatrix}$
3	abs(v(1)) $\rightarrow \sqrt{26}$
4	sqrt(26) $\approx$ **5.1**

<u>Etter 1 sekund er banefarten omtrent 5,1</u>

Oppgaveteksten sier ikke noe om lengdeenhetene i x- og y-retning, så da oppgir jeg heller ingen enhet for banefarten i svaret, men det kunne for eksempel vært snakk om 5,1 m/s dersom det var meter som var den aktuelle enheten for lengde her.

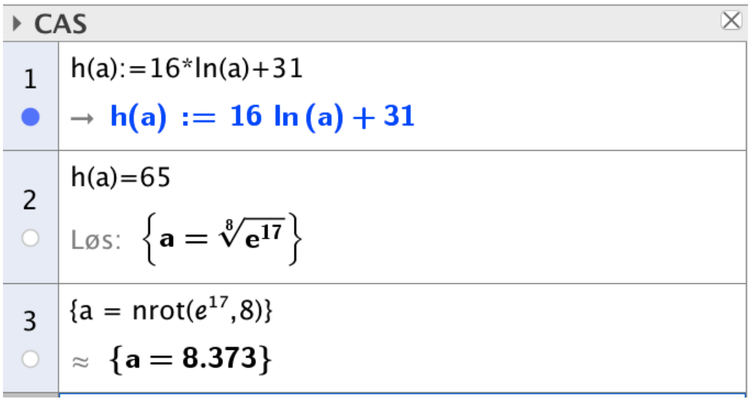
c) Lar absoluttverdien til fartsvektoren være gitt ved en funksjon *f*, som gir oss banefarten $f(t)$ etter *t* sekunder.
Tegner grafen til *f* og finner bunnpunktet ved hjelp av *"ekstremalpunkt"*.



<u>Banefarten er lavest etter 3,18 sekunder</u>

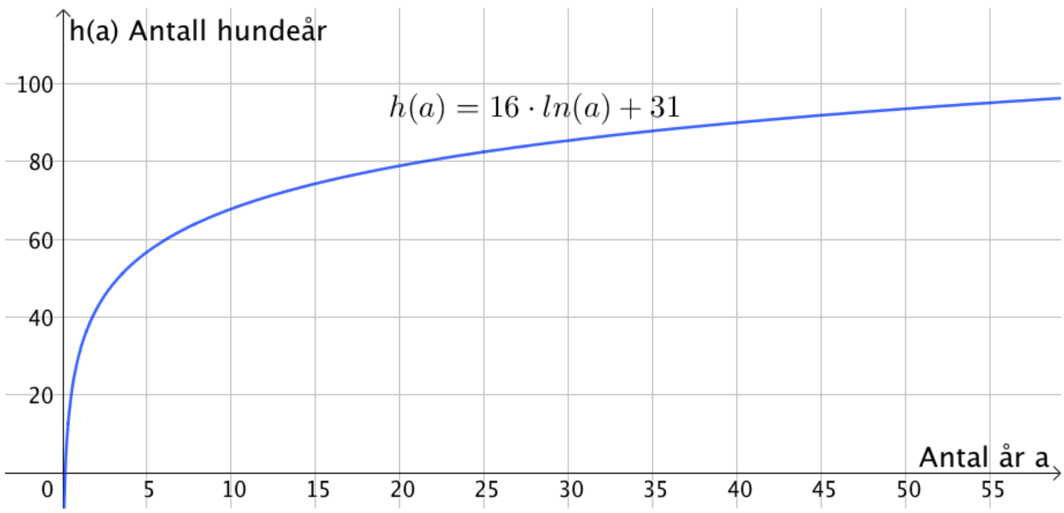
Oppgave 3

a)



<u>Dennis har levd omtrent 8,4 år, altså i overkant av 8 år og 4 måneder</u>

b)



c) Lar *x* være alderen til Laika i dag og lar *y* være alderen til Fido i dag.
(Altså hvor lenge de har levd - *ikke* antall hundeår)
Da kan jeg sette opp to likninger av to ukjente, og løse disse, i CAS.

CAS

1	h(a):=16*ln(a)+31 → $h(a) := 16 \ln(a) + 31$
2	h(x-1)-h(y-1)=20 → $16 \ln(x-1) - 16 \ln(y-1) = 20$
3	h(x)-h(y)=10 → $16 \ln(x) - 16 \ln(y) = 10$
4	{$2, $3},{x=1,y=1} NLøs: $\{x = 2.868, y = 1.535\}$
5	h(HøyreSide($4,1)) → $16 \ln\left(\frac{358530744679}{125000000000}\right) + 31$
6	16ln(358530744679 / 125000000000) + 31 ≈ 47.859

I linje 1-4 finner jeg ut hvor mange år gamle Laika og Fido er i dag, før jeg i linje 5-6 bestemmer hundealderen til Laika i dag.

<u>I dag er hundealderen til Laika omtrent 48 hundeår</u>

Oppgave 4

a)

CAS

1	a:=5 → $a := 5$
2	b:=7 → $b := 7$
3	c:=8 → $c := 8$
4	s:=(a+b+c)/2 → $s := 10$
5	F=sqrt(s(s-a)(s-b)(s-c)) ✓ $F = \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$
6	F = sqrt(s (s - a) (s - b) (s - c)) → $F = \sqrt{3} \cdot 10$
7	F = sqrt(3) 10 ≈ $F = 17.321$

<u>En trekant med sidelengder 5, 7 og 8 har areal $10\sqrt{3} \approx 17{,}3$</u>

b) Pythagoras' setning, og uttrykket for q^2 i oppgaveteksten, gir:

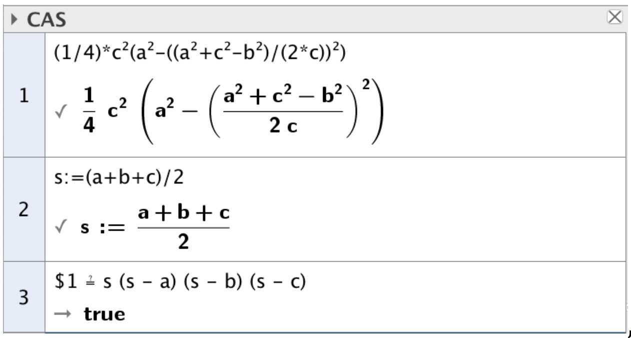
$b^2 = h^2 + q^2 = h^2 + c^2 - 2cp + p^2$, som skulle vises.

c)

$$
\begin{aligned}
p^2 &= a^2 - h^2 \\
p^2 &= a^2 - \left(b^2 - q^2\right) \\
p^2 &= a^2 - b^2 + q^2 \\
p^2 &= a^2 - b^2 + c^2 - 2cp + p^2 \\
p^2 - p^2 + 2cp &= a^2 + c^2 - b^2 \\
2cp &= a^2 + c^2 - b^2 \\
p &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}
\end{aligned}
$$

Som skulle vises

d)



, som skulle vises

Trekanten har grunnlinje *c* og høyde *h.*

Da er arealet gitt ved $\frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{a^2 - p^2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2}$

Herons formel sier at arealet er gitt ved $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Vi setter disse uttrykkene for arealet lik hverandre, og kvadrerer på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot c \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Kvadrerer begge sidene

$$\frac{1}{4} c^2 \left(a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2\right) = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

Ser at vi ender opp med en likning vi har vist at er sann, og som dermed beviser Herons formel.